

Ⅵ 液体 He^4 の 素 励 起

京大・理 大 見 哲 巨

(8 月 1 日 受 理)

§ 1. Landau Spectrum

1. 変 分 法

よく知られているように Feynman¹⁾ は様々な物理的考察の後、基底状態が与えられた時、励起状態の波動関数が次のようになることを導いた。

$$\rho_{\mathbf{k}} \Phi_0 \quad ; \quad \rho_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i}$$

ここで Φ_0 は $H\Phi_0 = E_0 \Phi_0$ を満足する基底状態の波動関数である。

上の波動関数を用いてエネルギーの期待値を計算すると

$$\frac{\langle \Phi_0 \rho_{\mathbf{k}}^+ H \rho_{\mathbf{k}} \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 \rho_{\mathbf{k}}^+ \rho_{\mathbf{k}} \Phi_0 \rangle} = E_0 + \epsilon_0(\mathbf{k})$$

$$\epsilon_0(\mathbf{k}) = \frac{k^2}{2mS(\mathbf{k})} \quad S(\mathbf{k}) : \text{structure function}$$

と有名な Feynman の spectrum が得られる。この spectrum の与える roton minimum のエネルギーは $\Delta_R = 19.1^\circ\text{K}$ と、例えば最近の実験値²⁾ $\Delta_R = 8.67 \pm 0.04^\circ\text{K}$ と比較すれば、二倍以上大きなものであった。このエネルギー差を小さくしようとして、Feynman - Cohen³⁾ は local current は保存するという考察から dipole type の back flow を取り入れる。この時波動関数は

$$\left\{ \rho_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q} \neq \mathbf{k}} 4\pi A \cdot \frac{\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{q}}}{q^2} \rho_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \right\} \Phi_0$$

A は変分パラメーターである。

この波動関数を用いると、roton minimum は $\Delta_R = 11.5^\circ\text{K}$ まで下げることができる。

2. 摂動法

次に摂動法による Landau spectrum の計算を見てみよう。まず第 0 近は Feynman の spectrum $\epsilon_0(k)$ 波動関数 $\rho_k \Phi_0$ から出発する。したがって摂動のハミルトニアンは $\delta H = H - \epsilon_0(k) - E_0$ である。

摂動の仕方として、Kuper による Rayleigh - Schrödinger 流のやり方と Jackson - Feenberg⁴⁾ による Brillouin - Wigner の方法がある。Jackson - Feenberg によれば Landau spectrum $\epsilon(k)$ は

$$\epsilon(k) = \epsilon_0(k) + \frac{1}{2} \sum_{\ell \neq 0, k} \frac{|\langle k-\ell, \ell | \delta H | k \rangle|^2}{\epsilon_0(k) - \epsilon_0(\ell) - \epsilon_0(k-\ell)}$$

$$|k\rangle = \frac{1}{[S(k)]^{1/2}} \rho_k \Phi_0$$

$$|\ell, k-\ell\rangle = \frac{1}{[S(\ell) S(k-\ell)]^{1/2}} \rho_\ell \rho_{k-\ell} \Phi_0$$

の解として与えられる。ここで、 $\langle k-\ell, \ell | \delta H | k \rangle$ を計算すると三体の分布関数が現われる。これを二体の分布関数により近似する方法に、Kirkwood の Superposition 近似(KSA)と convolution で近似する(CA)仕方がある。この二つの近似を用いて Spectrum を計算すると Spectrum 全体をみるかぎりどちらの近似がすぐれているともいえないが、 $k \rightarrow 0$ の limit でちがいが出る。

$$\lim_{k \rightarrow 0} (\epsilon(k) - \epsilon_0(k)) \propto \begin{cases} k & (\text{KSA}) \\ k^3 & (\text{CA}) \end{cases}$$

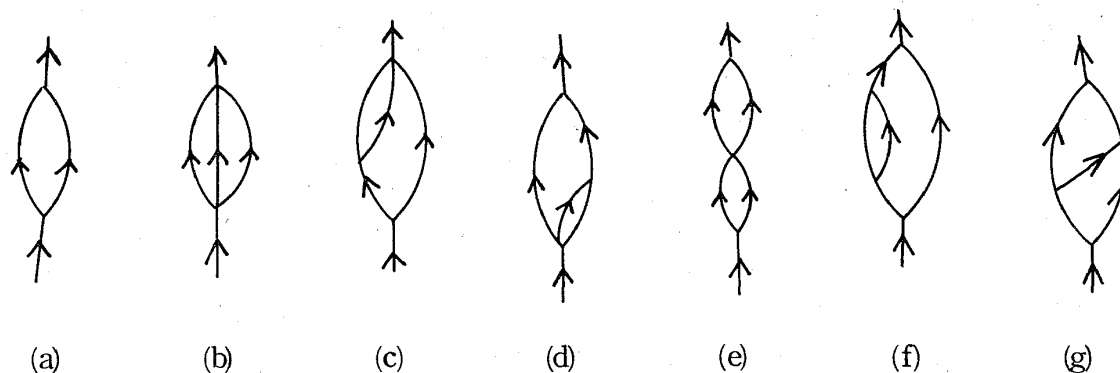
したがって摂動計算の場合は CA の方が consistent であると思われる。

3. その後

その後、Nishiyama 達⁵⁾ による固体電子論で成功した Bohm - Pines の方法を He^+ に用いた計算と density fluctuation に対する canonical conjugate な variable を見付け出し、これらを用いてハミルトニアンを書き直していくという Sunakawa 達⁶⁾ の計算がある。特に後者は摂動計算で、実験と非常によくあう結果を出している。

§ 2. Phonon

最近 Phonon Spectrum すなわち $\epsilon(k) = ck(1 - r k^2 + \dots)$ と書いた時の r に対する議論が盛んである。少し前までは Spectrum の安定性の議論から $r > 0$ と思われていたが、超音波吸収、比熱等の実験を説明するために $r < 0$ でなければならないということが言われ出した。 r に対する理論計算で、完全な first principle から定量的に信用できる計算は、hard core の処理等困難がともなう。そこで、 $S(k)$ が与えられたとして出発する Feynman - Cohen, Jackson - Feenberg の計算の拡張が考えられる。Lai, Sim, Woo⁷⁾ により、 $\epsilon(k) = \epsilon_0(k)(1 + r'k^2 + \dots)$ と書いた時の r の計算が行われた。これは摂動の中間状態として、Jackson - Feenberg の図 a) だけでなく、



(b)……(g)までとって行なわれた。

結果は $\epsilon(k) = \epsilon_0(k) \left(1 - 1.46 \left(\frac{k}{mc} \right)^2 + \dots \right)$ と X ray による最近の $S(k)$ の実験値⁸⁾

$$S(k) = \frac{k}{2mc} \left(1 - 1.42 \left(\frac{k}{mc} \right)^2 + \dots \right)$$

とをあわせると、Cowley - Woods²⁾ の中性子散乱の与える $r = 0 \pm 2 \times 10^{36} \text{ cm}^{-2} \text{ g}^{-2} \text{ sec}^2$ と consistent である。

§ 3. Roton

“What is a roton” ということで Chester⁹⁾ が roton に対する見方を次の三つにまとめている。

大見哲巨

a) Crystalline phonon

固体の phonon のエネルギーが zone boundary で 0 になることのなごりが液体で残っているという見方である。実際、例えば neutron の実験で neutron が He^4 と相互作用をする短かい時間の範囲では、液体 He^4 が local には、固体のようにふるまうというのは自然であると思われる。この方向で最近 Takeno 達¹⁰⁾の理論がある。

b) Small vortex ring

Landau の original idea にあるように液体特有の渦の運動が Spectrum にあらわれると考えるのは魅力ある。また vortex ring から十分離れた所では、流れが dipole flow になるわけでこれもこの考え方に有利である。しかし、この idea を定式化するのは難しそうである。

c) dressed single particle

a) が固体からの近似とすれば、これは gas からの近似である。Feynman, Cohen の波動関数

$$\Psi = \left[\sum e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \left(1 + \sum i\mathbf{g}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) \right] \Phi_0$$

で $\mathbf{k}$ が roton momentum と十分大きいことに注意すると Bose 統計の効果は小さいと考えられる。したがって、対称化の操作を落とした

$$\Psi \simeq e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \left(1 + \sum i\mathbf{g}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) \Phi_0$$

が十分よい波動関数とみなせる。実際この二つの波動関数を用いて、エネルギーを計算すると roton minimum のところでエネルギー差は 10% 程度である。

以上三つの見方をある程度統一的に取り入れたのが、Feynman の理論であると思われるが、その後この方向への進歩はあまりない。最近中性子散乱¹¹⁾による roton spectrum の圧力変化の測定がある。参考文献としてあげておく。

§ 4. Two branch

Cowley - Woods²⁾の実験以後最近 two branch 議論が盛んである。Soda 達¹²⁾の Sum-rule を使った議論があるが、その他の話しは結局第 1 近似としてある適当な準粒子をとり、次にこの準粒子が二個ある状態までを考えて、それらの間の相互作用の効果を取り入れていく、といった計算である。例えば、Iwamoto¹³⁾の計算は第 1 近似の準粒子とそれらの間の相互作用を first principle から求める。次に、相互作用を

separable と仮定して Tamm - Dancoff 近似をとる。相互作用の特徴的な性質を使えば, two branch の構造について, gross なことはきめることができる。一方 Ruvalds, Zawadowski¹⁴⁾ の論文では, 第1近似の準粒子を Feynman - Cohenの準粒子とし, これと true roton との coupling を考える。Ruvalds 達は, Green 関数を用いた計算であるが, 第1近似の準粒子のとり方と coupling の強さを constant においていることをのぞけば, 解くべき固有値方程式は, Iwamoto の場合とまったく同じである。この固有値方程式で注意すべきことは, Raman 散乱の実験で有名な $2\Delta_R$ の下にあらわれる bind state が, 第一近似の準粒子のエネルギーが, $2\Delta_R$ に下から近づくとつれて, 連続スペクトルの中に入ってしまうことである。Ruvalds 達¹⁵⁾ は彼等の議論をさらに進めて, 固体液体の相転移にあたるという instability について論じている。

reference

- 1) R.P. Feynman ; Phys. Rev. **94** (1954) 21.
- 2) R. Cowley and A.D.B. Woods ; Can. J. Phys. **49** (1970) 177.
- 3) R.P. Feynman and M. Cohen ; Phys. Rev. **102** (1956) 1189.
- 4) H.W. Jackson and E. Feenberg ; Rev. Mod. Phys. **34** (1962) 686.
- 5) T. Nishiyama ; Progr. Theor. Phys. **38** (1967) 1062.
- 6) S. Sunakawa, S. Yamasaki and T. Kebukawa ; Progr. Theor. Phys. **41** (1969) 919.
- 7) H.W. Lai, H.K. Sim and C.W. Woo ; Phys. Rev. **A1** (1970) 1536.
- 8) R.B. Hallock ; Phys. Rev. **A5** (1972) 320.
- 9) V.G. Chester ; Lectures in Theoretical Phys. X 1-B (Gordon and Breach, 1968) P.253.
- 10) S. Takeno and M. Goda (to be published)
- 11) O.W. Dietrich, C.H. Graf, C.H. Huang and L. Passell ; Phys. Rev. **A5** (1972) 1377.
- 12) T. Soda, K. Sawada and T. Nagata ; Progr. Theor. Phys. **44** (1970) 860.
- 13) F. Iwamoto ; Progr. Theor. Phys. **44** (1970) 1121.
- 14) A. Zawadowski, J. Ruvalds and J. Solano ; Phys. Rev. **A5** (1972) 399.
- 15) V. Celli and J. Ruvalds ; Phys. Rev. Letters **28** (1972) 539.