数理解析研究所講究録
219巻 1974年 50-59

50

穴を開けた球面のアイソトピー群について

東教大 理　金戸武司

§1 序

多様体Mの自己同相群 $H(M)$ のアイソトピー類のなす群 $I(M)$ について annulus theorem は基本的な役割をなす。Kirby [5]は 4-次元を除き成立することを示した。このことから、$I(S^n) \approx \mathbb{Z}_2$ $(n \neq 4)$ になる。又 Gluck [3]は、$I(S^2 \times S^1) \approx \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ を示した。この報告では、n-次元球面 S^n から k 個の n-球を除いた多様体 S^n_k について、$n=2$ かつ $k \leq 3$, $n=3$, $n \geq 6$ ならば、$I(S^n_k) \approx P_k \times \mathbb{Z}_2$ (P_k は k 次対称群) となることを示す。

§2. 定義と準備.

R^n を n 次元ユークリッド空間、$B^n = \{(x_i) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ を標準 n-球、$S^{n-1} = \{(x_i) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ を標準 $(n-1)$-球面とする。それぞれに同相なものを、単に、n-球、$(n-1)$-球面という。

定義: S^n つ S^{n-1} $(n-1)$-球面が任意の $x \in S^{n-1}$ に対し、

S^nでの近傍Uが存在し，$(U, U\cap \hat{S}^{n-1})$と(R^n, R^{n-1})が対同相をなすとき，局所平坦という。S^nつD^n：n-球がその境界で局所平坦のとき，局所平坦という。

記号：　S^nつD_i^n $(i=1,2,\cdots k)$を局所平坦な相交わらないn-球とする。$S^n - \bigcup_{i=1}^{k} D_i^n$の閉包を$S_k^n$で表わす。

注1：$n\geq 1$ $(n\neq 4)$のとき，annulus theoremよりS_k^nは，D_i^nの取り方に依らず同相，以下，S_k^nとして，S^nの未道に関するreflectionがS_k^nのreflectionを引き起こすように，$D_1^n := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) \mid \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1,\ (x_1 - \cos\frac{2\pi i}{k})^2 + (x_2 - \sin\frac{2\pi i}{k})^2 + \sum_{j=3}^{n+1} x_j^2 \leq (\frac{\sin\frac{\pi}{k+1}}{2})^2\}$によって得られるものとする。

S_k^n上のすべての自己同相群$H(S_k^n)$は，コンパクト開位相に関して，合成を演算とし位相群をなす。$H_0(S_k^n) := \{h\in H(S_k^n) \mid h\sim 1\}$（ここに1は恒等写像，「$\sim$」はアイントピック）は，$H(S_k^n)$の開閉正規部分群をなす。以下，アイントピー群$I_k^n := H(S_k^n)/H_0(S_k^n)$について考察する。

記号：${}^+I_k^n := \{(h) \mid h\in H(S_k^n),\ h$：向きを保つ$\}$（ここに$(h)$は$h$を含むアイントピー類），${}^+_0I_k^n := \{(h)\in {}^+I_k^n \mid h(\hat{S}_i^{n-1}) = \hat{S}_i^{n-1}$ $(i=1,2,\cdots k)$，但し$\partial S_k^n = \bigcup_{i=1}^{k} \hat{S}_i^{n-1}\}$。

ι：${}^+I_k^n \to I_k^n$を包含写像，π：$I_k^n \to I_k^n/{}^+I_k^n$を自然な準同型とする。

命題1. 短完全系列 $0 \to {}^{+}I^{n}_{k} \xrightarrow{\iota} I^{n}_{k} \xrightarrow{\pi} I^{n}_{k}/{}_{+}I^{n}_{k} \to 0$ は分解型で、$I^{n}_{k} \approx {}^{+}I^{n}_{k} \cdot \mathbb{Z}_2$（「$\cdot$」半直積）となる。

証明. $I^{n}_{k}/{}_{+}I^{n}_{k}$ の生成元 $\bar{I}^{n}_{k}$ に、$(\alpha) \in I^{n}_{k}$（ここに $\tau \in H(S^{n}_{k})$ は、$\tau(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, -x_{n+1})$）を対応させる準同型 $\perp\!\!\!\perp : I^{n}_{k}/{}_{+}I^{n}_{k} \to I^{n}_{k}$ は、$\pi \circ \perp\!\!\!\perp = 1$。

注2。(α) の生成する位数2の部分群 $\langle(\alpha)\rangle$ が I^{n}_{k} で正規なら、上は直積に分解。

$\iota' : {}^{+}_{0}I^{n}_{k} \to {}^{+}I^{n}_{k}$ を包含写像、$\pi' : {}^{+}I^{n}_{k} \to {}^{+}I^{n}_{k}/{}^{+}_{0}I^{n}_{k}$ を自然な準同型とする。

命題2. 短完全系列 $0 \to {}^{+}_{0}I^{n}_{k} \xrightarrow{\iota'} {}^{+}I^{n}_{k} \xrightarrow{\pi'} {}^{+}I^{n}_{k}/{}^{+}_{0}I^{n}_{k} \to 0$ に於いて、${}^{+}I^{n}_{k}/{}^{+}_{0}I^{n}_{k}$ は k 次対称群 P_k と同型。

証明。$H(S^{n}_{k}) \ni h_{ij}$ で向きを保ち、∂S^{n}_{k} つ $\hat{S}^{n-1}_{l}, \hat{S}^{n-1}_{i}, \hat{S}^{n-1}_{j}$（$l \neq i$, $l \neq j$, $k \geq l \geq 1$）に対し、$h_{ij}(\hat{S}^{n-1}_{i}) = \hat{S}^{n-1}_{j}$, $h_{ij}(\hat{S}^{n-1}_{j}) = \hat{S}^{n-1}_{i}$, $h_{ij}(\hat{S}^{n-1}_{l}) = \hat{S}^{n-1}_{l}$ なるものが次のように構成できる。n-球 $D^n \subset S^n$ で、$\hat{S}^{n-1}_{i} \cup \hat{S}^{n-1}_{j}$ を内部に含み、他と交わらないものをとり、D^n 上の同相写像 $\hat{h}_{ij}$ で $\hat{h}_{ij} | \partial D^n = 1$, $\hat{h}_{ij}(\hat{S}^{n-1}_{i}) = \hat{S}^{n-1}_{j}$, $\hat{h}_{ij}(\hat{S}^{n-1}_{j}) = \hat{S}^{n-1}_{i}$ となるものを回転によってつくり、h_{ij} を D^n の S^{n}_{k} 上で $\hat{h}_{ij}$、他で1とすればよい。これにより、$f : P_k \to {}^{+}I^{n}_{k}/{}^{+}_{0}I^{n}_{k}$ を $f((i,j)) := [(h_{ij})]$（ここに $[(h_{ij})]$ は (h_{ij}) を含む ${}^{+}I^{n}_{k}/{}^{+}_{0}I^{n}_{k}$ の類）、$f((i,j)(i',j')) := [(h_{ij})(h_{i'j'})]$ で定義すれば同型となる。

次の定理が基本的役割をなす。

定理　$n=2$ かつ $k\leq 3$, $n=3$, $n\geq 6$ のとき, ${}^{+}_{0}I^{n}_{k}=0$ 。

系　$n=2$ かつ $k\leq 3$, $n=3$, $n\geq 6$ のとき　$I^{n}_{k}\approx P_{k}\times Z_{2}$ (直積)

証明. $I^{n}_{k}\ni{}^{\forall}(h)$ 対 1 , $(h)^{-1}(f)(h)(f)^{-1}=(h^{-1}fhf^{-1})\in{}^{+}_{0}I^{n}_{k}$, 従って定理より, 右辺 $=(1)$ すなわち, $(h)^{-1}(f)(h)=(f)$。故に $\langle(f)\rangle$ は I^{n}_{k} の正規部分群。命題1の注1より, $I^{n}_{k}\approx{}^{+}I^{n}_{k}\times Z_{2}$ (直積)。命題2より ${}^{+}I^{n}_{k}\approx{}^{+}I^{n}_{k}/{}^{+}_{0}I^{n}_{k}\approx P_{k}$ 故に $I^{n}_{k}\approx P_{k}\times Z_{2}$。

§3. 定理の証明

次の結果が知られている。([5])

命題3 (annulus theorem)

$f,g: S^{n-1}\longrightarrow R^{n}$ が向きを保つ局所平坦な埋蔵で, $f(S^{n-1})$ が $g(S^{n-1})$ の囲む R^{n} の有界な領域に含まれるとき, $n\neq 4$ ならば, 埋蔵 $F: S^{n-1}\times[0,1]\to R^{n}$ で, $F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=g(x)$ $({}^{\forall}x\in S^{n-1})$ を満たすものが存在する。

命題4 (アインドピー定理)

$f: S^{n}\to S^{n}$ を向きを保つ同相写像とすると $n\neq 4$ のとき, $f\sim 1$。 (「$\sim$」は アインドピック)

証明。命題3より次のように導かれる。$S^{n}\ni a$ (固定する) に対し, $\{a,f(a)\}\subset \overset{\circ}{D}{}^{n}$ なる n-球が存在する。D^{n} の全座構造により, $f\sim f_{1}$ で $f_{1}(a)=a$ とできる。a の ε-球近傍 B^{n}_{ε} を十分小さくとれば, $f_{1}(B^{n}_{\varepsilon})\subset B^{n}_{\delta}$ となる a の δ-球近傍が

存在し，$f_1|\partial B^n_\varepsilon$ と $i:\partial B^n_r \to S^n$（包含写像）に命題3を用いて $F(S^{n-1}\times I\ni t)$ に沿って $f_1(\partial B^n_\varepsilon)$ を動かすことにより $f_1\sim f_2$ で $f_2|\partial B^n_\varepsilon = 1$ とできる。Alexander アイソトピーにより，$f_2\sim 1$ となる。

注3。逆も成り立つ。（[1]）

命題5（アイソトピー拡張定理）

多様体 M 上の同相写像 $h:M\to M$ の ∂M 上のアイソトピー $h_t|\partial M$ は M 上のアイソトピー h_t に拡張できる。

定理の証明。

${}^+_0I^n_k=0$ を示すには ${}^+_0I^n_k\ni(h)$ が $(h)=(1)$ すなわち，$H(S^n_k)\ni h$ が向きを保ち，$h(\hat S^{n-1}_i)=\hat S^{n-1}_i$（$i=1,\cdots,k$）ならば，$h\sim 1$ を示せばよい。命題4，5により $h|\partial S^n_k=1$ としてよい。以下3つの場合に分けて $h\sim 1$ を示す。

I] $n=2$ かつ $k\le 3$ の場合。

i) $k=1$ のとき，Alexander アイソトピーにより $h\sim 1$。

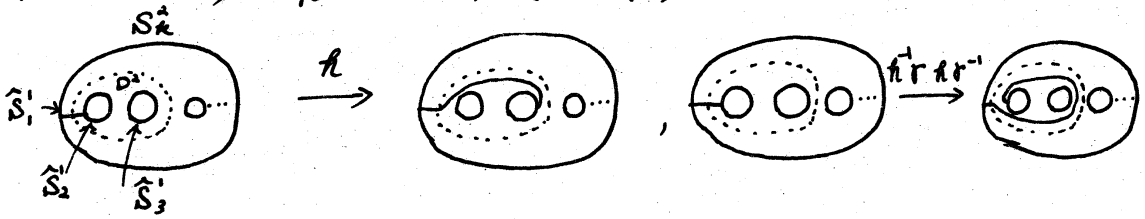
ii) $k=2$ のとき，$\hat S^1_1$ を回転させれば，[3]の Th.(7.2) で成立。

iii) $k=3$ のとき，ii)での[3]の方法を，変形の途中で $\hat S^1_3$ にひっかからぬように注意して適用すればよい。

注4。$k\ge 4$ では，$\mathrm{Ш}({}^-_+I^2_k)=\langle(\delta)\rangle$ が I^2_k で正規とならず，$I^2_k\not\cong {}^+I^2_k\times\mathbb{Z}_2$（直積）。次はその例である。

∂S^2_k つ $\hat S^1_2$，$\hat S^1_3$ を含み，他と交わらぬ2-球 $D^2(\subset S^2)$ で，

$\gamma(D^2) = D^2$ となるものをとり，$h|_{D^2} : D^2 \to D^2$ を D^2 の内部を $180°$ 回転させて得られる同相写像で，$h|_{D^2}|_{\partial D^2} = 1$，$h|_{D^2}(\hat{S}^1_2) = \hat{S}^1_3$，$h|_{D^2}(\hat{S}^1_3) = \hat{S}^1_2$ となるものとする。$h|_{S^2_k - D^2} = 1$ により拡張して $h : S^2_k \to S^2_k$ をうる。$h^{-1}\gamma h \gamma^{-1} : (S^2_k, \partial S^2_k) \to (S^2_k, \partial S^2_k)$ は 1 と対してホモトピックでないから，$(h)^{-1}(\gamma)(h)(\gamma)^{-1} \neq (1)$。(下図参照)



II] $n = 3$ の場合.

i) $k = 1$ のとき，I] の場合と同様。

ii) $k \geq 2$ のとき. 自然数 m を $k > m \geq 1$ とする。m についての帰納法を用いる。

$\hat{S}^2_i$ と $\hat{S}^2_{i+1}$ を結ぶ線分を $l_{i,i+1}$ とし，その自明の管状近傍を $T_i : B^2 \times [0,1] \to S^3_k$ ($T_i(0 \times [0,1]) = l_{i,i+1}$，$T_i(B^2 \times 0) \subset \hat{S}^2_i$，$T_i(B^2 \times 1) \subset \hat{S}^2_{i+1}$) とする。$h \sim h_{m-1}$ まで変形され，$h_{m-1}|_{\partial S^3_k \cup \{\bigcup_{j=1}^{m-1} T_j(B^2 \times [0,1])\}} = 1$ であるとする。I] と同様の手法により，$\partial S^3_k \cup \{\bigcup_{j=1}^{m-1} T_j(B^2 \times [0,1])\}$ を止めたまま，$h_{m-1} \sim h'$ で $h'(T_m(B^2 \times [0,1])) = T_m(B^2 \times [0,1])$ とできる。$h'|_{T_m(\partial B^2 \times [0,1])} : T_m(\partial B^2 \times [0,1]) \to T_m(\partial B^2 \times [0,1])$ に前 II] の $k = 2$ を適用 (必要なら，$T_m(\partial B^2 \times [0,1])$

$\subset \hat{S}^2_m$ を回転させる。) し，命題5を用いて $T_m(\partial B^2 \times 0) \subset \hat{S}^2_{m-1}$ を止めて，$h' \sim h''$ で $h''|\partial S^2_k \cup \{\bigcup_{j=1}^{m-1} T_j(B^2 \times [0,1])\} \cup T_m(\partial B^2 \times [0,1])$ $= 1$ とできる。$h''|T_m(B^2 \times [0,1])$ に Alexander アイントピーを用いて，$h'' \sim h_m$ をうる。$h_{k-1}|\partial S^2_k \cup \{\bigcup_{j=1}^{k-1} T_j(B^2 \times [0,1])\}$ $= 1$ だから，h_{k-1} は 3-球 $S^3_k - [\partial S^2_k \cup \{\bigcup_{j=1}^{k-1} T_j(B^2 \times [0,1])\}]$ の境界上で，1。Alexander アイントピーにより $h_{k-1} \sim 1$。

III] $n \geqslant 6$ の場合.

次の特殊な場合について考える。

補題1　$n \geqslant 2$ のとき，$h: S^n_2 \to S^n_2$ が向きを保ち，$h(\hat{S}^{n-1}_i) = \hat{S}^{n-1}_i$ $(i=1,2)$ を満たす PL 同相写像ならば，$h \underset{PL}{\sim} 1$.　(「$\underset{PL}{\sim}$」: PL アイントピック)

証明。n についての帰納法を用いる。

$n=2$ のとき，[3] の Th. (7.2) は，PL カテゴリーでも成り立つからよい。$n-1$ まで成り立つとする。PL カテゴリーで，命題3，従って命題4が $n \geqslant 1$ で，及び命題5が成り立つから，$h \underset{PL}{\sim} h'$ で $h'|\partial S^n_2 = 1$ とできる。h' は PL だから $h'(l_{1,2})$ は $\hat{S}^{n-1}_1$ と $\hat{S}^{n-1}_2$ を結ぶ折れ線。よって，$h' \underset{PL}{\sim} h''$ で，$h''|\partial S^n_2 \cup l_{1,2} = 1$ とできる。$l_{1,2}$ の自明の管状近傍 $T_1: B^{n-1} \times [0,1] \longrightarrow S^n_2$ を PL 写像でとると，$T_1(B^{n-1} \times [0,1])$，$h''(T_1(B^{n-1} \times [0,1]))$ は，共に $l_{1,2}$ の正則近傍でしかも，$T_1(B^{n-1} \times [0,1]) \cap \partial S^n_2 = h''(T_1(B^{n-1} \times [0,1])) \cap \partial S^n_2$ は，

$l_{1,2} \cap \partial S^n_2 = T_1(0 \times \{0,1\})$ の ∂S^n_2 に於ける正則近傍。よって相対正則近傍の一意性により $h'' \underset{PL}{\sim} h'''$ で $h'''|\partial S^n_2 = 1$ かつ $h'''(T_1(B^{n-1} \times [0,1])) = T_1(B^{n-1} \times [0,1])$ とできる。$h'''|T(\partial B^{n-1} \times [0,1])$ に仮定を適用し，命題5と Alexander アイソトピーを用いて，$h'' \underset{PL}{\sim} 1$。

$n \geq 6$ での一般の場合，次の Kirby [6] Th. 17 を用いる。

命題6. $q \geq 5$ のとき，q 次元位相多様体 Q^q のコンパクト部分多様体 Q_0 で ∂Q が PL 構造をもち，かつ Q への拡張が存在するならば，その拡張の Q_0 を止めたアイソトピー類は，$H^3(Q, Q_0, Z_2)$ と1対1に対応する。

定理の証明。$h: S^n_k \to S^n_k$ は $h|\partial S^n_k = 1$ だから，S^n_k の標準的な PL 構造 θ に対し，h によって誘導された PL 構造 $h^*\theta$ は，∂S^n_k 上で θ と一致する。従って命題6で，$Q = S^n_k$，$Q_0 := \partial S^n_k$ とすれば，$H^3(S^n_k, \partial S^n_k, Z_2) \approx H_{n-3}(S^n_k, Z_2) \approx 0$ だから $h \sim h'$ rel ∂S^n_k で h': PL とできる。II] の ii) と同様に，$l_{i,i+1}, T_i, h_i$ を定義する。自然数 m，$k > m \geq 1$ について帰納法を用いる。$h' \underset{PL}{\sim} h_{m-1}$ で h_{m-1}: PL かつ $h_{m-1}|\partial S^n_k \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} T_i(B^{n-1} \times [0,1]) = 1$ と変形できたとする。$h_{m-1}(l_{m,m+1})$ は折れ線だから，$h_{m-1} \underset{PL}{\sim} h''$ で $h''|\partial S^n_k \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} T_i(B^{n-1} \times [0,1]) \cup l_{m,m+1} = 1$

とできる。$T_m(B^{n-1}\times[0,1])$, $h''(T_m(B^{n-1}\times[0,1]))$ は共に $l_{m,m+1}$ の正則近傍。相対正則近傍の一意性より $h'' \underset{PL}{\simeq} h'''$ で $h'''/\partial S^n_k \cup \{\bigcup_{i=1}^{m-1} T_i(B^{n-1}\times[0,1])\} \cup l_{m,m+1} = 1$ かつ $h'''(T_m(B^{n-1}\times[0,1])) = T_m(B^{n-1}\times[0,1])$ とできる。$h'''/T_m(\partial B^{n-1}\times[0,1])$ に補題1を適用し，命題5とAlexanderアイソトピーにより $h'' \underset{PL}{\simeq} h_m$。$h_{k-1}$ にAlexanderアイソトピーを用いて，$h_{k-1} \underset{PL}{\simeq} 1$。

注5。PLカテゴリーでは，$n=4,5$ でも成り立つ。

参考文献

[1] Brown. M. and Gluck. H.: Stable structures on manifolds I. Ann. of math. 79 (1964) 1-17.

[2] Edwards. R and Kirby. R: Deformations of spaces of imbeddings: Ann. of Math. 93 (1971) 63-88.

[3] Gluck. H: Embeddings of 2-spheres in 4-sphere. Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 308-333

[4] Hudson. J.F.P: Piecewise Linear Topology W.A. Benjamin. Inc. New.York. 1969.

[5] Kirby. R. Stable homeomorphisms and the annulus conjecture, Ann. of Math. 89 (1969) 575-582

[6] ———— Lectures on triangulations of manifolds. U.C.L.A. (Los Angels) (1969)