

レーザー系におけるカオス軌道の幾何学的解析

山崎 仁士* 有光 敏彦†

筑波大 物理

1 はじめに

1.1 目的と問題意識

ストレンジ・アトラクターを形成しているカオス軌道は、ある領域に吸引されながらも、決して特定の周期軌道に落ち込むことはない。かといってどこかへさまよい出ていってしまうことなく、広がりを持った領域に「緩やかに」トラップされているような「奇妙な」様相を示す(図 1)。この「奇妙さ」を演出する主因は、「不安定周期軌道」の持つ「双曲性」である。

ここで「不安定周期軌道」とは、図 3 の点線で示したように周期軌道が不安定化した軌道を指す。また「双曲性」とは平たくいえば、鞍点のようにある方向には吸引力が働き、別の方向には反発力が働く性質のことである。ある不安定周期軌道の吸引方向から進入した軌道は、吸引が反発に転ずるまでの有限時間その不安定周期軌道の近傍にトラップされる。こうした「吸引」と「反発」の精妙なバランスがストレンジ・アトラクターを「奇妙」たらしめているのである。図 1 と 2 を見比べてみると分かるように、不安定周期軌道群はストレンジ・アトラクターの概形をその疎密も含めてよく表わしている。

そこで、カオス軌道を、その振る舞いを支配している加算無限個の不安定周期軌道の「無限級数」として表現することを考える。その「無限級数」の「基底」たる不安定周期軌道群の各軌道及び軌道間のトポロジカルな性質を抽出し、それをもって「無限級数」の特徴づけをしたい。トポロジカルな性質は「テンプレート」によって表現することができる。また、そのテンプレートの決定において、周期倍分岐軌道の解析で得られた「知見」は武器となり得ることを以下において示す。

1.2 モデルと用語の定義

以下では専ら微分方程式系の内、2次元の非自励系:

$$\dot{u} = f_1(u, v, \theta; \delta) \quad (1)$$

$$\dot{v} = f_2(u, v, \theta; \delta) \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \omega_f \quad (3)$$

を想定する。但し $\omega_f = \frac{2\pi}{T}$ であり T は外から加えられる周期、 δ は系のコントロールパラメーターである。なお $R^2 \times S$ の 3 次元の位相空間である (u, v, θ) -空間での系の時間発展の軌跡を「軌道」

*筑波大学 教育研究科 (305 茨城県つくば市天王台 1-1-1) yamazaki@cm.ph.tsukuba.ac.jp

†筑波大学 物理学系 (305 茨城県つくば市天王台 1-1-1) arimitsu@cm.ph.tsukuba.ac.jp

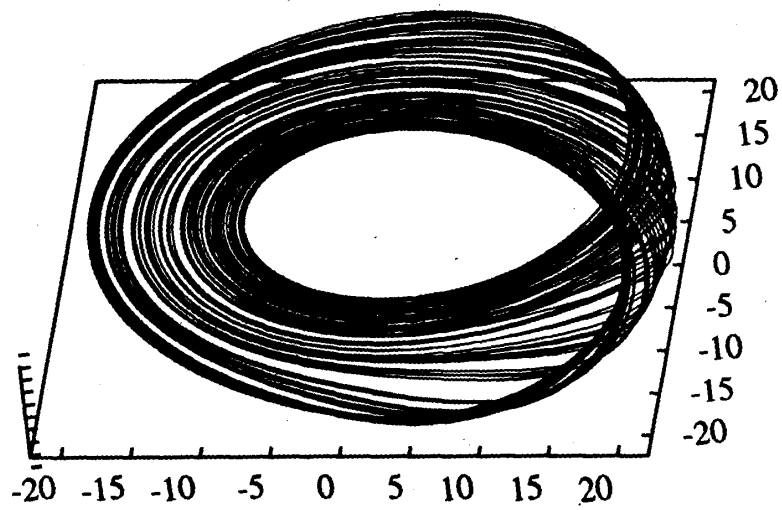


図 1: 変調レーザー・モデルのストレンジ・アトラクター

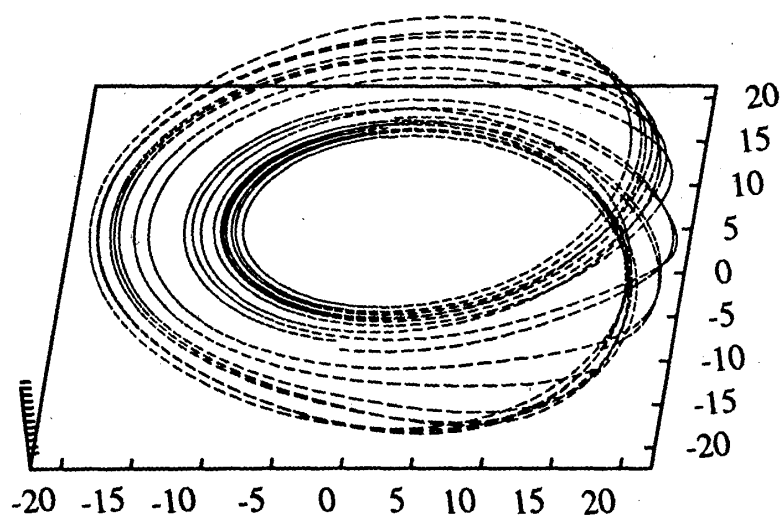


図 2: ストレンジ・アトラクターより抽出した不安定周期軌道群

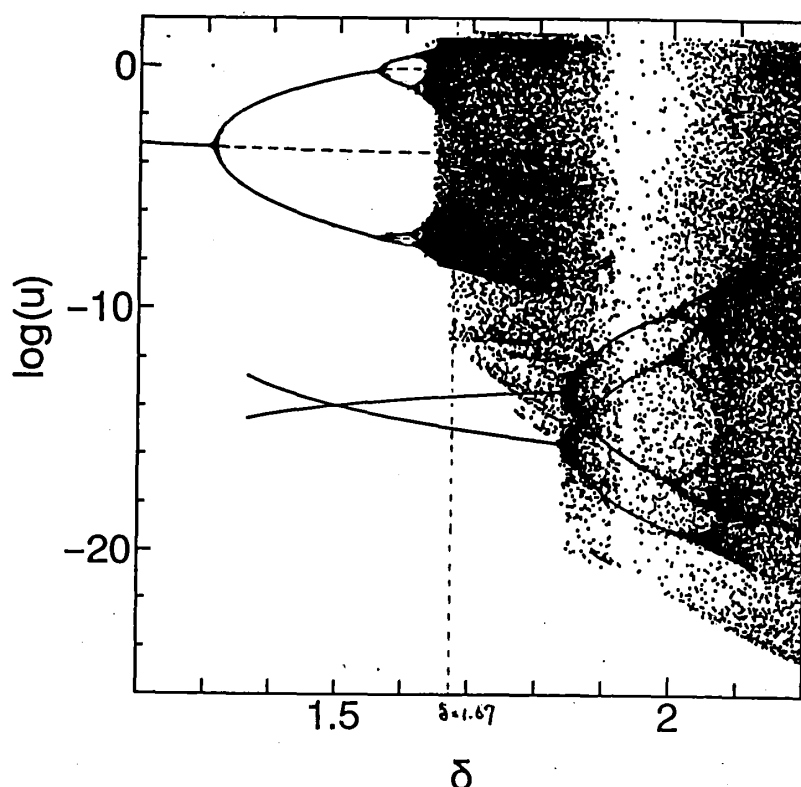


図 3: レーザー・モデルの分岐図 ($\epsilon_1 = 0.09, \epsilon_2 = 0.003, \omega = 0.9$)

と呼ぶことにする。非自励系の利点は、周期軌道の周期が外部からの周期 T の整数倍になっており、自励系に比べ周期を見分けるのが容易であることである。

さて、これらの軌道を時間発展の方向に向きのついた「結び目」と考えることにより、トポロジカルな性質を表わす幾つかの概念を導入することができる。なお、異なる2つ以上の結び目からなるオブジェクトを「絡み目」と呼ぶ。一般に向きのついた2つの線分の間の「交差」には図4の2種類のものを考えることができ、ある交点 $\odot$ がこれらのどちらのタイプであるかによって $sign(\odot)$ は+1 または-1 をとることにすると、 n 個の交差を持つ結び目および絡み目の「交差数」は、

$$\sum_{k=1}^n sign(\odot_k), \quad (4)$$

である。但し、今考えているモデルでは軌道の交差の仕方は1種類しかないので「交差数」は「交点数」に一致する。交差の仕方が1種類しかないのは、 f_1 が v に関して単調関数となっているからである。つまり、交点において u 及び θ が等しいことから、 $\dot{u} \propto v$ であり、交点において u の傾きが大きい方 v も大きい、すなわち必ず上になる。交差のタイプを考慮しなくて済むこともこのモデルの利点の一つである。

さて、絡み目に関して重要なのは「リンク (絡み) 数」である。2つの異なる結び目から構成された絡み目のリンク数は、「それらが何回絡んでいるか」を「絡み目を変形して数える」という幾何学的直感に根ざした量であると同時に、異なる結び目の間に m 個の交差を持つ場合、

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m sign(\odot_k), \quad (5)$$

のように「交差数」(今考えているモデルでは「交点数」) の $\frac{1}{2}$ として定義される。

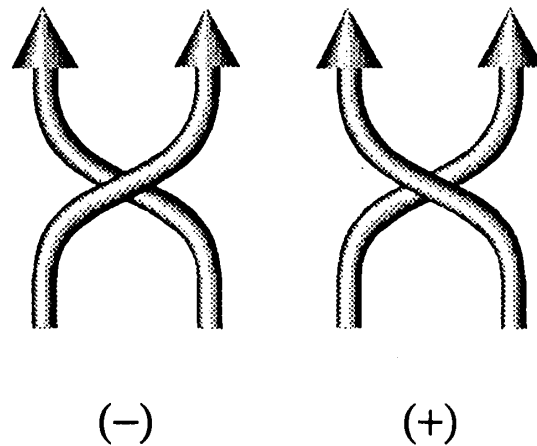


図 4: 2 種類の交差

なお「交差数」は「ねじれ数」とも呼ばれる。図 4において2つの「ベクトル」を縁に持つ「リボン」を考えると、「交差」は「ねじれ」であることは合点がいくであろう。以下においては原則として「交差数」という用語を用いるが、「リボン」のイメージを強調したい場合には「ねじれ数」という用語を用いることにする。

2 一般論

2.1 カオスの発生機構と記号力学

カオスの発生機構の本質は、「引き伸ばし」と「折り畳み」である¹。

- 差分方程式系 — パイコね変換, ロジスティック写像。
- 微分方程式系 — 不安定多様体方向への「反発」と安定多様体方向への「吸引」。

「折り畳み」のために、「向きを保つ」写像と「向きが逆転する」写像が現れることは、差分方程式系:

$$x_{n+1} = f(x_n; \mu) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

の場合、 f として単峰な関数を考えれば容易に理解することができよう(図 5)。 x_n がいずれの写像領域にあるかによって文字 x と y で記号化することで、周期軌道はこれらの有限個の文字列(のパターンの)くり返しとして表すことができる。

今考えている微分方程式系においても、 T 毎に u をピックアップする(すなわち Poincaré 断面を取る)ことによって連続的な流れ(flow)を離散化して考えると、その Poincaré 写像²は単峰であり同様に文字列化が可能である。

このように軌道を文字列化しておく「記号力学」によって文字列の形式操作が行なえるようになり、実際に実現可能な(すなわち実際の軌道に対応する)「許される文字列」を手に入れる

¹「接構造」のある場合を考えている。

²return map も呼ばれる。 $u_n = u(t + nT)$ としたときの (u_n, u_{n+1}) の集合すなわち f 。

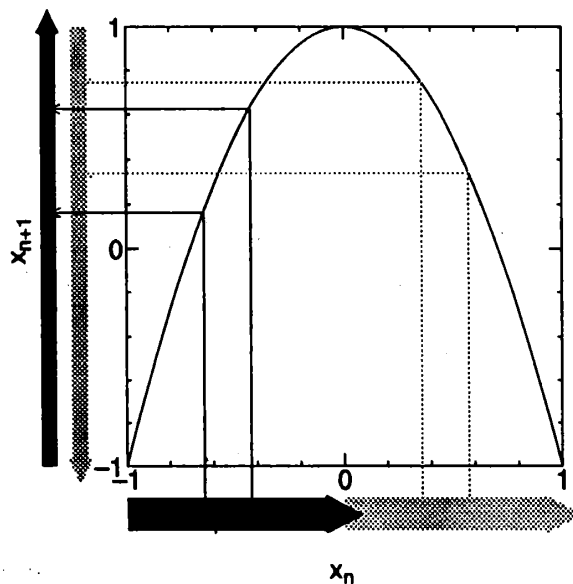


図 5: 「向きを保つ」折り畳みと「向きが逆転する」折り畳み

ことができる. なお以下において, 文字列 w_1, w_2 で表わされる 2 つの周期軌道間のリンク数を, $l(w_1, w_2)$ と表わすことにする.

2.2 Holmes テンプレート

微分方程式系においてカオス発生機構の本質を具現化したものが Smale の馬蹄型写像であり, その再帰的なくり返しを表現したものが Holmes[1] による Holmes テンプレートである (図 6). テンプレート (template) は別名「結び目の台 (knot-holder)」と呼ばれ, その上に「一筆書き」された軌道はそのトポロジカルな性質を再現する. なお「台」といっても「上に乗せる」というイメージを持つのは誤りで, この「台」の裏と表は同一視する. その意味では「鋳型」の意味を持つテンプレートの方が「埋め込む」というイメージに合っているかもしれない.

しかし実際の連続力学系の軌道の殆どは, Holmes テンプレートでは実現することができないため, それらも含めてテンプレート上に再現できるよう工夫されたのが, (ξ, η) -テンプレートである.

2.3 (ξ, η) -テンプレートと周期倍分岐

有光・本池 [2, 3] による (ξ, η) -テンプレート上では, 物理的に興味のある散逸カオス系を含め, 一般に周期倍分岐軌道に対応する文字列は, $W = \{y, xy, xy^3, xy^3(xy)^2, \dots\}$ で与えられる³.

³Holmes テンプレートでは「向きを保つ枝」と「向きが反転する枝」のそれぞれのねじれ数は 0 と 1 に固定されており, 鞍点・結節点分岐から生ずる最初の周期軌道が 1 周期以外のものは文字列を変えることで表現していたが, (ξ, η) -テンプレートでは最初の周期軌道が y となるように 2 つの枝の各々のねじれ数 (ξ, η) の値を決める. これは, 最初の周期軌道が n 周期の場合 f^n を見ていることに他ならない.

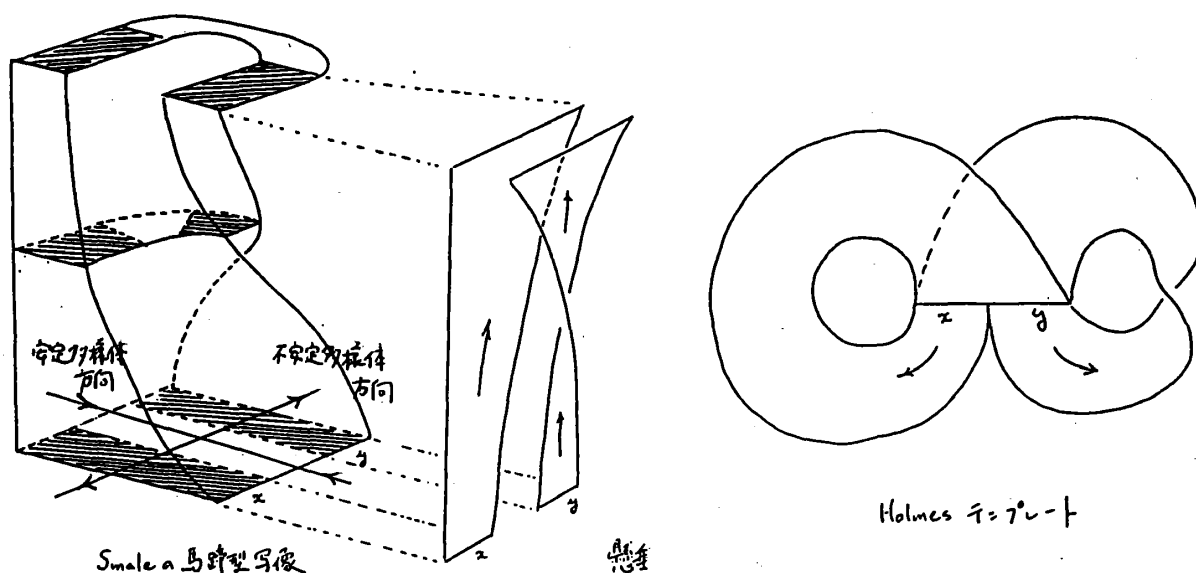


図 6: Smale の馬蹄型写像から Holmes テンプレートへ

この W の要素である文字列 w_n は,

$$w_{n+2} = w_{n+1}(w_n)^2 \quad (7)$$

の関係を満たしており, 文字列 w_n の内, 文字 x の個数を x_n , y の個数を y_n とすると, それらは漸化式:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_{n+1} + 2x_n & \text{但し } x_0 = 0, x_1 = 1, \\ y_{n+2} &= y_{n+1} + 2y_n & \text{但し } x_0 = 1, x_1 = 1, \end{aligned} \quad (8)$$

を満たす.

周期倍分岐のダイナミクスを, 2^n 周期の軌道を「太らせて」トーラスにし, そのトーラス上に次の 2^{n+1} 周期の軌道が「自明でないトーラスのトーラス結び目として」できると捉えると (図 7), トーラス結び目からつくられたリボンのねじれ数として局所交差数 C_n が定義でき, それは,

$$C_{n+1} = \xi x_n + \eta y_n, \quad (9)$$

である.

式 (8) と式 (9) より, 2^n 周期軌道の局所交差数 C_n の漸化式,

$$C_{n+2} = C_{n+1} + 2C_n, \quad (10)$$

が得られ, それより 2^n 周期軌道の全交差数 c_n や 2^n と 2^{n+1} 周期軌道間のリンク数 $l_{n+1,n}$ が,

$$c_{n+1} = 4c_n + C_{n+1}, \quad (11)$$

$$l_{n+1,n} = 2c_n + C_{n+1}, \quad (12)$$

より求められる。また、鞍点・結節点分岐により発生した周期倍分岐軌道の最初の周期軌道の全交差数 c_0 及び ξ, η を使って上の漸化式はリンク数に関しては、

$$l_{n+1,n} = 2 \cdot 4^n c_0 + \xi \kappa_n + \eta \kappa_{n+1}, \quad (13)$$

$$\kappa_n = \frac{1}{5}(4^n - (-1)^n), \quad (14)$$

と書き下すことができる [3].

2.4 テンプレート行列

周期倍分岐では、あるパラメーター領域に存在する周期軌道は1つだけであり、リンク数も 2^n と 2^{n+1} 周期軌道の間のみを考えれば良かった。しかし、ストレンジ・アトラクターの不安定周期軌道は複数の軌道が同時に混在しており、それらの任意の軌道間のトポロジカルな性質を再現するためにはテンプレートの「枝」同士の絡み及び枝の合流点での張り付き方の情報が必要となる⁴。この情報と上記の拡張は、Mindlin[5, 6] らにより導入されたテンプレート行列という形で表現することができる。これは下記のように2組の行列によってあらわされる。

$$\begin{bmatrix} \xi & 2l(x,y) \\ 2l(y,x) & \eta \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$(0, m). \quad (16)$$

図 8 のようにテンプレートを変形した際に、まず行列 (15) は枝の交差に関する情報であり、

- (1,1) 成分には x の枝、(2,2) 成分には y の枝のねじれ数を入れる。
- (1,2), (2,1) 成分には、枝 x と枝 y の交差数 (すなわちリンク数の 2 倍) を入れる。なお、 $l(x,y)$ と書いてあるのは、枝 x と枝 y の交差数とは、枝 x のみを通る文字列 x で表わされる 1 周期軌道と枝 y のみを通る文字列 y で表わされる 1 周期軌道の交差数に他ならないからである。

次に、行列 (16) は枝の張り付き方の情報であり、

- 枝 x を基準 (0) として、枝 y がその「表側」に張り付けば $m = +1$, 「裏側」に張り付けば $m = -1$ とする。

のである。

なお、周期軌道を表す文字列とこのテンプレート行列が与えられれば、その周期軌道のトポロジカルな性質は一意的に確定することを強調しておく。相異なる 2 つの周期軌道については、それらの間のトポロジカルな性質も含めて確定する。

2.5 テンプレート行列決定のための一般公式

テンプレートに対するトポロジカルな考察から、テンプレート上の任意の 2 つの軌道について、それらのリンク数とテンプレート行列の各要素の間の関係式を導くことができる。たとえば周期

⁴後述のように、周期倍分岐のダイナミクスをテンプレート上に再現しようとする、やはりこれらの情報が必要となる。

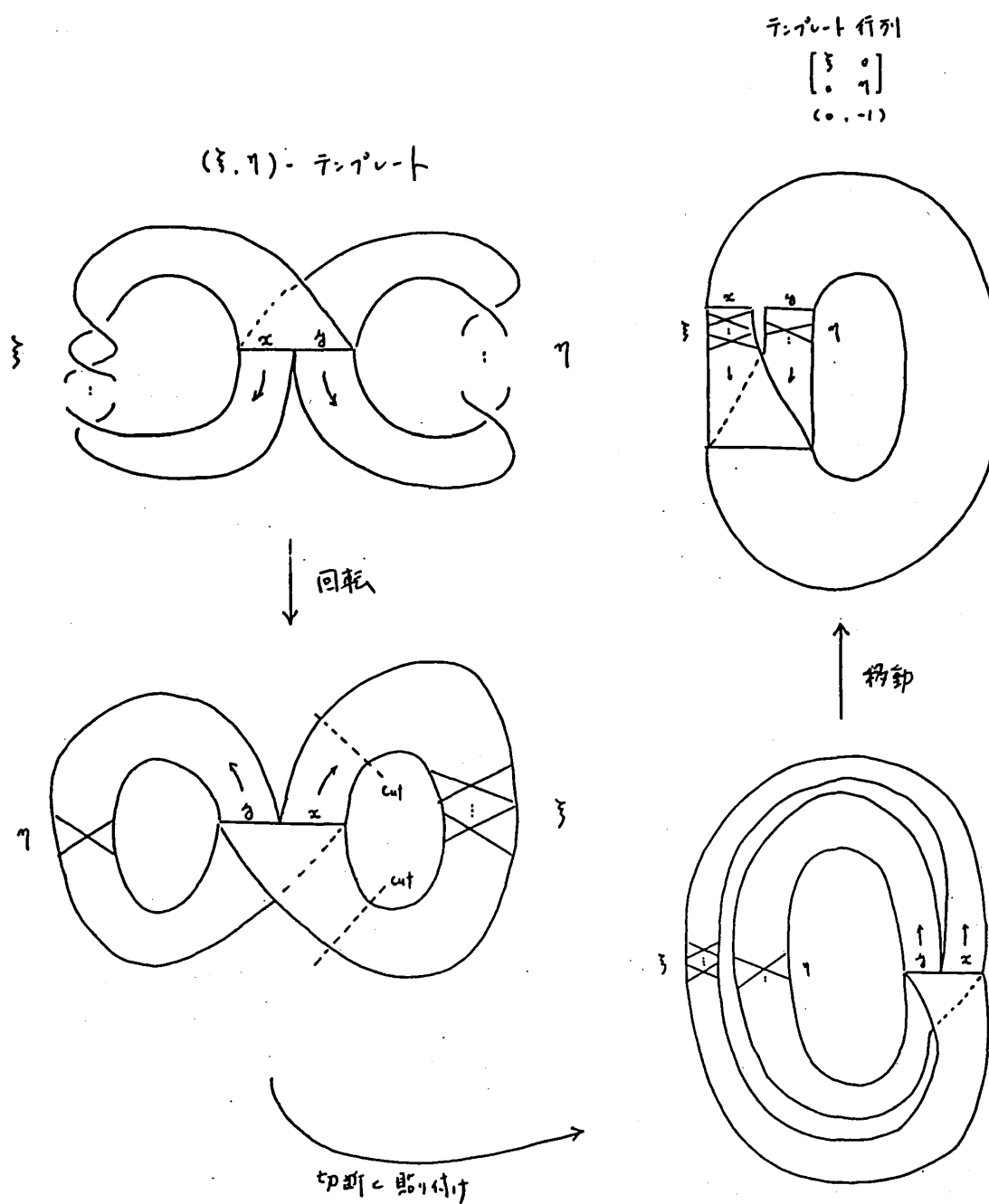


図 8: (ξ, η)-テンプレートとテンプレート行列

倍分岐で性質のよく分かっている、1,2 及び 2,4 周期間のリンク数と $\xi, \eta, l(x, y), m$ の間には、

$$l(xy, y) = l(x, y) + \frac{1}{2}(\eta - m), \quad (17)$$

$$l(xy^3, xy) = 4l(x, y) + \frac{3}{2}(\eta - m) + \frac{\xi}{2}, \quad (18)$$

の公式が成り立つ。

一方、不安定周期軌道がパラメーター変化に対して構造安定であることから、周期倍分岐軌道が不安定化してできた不安定周期軌道は、周期倍分岐軌道のトポロジカルな性質を保ったままカオス領域に残存している事が予想される。そこで、周期倍分岐軌道における $l_{n+1, n}$ の一般公式 (13) より、1,2 及び 2,4 周期間のリンク数が、

$$l_{1,0} = 2c_0 + \eta, \quad (19)$$

$$l_{2,1} = 8c_0 + \xi + 3\eta, \quad (20)$$

であることから、 $l(x, y)$ と m の一般公式は、 $l(xy, y) = l_{1,0}$ と $l(xy^3, xy) = l_{2,1}$ を解いて、

$$l(x, y) = 2c_0 + \frac{\xi}{2}, \quad (21)$$

$$m = \xi - \eta. \quad (22)$$

と導くことができる。つまり、不安定周期軌道群の解析のために新たに必要となった量である $l(x, y)$ と m が、周期倍分岐軌道の情報で書き下せるのである。

なお、式 (21) において ξ は「向きを保つ」ためには偶数でなければならず、 c_0 は整数であるから、 $l(x, y)$ が整数であることと矛盾しない。詳細は省くが、この式は周期倍分岐における倍周期化のプロセスからの要請である。ある文字列で表わされる周期軌道について、テンプレートの x - y 分岐線上での文字の位置関係を、テンプレートの外側から内側へ $\triangleright$ で表わすことにすると、例えば $2 \rightarrow 4$ 周期のとき、2 周期軌道 (xy) がその近傍で分岐し 4 周期軌道 (xy^3) となるというプロセス:

$$xy \rightarrow x^2y^2 \equiv x_1 \triangleright x_2 \triangleright y_1 \triangleright y_2 \implies x'_1 \triangleright y'_1 \triangleright y'_2 \triangleright y'_3 \equiv xy^3, \quad (23)$$

において、 $x_2 \Rightarrow y'_1$ の実現のためには、 ξ と $l(x, y)$ の間にこの関係が要請される。

また、式 (22) において、 m は +1 または -1 のみをとることから、これは $|\xi - \eta| = 1$ であることの証明でもある。

以上のように、周期倍分岐軌道の情報だけでテンプレートは決定できることになる。はたして、カオス領域の 2^n 周期以外の周期を持つ不安定周期軌道も、このテンプレートを満たすだろうか? これらを確認するべく数値実験を行なう。

3 数値実験

3.1 レーザー・モデル

ここで言うレーザー・モデルとは 2 次元の非自励系であり、

$$\dot{u} = -u(\delta \cos \theta - v), \quad (24)$$

$$\dot{v} = -\epsilon_1 v - u - \epsilon_2 v u + 1, \quad (25)$$

$$\dot{\theta} = \omega_f, \quad (26)$$

$p_1 \backslash p_2$	1	2	4	5	6
1	0				
2	1	1			
4	2	5	7		
5	3	6	12	12	
6	3	7	14	16(18?)	16(17?)

表 1: 抽出した各不安定周期軌道間のリンク数 $l(p_1, p_2)$

と表される変調気体レーザー・モデルである [4]. ここで u は発振強度, v は 2 準位分子における上状態分子数と下状態分子数の差である. また, この系は, 外部から強制的に T の周期でハーフ・ミラーの透過率を変動させている ($\omega_f = 2\pi/T$). ϵ_1 と ϵ_2 は減衰定数と呼ばれる十分小さな正の定数であり, 透過率に比例した量 δ を変化させることでこの系の挙動をコントロールする.

解析したストレンジ・アトラクターは, パラメーター値が $\phi = 1.67$ のものである (図 1). このアトラクターのフラクタル次元の実測値は 1.8 次元である.

3.2 不安定周期軌道の抽出と不変量の算出

まず, カオス軌道の時系列データについて「近接再帰プロット (close returns plot)」を作成する. これは, 自励系の時系列データから周期軌道を取り出すために, Lathrop, Kostelich [8] らによって考案されたもので, Mindlin, Gilmore [6],[7] でも利用されている.

時刻 t におけるデータ $x(t)$ に対して, 遅延時間 p だけ後のデータ $x(t+p)$ との差

$$\epsilon \equiv |x(t+p) - x(t)|, \quad (27)$$

が十分に小さいときの (t, p) のプロットである. このプロットにおいて周期を持った時系列データは, プロットの横線のパターンとしてあらわれる (図 9). これを手がかりに不安定周期軌道の近傍にトラップされている軌道の部分列を取り出し, 「見えない」不安定周期軌道の概形を抽出することができる.

この方法により, パラメーター値が $\phi = 1.67$ のカオス軌道から 1, 2, 4, 5, 6 周期の不安定周期軌道を抽出することができた. なおこれは技術的な問題によるものと思われるが, 抽出できた軌道は各周期とも 1 種類だけであった. これらを重ね書きしたものが図 2 である. それらについて, 表 1 に示すとおり, 軌道自身の交差数 (表の対角部分) 及び異なる軌道間のリンク数 (表の非対角部分) を得た.

3.3 テンプレートの決定

まず, 1, 2, 4 周期の不安定周期軌道と周期倍分岐軌道間で成り立つ関係式を利用してテンプレートを求める. 得られたリンク数のうち, まず 1 周期軌道から $c_0 = 0$ が得られる. 1, 2 及び 2, 4 周期軌道間のリンク数から, $l_{1,0} = 1, l_{2,1} = 5$ であるから, $\xi = 2, \eta = 1$ である. よって $l(x, y) = 1, m = 1$ であり, テンプレート行列は,

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (0, 1), \quad (28)$$

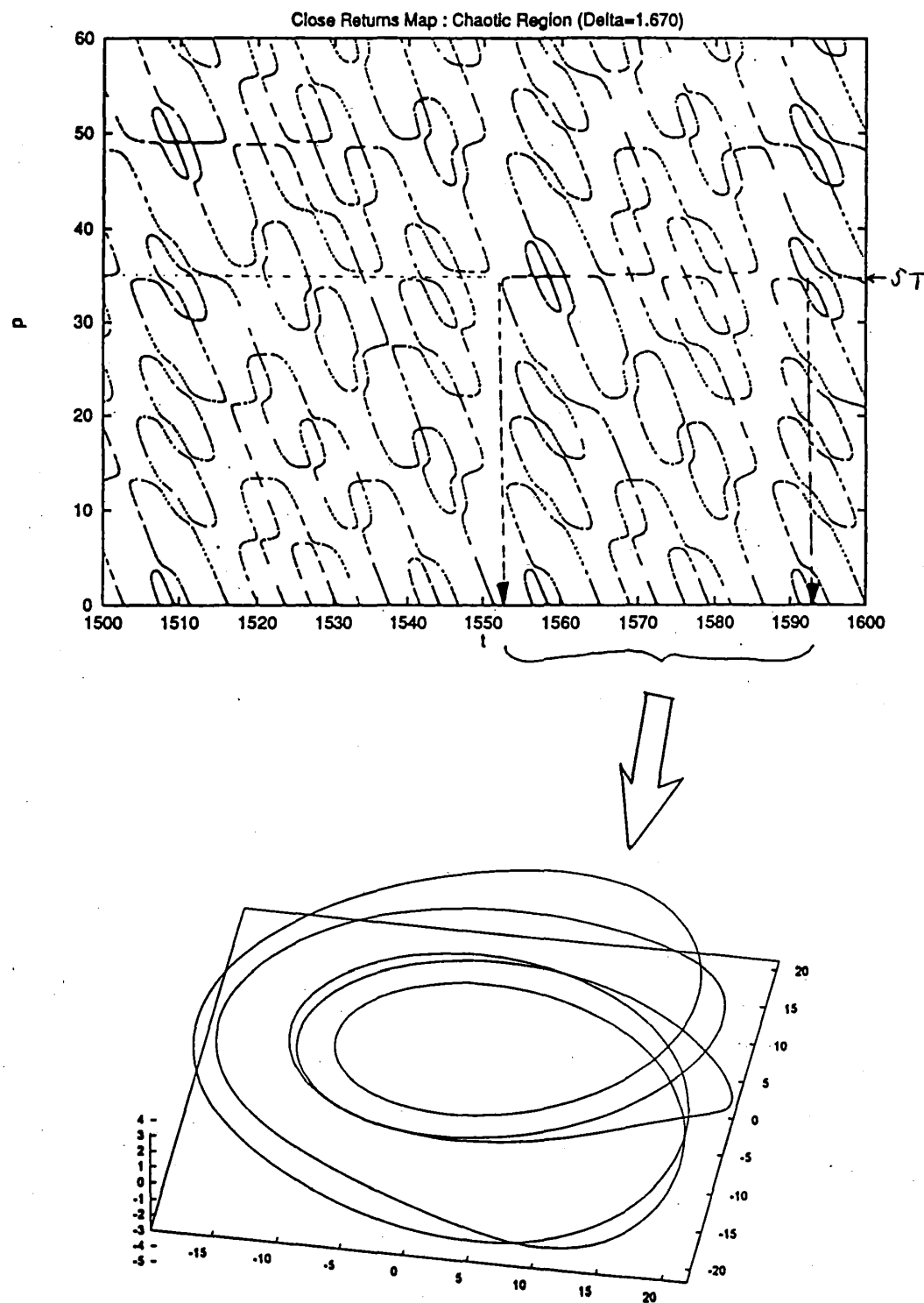


図 9: 近接再帰プロットにより不安定周期軌道を取り出す

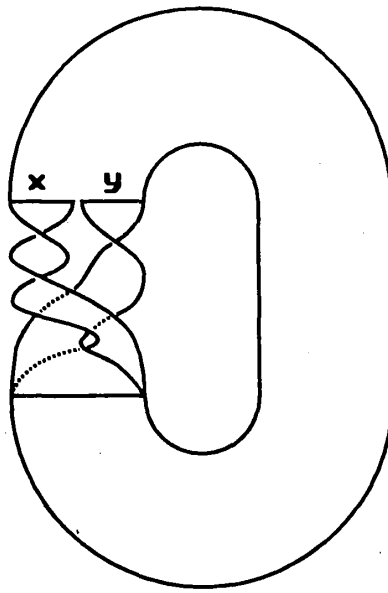


図 10: 抽出した不安定周期軌道の満たすテンプレート

と求められる (図 10).

抽出した全ての不安定周期軌道間について、このテンプレートでリンク数が再現するかをチェックしたところ、表中に「?」つきで示した 2 箇所⁵を除いてうまくいくことが分かった。注目すべきは、周期倍分岐に現れてこない 5, 6 周期についてもこのテンプレートで説明がつくことである。

4 まとめと課題

まとめると、

- カオス領域の不安定周期軌道の特徴づけるテンプレートは、それが発生してきた周期倍分岐軌道の情報で決定できることが期待される。

という結論を得た。

このことは、解析しやすい周期倍分岐軌道の情報から、解析しにくいカオス領域の特徴をつかめることを意味すると同時に、カオス軌道の解析でそれがどの周期倍分岐から発生してきたかをたどれる可能性を示唆するものである。ストレンジ・アトラクターを構成するカオス軌道の振る舞いは「奇妙」だが、それを演出する不安定周期軌道群の幾何学的性質は、周期倍分岐から外挿できるように、少しも「奇妙」ではないといえるようである。

今後の課題は、

- 他のパラメーター領域や他のモデルでの実証を行い、上記結論の正当性を確かめる。

ことである。

⁵括弧内の数字は、決定したテンプレートを用いた場合、6 周期に対応する 9 種類の許される文字列の中で「測定」結果と最も矛盾が少ないものを採用した場合の「予想」である。

カオス軌道のダイナミクスを考える上で、不安定周期軌道はその奇妙な振る舞いの背後にある最も重要な鍵である。ここではその「双曲構造」のみに注目したが、もう1つ、多くの物理的な系が持っている「接構造」を忘れるわけにはいかない。ここで行なった数値実験では一見「双曲構造」の寄与のみでストレンジ・アトラクターの特徴づけができるように見えるが、これは比較的「おとなしい」パラメーター領域であるためかもしれない。「双曲構造」に抛ったこれらの方法論がどこまで適用可能か、また「接構造」をどう特徴づけに取り込むか、まだまだ探索すべきことは山積している。

また、これら不安定周期軌道群のトポロジカルな性質が、フラクタル次元をはじめとする幾つかの統計量とどのような関係があるのかも興味深い。

5 謝辞

森肇先生には、主に不安定軌道とバンド・アトラクターの関係及び「接構造」に関して示唆をいただきました。この場をお借りして御礼申し上げます。

参考文献

- [1] Philip Holmes, Knotted Periodic Orbits in Suspensions of Smale's Horseshoe: Period Multiplying and Cabled Knots, *Physica* **21D** (1986) 7-41.
- [2] T. Motoike, T. Arimitsu and H. Konno, A universality of period doublings – local crossing number *Phys. Lett. A* **182** (1993) 373-380.
- [3] T. Arimitsu and T. Motoike, A Universality of Period Doubling Bifurcations, *Physica D* (1994) in press.
- [4] J. R. Tredicce, F. T. Arecchi, G. P. Puccioni, A. Poggi and W. Gadomski, Dynamic behavior and onset of low-dimensional chaos in a modulated homogeneously broadened single-mode laser: Experiments and theory, *Phys. Rev. A* **34** (1986) 2073-2081.
- [5] G. B. Mindlin, X. J. Hou, H. G. Solari, R. Gilmore and N. B. Tufillaro, Classification of Strange Attractors by Integer, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2350-2353.
- [6] G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore and X. J. Hou, Topological Analysis of Chaotic Time Series Data from the Belousov-Zhabotinskii Reaction, *J. Nonlinear Sci.* Vol 1: pp.147-173 (1991).
- [7] Gabriel B. Mindlin and R. Gilmore, Topological analysis and synthesis of chaotic time series, *Physica D* **58** (1992) 229-242.
- [8] D. P. Lathrop and E. J. Kostelich, Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits, *Phys. Rev. A* **40** (1989) 4028.