

2水準4入型直交表における交互作用の問題

竹 内 裕

2水準多因子の直交表には、ふつうに用いられている 2^n 型のもの以外に、Hadamard 行列によって与えられる $(4\lambda, 4\lambda-1)$ 型のものがあることはよく知られている。(Plackett-Burman 他).

しかし 4λ 型のものは 2^n 型のものに似てゐるが、実際に用いられていることが少ないと思われる。その理由の一つは、このよう T 型の直交表においては、交互作用の交絡関係が明らかでないといふ点にあると思われる。そこでいくつもの問題を挙げる。

1° 4λ 型の直交表について、交互作用の構造を明らかにすること。

2° 交互作用に用いて、何らかの意味で望ましく配列を定めること。

この2つの問題については、これまであまり知られていないものである。以下各のついては三つの案について簡単に述べたい。

まず1°について。

定理1. λ が奇数ならば 4λ 行からなる直交表の任意の2列

の交互作用は、他の二カ所3列とも直交している。

証明 a, b, c の3列をとって考える

a	b	c	行の数	a	b	c	行の数
+	+	+	m 行	-	-	+	m
+	+	-	$\lambda - m$	-	+	-	m
+	-	+	$\lambda - m$	+	-	-	m
-	+	+	$\lambda - m$	-	-	-	$\lambda - m$

上記の4行の各行の数を考えると、直交表であることが、
 $+++$ の行の数を m とすると、上のようになり、従って例
 えば $a \times b$ と c との積和を作ると、結局 $a \times b \times c$ の和は m
 2, $4m - 4(\lambda - m) = 4(2m - \lambda)$ となり、 λ が奇数なら
 はこれは0になりたう。

(Q. E. D.)

しかしながら、ある種の直交表においては、交互作用と主
 効果との交絡の構造は、少なくとも一部は比較的簡単な構造を
 持っている。

例えば Plackett-Burman の12行11列の直交表において
 (1) 列 $\times$ (2) 列と各列との積和を計算すると次のようになっ
 ていくことが確かめられる。

0 0 4 4 4 -4 4 4 -4 -4 4

従って (1) 列, (2) 列に割りつけられた因子の主効果, 交

相互作用と (3)列以下に割りつけられた因子の主効果 (必要な場合には符号を変えて) について正規方程式を作ると、その係数行列は次のようになる

(1)	(2)	(1)X(2)	(3)	(4)	---
12	0	0	0	0	---
0	12	0	0	0	---
0	0	12	4	4	---
0	0	4	12	4	---
0	0	4	4	12	---
---	---	---	---	---	---

従って、その逆行列は

$1/12$	0	0	0	0	---
0	$1/12$	0	0	0	---
0	0	$\frac{3}{4(9-k)}$	$-\frac{1}{4(9-k)}$	$-\frac{1}{4(9-k)}$	---
0	0	$-\frac{1}{4(9-k)}$	$\frac{10-k}{12(9-k)}$	$\frac{1}{12(9-k)}$	---
0	0	$-\frac{1}{4(9-k)}$	$\frac{1}{12(9-k)}$	$\frac{10-k}{12(9-k)}$	---
---	---	---	---	---	---

従って、(3)列以下の主効果について推定の相対効率

$(9-k)/(10-k)$ となる。よって、 $k \leq 5$ 程度、すなわち 7 個程度の因子について主効果を考え、かつそのうちの 2 個の因

子のみの交互作用が問題とされ、それ以外の交互作用は全く無視してよいならば、このように直交表を用いることによって、かなり初歩のよい実験ができることとなる。

しかしこの場合でも、2つ以上の交互作用を問題にすると、その交絡の構造は極めて複雑になる。

ところで Plackett-Burman の表について、2因子交互作用の主効果との積和がすべて ± 4 になるのは、隣り合う2列の交互作用に因してであるが、他のすべての列についてそうなっているとはいえない。また他の、より行の数の多い表については、隣り合う列についても、このことは成り立つとは限らないようである。

次に 4λ 行 $4\lambda-1$ 列の直交表 A が与えられた場合、これを次のように形に拡張して作られる 8λ 行 $8\lambda-1$ 列の表については、次のような性質がある。

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \\ \vdots & A & A \\ 1 & & \\ -1 & & \\ \vdots & -A & A \\ -1 & & \end{array}$$

すなわち、最初の 4λ 列については、どのような任意の3列

の積はすべて0になる。すなわちこの3列に割りつけられた因子については、2因子交互作用と主効果は直交している。従って、41個以下の因子を最初の4λ列の中に割りつければ、主効果はすべて2因子交互作用と交絡することなく推定される。従って2因子交互作用の存在が疑われ、しかもその値とその他の推定は必要としないような場合には、このように配置は有効に用いることができるであろう。しかもこのように配列は最通のものとすることができ、すなわち

定理2 8λ行m列の直交表において、任意の2列の交互作用が他の主効果とすべて直交するならば、 $m \leq 4\lambda$ である。

証明 (1) (2) ... (m) 列に (1) × (2), (1) × (3) ... (1) × (m) 列をつかいて 2m-1 列を作ると、これらの各列は定理の条件の下ではすべて直交する。従って $2m-1 \leq 8\lambda-1$, $m \leq 4\lambda$.

(Q. E. D.)

この場合、更に3つの因子の交互作用 (1) × (2), (2) × (3), (3) × (1) とすると、これらけ互いに直交している。従ってもしこのように交互作用のみが存在し、他の交互作用は無視してよいとすれば、すべての作用は互いに直交することになる。

またここで特に第1列については、それと他の列との交互作用はすべて互に直交するのみならず、他の2列の交互作用との内積を簡単に表現できる場合が多い。従って特定の因子

との間の交互作用以外はずべて無視できる場合、あるいはこれ以外に1つの交互作用のみが問題になる場合には、このように配列は有効に利用される。

従って例えば、12行11列の表を拡張した24行23列の表の左半分を用いることにより、12個までの因子の主効果と交互作用と交絡せずに推定でき、また考えられる効果以外の交互作用はずべて存在しないとするれば、12個までの因子の主効果と $A \times B$, $B \times C$, $C \times A$ といくつかの交互作用が、或いは $A \times B$, $A \times C$, $A \times D$... といくつかの交互作用をすべて推定することもできる。また必ずしも直交しなくてよいとするれば、このほかにも1つの交互作用例えば $B \times C$ を推定することも容易である。

更にこの表の右半分については、その2因子交互作用は左半分9列の主効果とは直交する。従ってその中から2つの列と之とんで2つの因子と割りつければ、その主効果、交互作用とその他すべての主効果と直交することになる。更にその主効果は第1列と左半分9列の対応する列以外の列との交互作用とも直交している。

この考え方を拡張して、 $4\lambda \times (4\lambda - 1)$ の直交表 A から次のようにして $16\lambda \times (16\lambda - 1)$ の直交表を作る。 A の左にすべて $+1$ をつけ加えたものを $\tilde{A}$ と表わして、
 $\underbrace{\text{かゝる列}}_{\text{を}} \tilde{A}$

$$\begin{array}{cccc}
\tilde{A} & \tilde{A} & \tilde{A} & A \\
\tilde{A} & -\tilde{A} & -\tilde{A} & A \\
-\tilde{A} & \tilde{A} & -\tilde{A} & A \\
-\tilde{A} & -\tilde{A} & \tilde{A} & A
\end{array}$$

以上より、各4λ 列からなる最初の3組の列については、
 異なる3組から1列ずつとった場合以外の3列の積和はすべて
 0になる。また最初の3つの組のうち異なる2組の、よって
 2列と最後の4λ-1列のうち任意の1列との積和、或いは
 最後の組の中の2列とそれ以外の組の列との積和は0になる。
 このことから、主効果と交互作用の直交3組と示せること
 ができる。また若干の4列の積和、例えば最初の3組の列の
 うち1組から3列、他の組から1列、或いは1組から2列
 他の2組から1列ずつとったものは0になる。従っていくつ
 かの2因子交互作用相互、或いは主効果と3因子交互作用は
 直交している。

従って例えば、3組の因子があり、それぞれの組の因子の
 数が4λ以下、2因子交互作用について、それぞれ組の同じ
 組に属する因子間では存在が疑われない。異なる組の因子
 については、それと無視してよいことがわかっているとき、
 この3組の因子を上記の表の最初の3組の列に割り当てるこ
 とによって有効な実験を行うことが可能になる。

次にすべての2因子交互作用が交絡してゐないような配列を考へよう。

定理3. 任意の4列以下の積和がすべて0になるような直交表は強さ4の直交表になる。すなわち任意の4列について、すべての可能な符号の組合せ $2^4 = 16$ 通りの同じ回数ずつ現われているなければならない。

証明は定理1と全く同様にして場合の数と数え上げればよい。

ところで、 $16 \times \lambda$ 行 m 列の強さ4の直交表が与えられたとすると、これより $m + mC_2 = m(m+1)/2$ 列の直交表が得られるから、従つて $m(m+1)/2 \leq 16\lambda - 1$ である。
 $\lambda = 1, 2, 3, 4, \dots$ のとき $m \leq 5, 7, 9, 10, \dots$ となる。
 $\lambda = 1, 2, 4, \dots$ のときには、 2^4 型の直交表に帰着する。この場合でも、現実にはこの限界までの大きさの配列が得られるとけ限らない。

例えば $\lambda = 1$ のときは 2^4 型の直交表から (a) (b) (c) (d) $(a \times b \times c \times d)$ の5列をえとれば 16×5 の強さ4の直交表が得られる。

しかし $\lambda = 2$ のときは 2^5 型の直交表から 32×7 の強さ4の直交表を得ることはできない。なぜならば、もしこの大きさのものが得られたとすると、適当な変換によつて $(a^2) = (b^2) = \dots = 1$ と用いて) という5列の (a) (b) (c) (d) (e) である。

ることである。しかしそうとき残りの方列は少くとも
 4つの文字の積となるといえなければならない。しかし4つ
 以上の文字の積となる方列をつくるとき、それらの交互作
 用は必ず、いくつかの文字の積と交互してし
 まうからである。2ⁿ型について可能な型の表は奥野忠一氏が
 計算しておられる。

2ⁿ型以外の場合、例えば $n=3$ のとき48行5列の積さ
 の表が作られることは容易に確かめられるが6列以上の表が
 作ることができようか？この問題についてはまだわ
 かっていない。

2ⁿの問題について、上記にのべた配列以外にも何らかの
 意味で望ましさを持った配列が得られるであろうか。これに
 ついて新しい表を作る試みはまだなされていないようである
 が、上にのべたような表から、ある種の性質を持った表を導
 き出すことは可能である。すなわち交互作用を表わす列を
 ふくんだ直交表と書き表わすことができる。

例えば24行からなる直交表について、先にのべたように
 12×11 の直交表から作りおきるとすれば、その各列は、

(1), (2), ..., (12), (1)×(2), (1)×(3), ..., (1)×(12)

となる。

或いは、この右半分を除いて、その代りに

(1), (2), (3), (12), (13), (23), (123)

という形の構造を持つ15列等を得られる。

この場合には、これはパーファクトの限界に達している。というの

は、また (12), (34) という2つの交互作用が互いに直

交するとして、(12) × (34) の積和が0となるわけだ。

す、従って逆理法と同様に考えて、行の数が16の倍数になる

わけになることが示されるからである。

40行からなる直交表についても、付け同様のことになる。

一般的にいつて行の数が 2^n 型であるときには、交互作用の
数から効率のよい配置はあまり得られないようである。しか
し、この分析は必要であろう。