

Skorohod "On the local structure of continuous Markov processes" の紹介 II

名古屋大 教養 神田護

§ 0. 序

この本文では, Skorohod の上記の題目の論文の一部の簡単な紹介をする。樫田倍之氏による前半の紹介にひきつづき, ここでは後半の前半を扱う。しかし一応独立に書いたもので記号は統一していないと思うが, できるだけ原論文に忠実にする。原論文の内容については不備な点がある事と, 結果的にも, ここで紹介する範囲は, M. Motoo-S. Watanabe あるいは H. Kunita-S. Watanabe の結果に含まれる所が多いので証明はつけない。なお後半の後半は その意図は非常に興味深いが筆者には証明でせぬ事と 最近東京教育大の小林氏等によりそれに関連した興味深い結果及び Skorohod の主張に対する反例等もでているので ここでは省略させて頂く。

注意 以下で考えている process は, relative compact な domain D 上の process で 原論文の条件をすべてみたしてい

るものとする。更に、原論文の前半 1~5 までの主張は全て正しいものとする。

§ 1. M -functional の直交性及び完備性

Φ_M を M -functional の全体とする。

定義 $\alpha_t, \beta_t \in \Phi_M$ α_t と β_t が直交する。

$$\Updownarrow \\ E_x \alpha_t \beta_t = 0, \quad \forall x \in \mathbb{U}, \quad \forall t \geq 0$$

この時、 $\alpha_t \perp \beta_t$ とかく。

Prop. 次の性質は、 $\alpha_t \perp \beta_t$ と同等である。

1) $\langle \alpha, \beta \rangle_t = 0, \quad \forall t \geq 0$

2) $\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}(x) = 0 \quad (0 \text{ は } \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \text{ の 1 つの minimum としてとれるとき})$

Prop. $\alpha_t^{(i)}, i=1, 2, \dots \in \Phi_M$ に対して

$$\alpha_t^{(x)(1)} \equiv \alpha_t^{(1)}, \quad \alpha_t^{(x)(k)} \equiv \alpha_t^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^t \frac{\partial \alpha^{(k)}}{\partial \alpha^{(x)(j)}}(x_s) d\alpha_s^{(x)(j)}$$

とおけば、 $\alpha_t^{(x)(i)}, i=1, 2, \dots \in \Phi_M$ かつ $\alpha_t^{(x)(i)} \perp \alpha_t^{(x)(j)}, i \neq j$ である。

定義 上のようにして得られた $\alpha_t^{(x)(i)}, i=1, 2, \dots \in \Phi_M$ より直交化して得られた system という。

次に Φ_M に位相をいれよう。

定義 Φ_M の位相; $\alpha_t^{(n)} \in \Phi_M$ が $\alpha_t \in \Phi_M$ に収束するとは 任意の $t \geq 0$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{U}} E_x (\alpha_t^{(n)} - \alpha_t)^2 = 0$

となる事である。

注意 原論文では、次の条件になっている。

$$(\star)', E_x(\alpha_t^{(n)} - \alpha_t)^2 \text{ が } \forall t \geq 0 \text{ に対して } \cup \text{ で有界 かつ}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_x(\alpha_t^{(n)} - \alpha_t)^2 = 0$$

— 筆者にはその定義では次の定理を示せなかった。

定理 (原論文 Th 6.2) Φ_M の完備性; $\alpha_t^{(n)}, n=1,2,\dots \in \Phi_M, \alpha_t \in \Phi_M,$

$$\alpha_t^{(n)} \rightarrow \alpha_t \text{ in } \Phi_M$$

$\Updownarrow$

$$(\star) \quad \lim_{n,m \rightarrow \infty} \sup_{x \in \cup} E_x(\alpha_t^{(n)} - \alpha_t^{(m)})^2 = 0$$

この定理の証明は原論文ではなされてないが(勿論原論文で $(\star)$ の部分に $(\star)'$ の α_t を $\alpha_t^{(n)}$ で置きかえたものになっている), 筆者が Dynkin の本を真似してやった方法はハンザツである。原論文の条件 $(\star)'$ からは, α_t の連続性を示せなかった。

定義 (~~原論文 Th 6.3~~) $\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots}$ が Φ_M で完全 (complete) であるとは, $\forall i$ に対して $\beta_t \perp \alpha_t^{(i)}$ となる $\beta_t \in \Phi_M$ は 0 に限る。

定理 (原論文 Th 6.3) $\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots}$ を完全な互に直交する M -functional の system とする。その時 $\forall \beta_t \in \Phi_M$ は

$$\beta_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_t^{(j)}}(x_s) d\alpha_s^{(j)}$$

ここで被積分の被束は Φ_M の内積による。

定理 (原論文 Th 6.4) 特 に process A Feller process で
 A はその強 infinitesimal operator とする。その時 A の
domain に属する函数の列 $\{g_i\}_{i=1,2,\dots}$ があって

$$\hat{g}_i(t) = g_i(x_t) - g_i(x_0) - \int_0^t A g_i(x_s) ds$$

とあれば, $\{\hat{g}_i\}_{i=1,2,\dots}$ は Φ_M で完全となる。

7. Maximal functionals. The Rank of a process

定義 $\alpha_t \in \Phi_M$ が $\beta_t \in \Phi_M$ を subordinate するとは

$$\beta_t = \int_0^t \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}(x_s) d\alpha_s$$

となる事である。この時 $\beta_t < \alpha_t$ と書く。

定義 $\alpha_t \in \Phi_M$ が maximal $\iff \alpha_t < \beta_t$ なる常に $\beta_t < \alpha_t$.

定理 (原論文 Th 7.1). $\{\alpha_t^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}, \alpha_t^{(*)} \in \Phi_M$ が互に直交
する完全な system とする。定数 $C_k \neq 0$ があって

$\sum_{k=1}^{+\infty} C_k \alpha_t^{(k)} = \beta_t$ が Φ_M で収束するならば, β_t は maximal
functional である。

定理 (原論文 Th 7.2). $\alpha_t \in \Phi_M, \beta_t \in \Phi_M, \beta_t$ maximal
その時 $\langle \alpha, \alpha \rangle_t \ll \langle \beta, \beta \rangle_t$

Prop α_t maximal, $\beta_t \in \Phi_M, \langle \alpha, \alpha \rangle_t \ll \langle \beta, \beta \rangle_t$

$\Downarrow$
 β_t maximal

定理 (原論文 Th. 7.4). M -functional の列 $\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots}$ が完全であったとする。その時、任意の $\alpha_t \in \Phi_M$ は、ある maximal functional によって subordinate される。

(そのような maximal functional は次のようなものを選ぶ
 ばよい。P2 の Prop. と P4 の定理 (原論文 Th. 7.1) から 少なくとも maximal
 functional は存在するから それを γ_t とする。 ~~P4 の定理~~ P4 の定理
 (原論文 Th. 7.2) より $\langle \alpha, \alpha \rangle_t \ll \langle \gamma, \gamma \rangle_t$ なる $\langle \alpha, \alpha \rangle_t = \int_0^t g(\alpha_u) d\langle \gamma, \gamma \rangle_u$
 とかける。 $\bar{\gamma}_t \equiv \langle \gamma, \gamma \rangle_t - \int_0^t \frac{1}{g(\alpha_u)} d\langle \alpha, \alpha \rangle_u$ とおけば、
 $\bar{\gamma}_t = \int_0^t g_1(\alpha_u) d\langle \gamma, \gamma \rangle_u$ とかけ、 $\bar{\gamma}_t$ と $\langle \alpha, \alpha \rangle_t$ は singular なことより
 $g_1(\alpha_u) = 1$ の 0 , $d\langle \gamma, \gamma \rangle_u$ -a.e. を命ずる。 $\beta_t \equiv \alpha_t + \int_0^t g_1(\alpha_u) d\gamma_u$
 とおけば それを求めるものである。)

定義. $\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots}$, $\alpha_t^{(i)} \in \Phi_M$ が nondegenerate であるとは、
 任意の $\alpha_t^{(k)}$ が $\{\alpha_t^{(1)}, \dots, \alpha_t^{(k-1)}\}$ によって $\alpha_t^{(k)} = \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^t g_j(\alpha_u) d\alpha_j^{(j)}$
 とあらわされる事がない事である。

注意. M -functional の system が完全であったとする。
 その時、maximal functional の system $\{\beta_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots}$ で完全
 かつ nondegenerate, 更に $\langle \beta^{(i)}, \beta^{(i)} \rangle_t = \langle \beta^{(j)}, \beta^{(j)} \rangle_t$, $\forall i, j$ とした
 ものをおえらべる。

さて rank の概念を導入しよう。

定義. $\{\beta_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots}$ を上の注意によって得られた maximal
 functional の system とする。

$$r(x) \equiv \text{rank of } \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta^{(1)}}{\partial \beta^{(1)}}(x), & \frac{\partial \beta^{(1)}}{\partial \beta^{(2)}}(x), & \dots \\ \frac{\partial \beta^{(2)}}{\partial \beta^{(1)}}(x), & \frac{\partial \beta^{(2)}}{\partial \beta^{(2)}}(x), & \dots \\ \frac{\partial \beta^{(3)}}{\partial \beta^{(1)}}(x) & \dots & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

とき, $r(x)$ を process の rank という。M-functional のない process を rank 0 という。

注意 $r(x)$ と $r_1(x)$ を 同じ process の rank とする。
 この時 $\int_0^+ \chi_0(r_1(x_u) - r(x_u)) d\sigma_u = 0$, almost surely, 但し $\chi_0(k) = 0$ for $k=0$, $\chi_0(k) = 1$ for $k \neq 0$, $\sigma_u = \langle \beta, \beta \rangle_u$, β は maximal functional とする。原論文の定理 7.5 は そのまゝでは誤りである。trivial でないどのような条件の下でそのような事になりたつか筆者は知らない。