

Szegő kernel and a global invariant of CR manifolds

大阪大・理 平地健吾

本文では、Szegő 核と強擬凸領域の双正則不変量の関係を考察する。Bergman 核については、Fefferman [F1, 2], Graham [G], Boutet de Monvel [B1, 2] 等において詳しく研究されている。そして、それらの多くは、Szegő 核に対しても適用できる。ここでは、Bergman 核の analogy としてえられる結果だけでなく、Szegő 核独自の性質も調べる。その結果 Szegő 核から領域の（さらに CR 多様体の）大域的な不変量（の候補）が定義できることを示す。今、“の候補”と書く理由は §4 において説明する。

この研究は、Fefferman [F2] において提案された program に沿っている。まず、その説明をしながら、強擬凸領域の幾何（CR 多様体の幾何）、そして Bergman 核、Szegő 核の基本的な性質を複習する。

1. Fefferman の Program (cf. [F2], [B-F-G])

n 次元 Riemann 多様体 (M, g) 上での熱方程式の基本解

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x) H_t(x, y) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} H_t(x, y) = \delta_y(x) \end{cases}$$

は、 $t \rightarrow 0$ のとき、次の漸近展開をもつ。

$$(1.1) \quad H_t(x, x) \sim \text{const} \sum_{h=0}^{\infty} \phi_{-\frac{n}{2}+h}(x) t^{-\frac{n}{2}+h}.$$

ここに現われる係数 $\phi_j(x)$ を計算するには、Weyl, Gilkey による不変式論を用いることができる。これにより、 ϕ_j を、

Levi-Civita 接続の曲率の Weyl 不変式で書くことができる。

熱核の analogy として、Bergman 核および Szegő 核の解析を行なおうとするのが Fefferman の Program である。 $\mathbb{C}^n$ 内の有界領域 Ω に対して、その Bergman 核は、 $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \cap \{\Omega \text{ 上の正則関数}\}$ 直交射影子の核函数として定義される。従って L^2 -正則関数 f に対しては、 $\int_{\Omega} B(z, \bar{w}) f(w) dV_w$

$$f(z) = \int_{\Omega} B(z, \bar{w}) f(w) dV_w \quad \forall z \in \Omega$$

が成り立つ。Szegő 核は、境界 $\partial\Omega$ (今、 $\partial\Omega$ は C^∞ 多様体になっているとする) 上の Volume ds を一つ与えるとき、

$L^2(\partial\Omega, ds) \rightarrow L^2(\partial\Omega, ds) \cap \{\Omega \text{ 上の正則関数の } L^2 \text{ 境界値}\}$ 直交射影の核函数として定義する。

領域が強擬凸であり、滑らかな定義関数 r , $\Omega = \{r > 0\}$ をもつときには、 $B(z, \bar{z})$ および $S(z, \bar{z})$ の境界での漸近展開は、

$$(1.2) \quad \begin{aligned} B &= \tilde{\varphi} r^{-n-1} + \tilde{\varphi} r \log r, \quad \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} \in C^\infty(\bar{\Omega}), \\ S &= \varphi r^{-n} + \varphi r \log r, \quad \varphi, \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

という型をしている。また $\tilde{\varphi}|_{\partial\Omega} \neq 0$, $\varphi|_{\partial\Omega} \neq 0$ である。今微分同相、 $\{z \in \mathbb{C}^n \mid 0 \leq r(z) < \varepsilon\} \cong \{(\alpha, r); \alpha \in \partial\Omega, 0 \leq r < \varepsilon\}$ を一つ固定し、核函数を $\partial\Omega \times [0, \varepsilon)$ 上の函数と見るとき、(1.2) は (Szegő 核について書く)

$$(1.3) \quad S(x, r) \sim \sum_{h=0}^n \varphi_h(x) r^{-h} + \sum_{h=0}^{\infty} \varphi_h(x) r^h \log r$$

と書ける。Bergman 核の展開に現われる係数は、不変式論を用いて、(そのいくつかは) 決定することができる。ここで、Levi-Civita 接続に対応するのは、Chern-Moser invariant であり、その Weyl invariant を用いて、 $\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}$ を、あるところまで具体的に表示することができる。

Szegő 核を考えるときには、問題は少し難しくなる。それは、Szegő 核の定義には Volume でのとり方が関係しているからである。Fefferman [F2] は Monge-Ampère 作用素を用いて、Volume を、うまくとり (Szegő 核が Bergman 核と同様な変換則をもつようにし) Bergman 核の展開の表示に用いた不変式論が、Szegő 核にも適用できることを示している。

2. 大域的な不変量.

我々は、Volumeのとり方を指定するのではなく、そのとり方によらない Szegő核の性質をとり出すことを考える。

もう一度、熱核の場合にもどって説明しよう。漸近展開 (1.1) を M 上で積分すれば

$$(2.1) \quad \text{trace } e^{-t\Delta} \sim C_n \sum_{h=0}^{\infty} t^{-\frac{n}{2}+h} \int_M \phi_{-\frac{n}{2}+h} d\text{vol}$$

をえる。とくに n が偶数であれば、Gauss-Bonnet の定理 (このとき、熱核は、微分型式の上に作用すると思う)

$$(2.2) \quad \chi(M) = C_n \int_M \phi_0(x) d\text{vol}$$

がえられる。ここで、右辺内の ϕ_0 は計量 g のとり方によってきまる函数であるが、その (同じ計量 g による) 積分の値は、計量のとり方によらない、位相的な量、オイラー数である。

Szegő核についても同様な積分を考えてみる。

$$(2.3) \quad \int_{\partial\Omega} S(z, r) d\sigma(z) \sim \sum_{h=0}^n \int \varphi_{-h} d\sigma \cdot r^{\frac{n}{2}-h} + \sum_{h=0}^{\infty} \int \varphi_h d\sigma \cdot r^h \log r$$

(2.1) において t^0 の係数を取り出したのと同様に、今度は、 $r^0 \log r$ の係数

$$(2.4) \quad \int_{\partial\Omega} \varphi_0 d\sigma$$

これが、領域 Ω の大域的な不変量を与えることが予想される。
 熱核の場合には、DeRham complex の index として (2.2) が
 えられたが、Szegő 核については、そのような対応は知られ
 ていない。しかし、次が成り立つ。

定理 積分値 (1.7) は、境界 $\partial\Omega$ 上の Volume $d\sigma$ のとり
方によらない。従って、領域 Ω の双正則不変量になる。

すなわち、Volume $d\sigma$ を一つ与え、Szegő 核を定義し、
 その展開の係数 c_j をとり出し、それを、同じ Volume $d\sigma$ で
 積分すると、その値は、最初を与える Volume のとり方によら
 ないのである。

3. 定理の証明の idea.

まず、形式的な計算を行う。領域の境界は、実解析的で
 あり、 $r(z, \bar{z}) = 0$ で定義されているとする。このとき、
 正則関数 f に対して Szegő 核の再生性は、

$$f(z) = \int_{\partial\Omega} S(z, \bar{w}) f(w) d\sigma(w)$$

と書ける。境界での積分は、 δ -関数を用いて表わせば、

$$= \int S(z, \bar{w}) \delta(r(w, \bar{w})) f(w) |dw|^2$$

w と $\bar{w}$ を独立変数と見て、積分順序をかえれば、

$$f(z) = \int \left[\int S(z, \zeta) \delta(r(w, \zeta)) d\zeta \right] f(w) dw$$

これが、各正則函数 f について成り立つので、

$$(3.1) \quad \int S(z, \zeta) \delta(r(w, \zeta)) d\zeta = \delta(z-w).$$

ここで、定義函数 r のとり方が、volume $d\sigma$ のとり方に対応していることに注意しよう。

今、定義函数 r_t がパラメータ t に依存して変化するとする。 $\delta(r_t)$ によってきまる volume により定義される Szegő 核を、 S_t で書くことにする。このとき、(3.1) を t について微分すると、

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial t} S_t(z, \zeta) \delta(r_t(w, \zeta)) + S_t(z, \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \delta(r_t(w, \zeta)) \right] d\zeta = 0$$

をえらる。 $\frac{\partial}{\partial t} \delta(r_t(w, \zeta)) = R(t, \zeta, \partial_\zeta) \delta(r_t(w, \zeta))$ を満たすミクロ微分作用素 R をとると、(cf. [k]) 部分積分により

$$\int \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - R^*(t, \zeta, \partial_\zeta) \right) S_t(z, \zeta) \right] \cdot \delta(r_t(w, \zeta)) d\zeta = 0.$$

ここで R^* は R の adjoint である。従って Szegő 核は、

$$(3.2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - R^*(t, \zeta, \partial_\zeta) \right) S_t(z, \zeta) = 0.$$

をみたす。

(1.3) において、Szegő 核および、その展開の係数が、

すべて、パラメータ t に依存して動くとするとき、(1.3) を t で微分し、 t で積分し、(3.2) を用いれば、左辺は、 $r^0 \log t$ の項をもたないことが示される。(展開に用いる定義関数は、 t によらないように一つ固定しておく。) したがって、右辺の $r^0 \log t$ の係数

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial \Omega} (\varphi_t)_0 d\sigma_t = 0$$

が示される。任意の2つの volume は直線でつなぐことができるので、すべての volume に対して、(2.4) が同じ値をとることがわかる。

以上の計算は、すべての式を micro-local に考えることにより正当化できる。するわけ、境界をこえて解析接続できる正則関数を modulo として考える。このとき、たとえば、Szegő 核は正則マイクロ関数とみなされる。(cf, 柏原 [K], 金子 [Kan]).

今まで、境界の実解析性を仮定したが、一般の領域も、そのような領域で、近似することにより、定理が証明される。

4. 定理で与えられた不変量は trivial ではないのか?

$\mathbb{C}^2$ 内の領域については、(2.4) の値は 0 になることが示される。それは次の表示を見ればわかる。(これは、不変式論を用いて証明される。)

$$(4.1) \quad \varphi_0 = \text{const} (\Delta_b R - 2 \text{Im } A_{11, \pi})$$

ここで $\text{const} \neq 0$, R , $A_{11, \pi}$ はおのこの、volume $d\sigma$ (あるいは $d\sigma = \theta \wedge d\theta$ となる contact form θ) によつてきまる. CR-bundle $T^{1,0}$ 上の 田中-Webster 接続 (see [W]) の曲率 および、Torsion の共変微分である. (4.1) を積分すれば、Stokes の定理により $\int_{\partial\Omega} \varphi_0 d\sigma = 0$ が示される。

実は、 $\varphi_0|_{\partial\Omega} = 0$ となるように volume を選ぶことが可能である。

$$(4.2) \quad d\sigma = \left(\det \begin{pmatrix} r & \partial r / \partial z_j \\ \partial r / \partial \bar{z}_k & \partial^2 r / \partial \bar{z}_j \partial z_k \end{pmatrix} \right)^{-\frac{2}{3}} \text{Re}(\partial r \wedge \bar{\partial} \bar{r})|_{\partial\Omega}$$

とすればよい. これは Fefferman [F2] によつて与えられたもので、Graham [G] の不変式論を用いれば、 $\varphi_0 = 0$ が示される. これは、 $\mathbb{C}^2$ 内の領域が、境界上の各点において、球面の双正則写像の像により、5次まで近似できるという事実に関係している。球においては、Szegő核は対数項をもたない、そして、 $\mathbb{C}^2$ 内の強擬凸領域の境界は球面 で近似できる 十分に ので、 φ_0 は 0 になるのである。

$n \geq 3$ のときには、領域の境界は一般には、球面によつて3次までしか近似できない。従つてここでは、(4.2) のようなよい volume をえらんでも一般には $\varphi_0 = 0$ になるとは限らない。とくに $\mathbb{C}^3$ の場合には具体的な計算ができてい

る。 $\Omega \subset \mathbb{C}^3$ は 0 を境界に含み、その近傍において、Moser's normal form [C-M]

$$u > |z|^2 + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \geq 2 \\ \gamma \geq 0}} A_{\alpha\beta}^\gamma z^\alpha \bar{z}^\beta v^\gamma,$$

ここで $z = (z_1, z_2)$, $w = u + iv$, で表わされているとしよう。このとき、Szegő核 ([F2] p259 で与えられる volume によって定義されたもの) の対数項の原点での値は、

$$\begin{aligned} \varphi_0|_{(z,w)=(0,0,0)} &= \text{const} \left[2 \sum_{i,j,k,l,m=1}^2 |A_{ijk}^0 \bar{z} \bar{m}|^2 \right. \\ &\quad - \frac{3}{2} \sum_{i,j,k,l,m=1}^2 A_{ijk} \bar{z} \bar{l} A_{mkl} \bar{m} \bar{j} \bar{k} \\ &\quad \left. + 3 \sum_{i,j,k,l,m=1}^2 A_{ijk} \bar{z} \bar{l} A_{mkl} \bar{m} \bar{i} \bar{j} \right] \end{aligned}$$

$\text{const} \neq 0$ である。 $A_{p,q}^\gamma = \{ A_{\alpha\beta}^\gamma \}_{|\alpha|=p, |\beta|=q}$ は

symmetric tensor と思い、計量 δ_{ij} で trace, norm を定義するとき、(cf. [C-M]) 上式は

$$2 \|A_{3\bar{2}}^0\|^2 - \frac{3}{2} \|\text{trace } A_{3\bar{2}}^0\|^2 - 9 \text{trace}^5 (A_{2\bar{2}}^0 \otimes A_{3\bar{3}}^0)$$

と書ける。この式により、一点ごとの値はわかるが、それを各点で行い積分するのは容易ではない。今のところ、homogeneous な CR 多様体について、計算を行ったが、その場合に

は、 $\varphi_0 = 0$ になってしまい、(2.4) は 0 になる。 φ_0 の表示からわかるように、ほとんどの領域において 0 にならないはずであり、その積分が計算できる例をまた知らない。

筆者は、この積分が trivial でないと思っている。(もちろん 0 になるのであれば、なぜそうなるのか、興味のある問題である。)

References

- [B-F-G] Beals, M., Fefferman, C. and Grossman, R., *Strictly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$* , Bull. A.M.S. **8** (1983), 125–322.
- [B1] Boutet de Monvel, L., *Complément sur le noyau de Bergman*, Séminaire équations aux dérivées partielles 1985-86, Ecole Polytech. Paris.
- [B2] Boutet de Monvel, L., *Le noyau de Bergman en dimension 2*, Séminaire équations aux dérivées partielles 1987-88, Ecole Polytech. partielles.
- [C-M] Chern, S. S. and Moser, J., *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), 219–271.
- [F1] Fefferman, C., *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. **26** (1974), 1–65.
- [F2] Fefferman, C., *Parabolic invariant theory in complex analysis*, Adv. in Math. **31** (1979), 131–262.
- [G] Graham, C. R., *Scalar boundary invariants and the Bergman kernel*, in Complex analysis II, Lecture Notes in Math. 1276, Springer, 1987, pp.108-135.
- [Kan] Kaneko, A., *Introduction to Kashiwara's microlocal analysis for the Bergman kernel*, Lecture Notes in Math., Korea Advanced Institute of Science and Technology (1989).
- [K] Kashiwara, M., *Analyse micro-locale du noyau de Bergman*, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77, Ecole Polytech. Paris.
- [W] Webster, S. M., *Pseudo-hermitian structures on a real hypersurface*, J. Differential Geom. **13** (1978), 25–41.