

渦構造の非線形相互作用のウェーブレット解析

あらきけいすけ (岡山理大・工)

三浦英昭 (核融合研)

1 はじめに

Kolmogorov の普遍平衡領域の理論の基本仮定に「エネルギー伝達 (非線形相互作用) の局所性」がある [1].

Navier-Stokes 方程式のフーリエ・モード解析に基づく局所性, 非局所性に関する議論は, 直接数値計算に基づく結果を見る限り議論は分かれている. 3 波相互作用 $T(k, p, q)$ の解析に基づいた研究では「非局所性の卓越」が [2, 3, 4], エネルギーフラックス $\Pi(k)$ に基づいた解析では「局所性の卓越」が見られた [5]. Kishida et al. によるヘリカル・ウェーブレット解析では 3 波相互作用 $T(k, p, q)$ のウェーブレット・アナログの解析の結果, 局所相互作用の卓越が示された [6]. この解析の範囲内ではウェーブレットの「空間スケール」の情報のみを取り出され, 「位置」「異方性」「ヘリシティ」に関する情報は縮約されていた.

ウェーブレット解析のフーリエ解析に対する利点は「空間スケール」と「位置」の情報を (不確定性原理の限界内で) 同時に捉えられることにある. Kishida and Araki では「空間スケール」「位置」に関するエネルギースペクトル $E_{j,l}$ (記号の定義は §2.2 参照) の時間変化を解析し, 局所的なエネルギーの振幅と非線形相互作用の振幅との間に相関があることを示した [7]. しかしこの解析もエネルギーの再分配という非線形相互作用の本質を見るには不十分である. というのも, Kishida and Araki [7] で評価した量はエネルギー変化に対する非線形項の寄与を “to-mode” に関しては「スケール」「位置」に分解して調べたが, “from-mode”, “by-mode” に関しては「スケール」分解のみを行っただけだからである (用語 “*-mode” の定義は §2.3 参照).

やはり空間的な相互作用の振る舞いを定量的に評価するためには from-mode の「スケール」「位置」毎の分解が必要である. 本研究では from-mode の「スケール」「位置」毎の分解を試み, 非線形相互作用と組織構造との関連を探っていく. これまでに「スケール」間の非線形輸送は「局所的」すなわち隣接スケール間での収支が支配的であることがはっきりしている [6]. これに「位置」の情報を加えることで, 支配的な相互作用の分布を知ることができる. 果たして支配的な相互作用の分布は「満遍なくランダムに散らばっている」のかそれとも「強い間欠性を伴った分布になっている」のか.

2 ヘリカル・ウェーブレット

本節では非発散正規直交ウェーブレット基底 (以下, ヘリカル・ウェーブレットと呼ぶ) の構成法とその速度場, Navier-Stokes 方程式への適用を概観する.

流体の容器 $D = [0, L]^3$ 内の位置を表すベクトルを「上付き矢印」で, D 上のベクトル場を「ボールド体」で表す. 例えば速度場は $\mathbf{u}(\vec{x}, t)$ と表記する.

2.1 ヘリカル・ウェーブレットの構成

周期 L の周期境界条件を満たす領域 $[0, L]^3$ での 3 次元非発散正規直交ウェーブレット (以下「ヘリカル・ウェーブレット」と呼ぶ) は Fourier 変換¹を用いて次式で与えられる

添字	意味	範囲
j	空間スケール	$0, 1, 2, \dots$
$\epsilon = \xi + 2\eta + 4\zeta$	異方性	$\xi, \eta, \zeta \in \{0, 1\}$ (Figure.1 参照)
$\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$	位置	$l_x, l_y, l_z = 0, 1, \dots, 2^j - 1$, (j は空間スケールの添字)
σ	ヘリシティ	± 1

Table 1: ヘリカル・ウェーブレットの添え字の物理的意味と値の範囲

関数である:

$$\psi_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(\vec{x}) := \frac{1}{\sqrt{2^{3j}}} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\vec{0}\}} \hat{\psi}_\xi\left(\frac{k_x}{2^j}\right) \hat{\psi}_\eta\left(\frac{k_y}{2^j}\right) \hat{\psi}_\zeta\left(\frac{k_z}{2^j}\right) \times \frac{\mathbf{e}_\vartheta(\vec{k}) + i\sigma \mathbf{e}_\varphi(\vec{k})}{\sqrt{2}} \exp\left[2\pi i \vec{k} \cdot \left(\frac{\vec{x}}{L} - \frac{\vec{l}}{2^j}\right)\right], \quad (1)$$

ここでウェーブレットの添え字 $j, \epsilon, \vec{l}, \sigma$ の意味と値の範囲は Table.1 を参照のこと, $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \in \mathbb{Z}^3$ は波数ベクトル, $\hat{\psi}_0, \hat{\psi}_1$ は各々1次元スケーリング関数, 1次元マザーウェーブレットの Fourier 像, $\mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$ は球座標系での ϑ, φ -方向の単位ベクトルである. 本研究では k_z -方向を「北極・南極」に取って球座標系 $\mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$ を設定する, すなわち:

$$\mathbf{e}_\varphi(\vec{k}) := \begin{cases} (0, k_z/|k_z|, 0) & \vec{k} \parallel \hat{z} \\ (\hat{z} \times \vec{k})/|\hat{z} \times \vec{k}| & \text{それ以外} \end{cases}, \quad \mathbf{e}_\vartheta(\vec{k}) := \begin{cases} (k_z/|k_z|, 0, 0) & \vec{k} \parallel \hat{z} \\ \mathbf{e}_\varphi(\vec{k}) \times \vec{k}/|\vec{k}| & \text{それ以外} \end{cases} \quad (2)$$

ここで $\hat{z} = (0, 0, 1)$ である.

ヘリカル・ウェーブレットの構成において, ウェーブレットは何を用いても良い². 本研究では Meyer の構成法 [8] に従ったウェーブレットを用いた. これは1次元のスケーリング関数を

$$\hat{\psi}_0(\xi) := \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq \xi \leq 1/3, \\ f(\xi) & \text{for } 1/3 \leq \xi \leq 2/3, \\ 0 & \text{for } \xi \geq 2/3 \end{cases} \quad (3)$$

によって構成する ($\xi < 0$ の部分は $\psi_0(-\xi) = \psi_0(\xi)$ で定義する). ここで $f(\xi)$ は $f(1/3) = 1, f(2/3) = 0, |f(\xi)|^2 + |f(1-\xi)|^2 = 1$ を満たす十分に滑らかな単調減少関数である. 本研究では $f(\xi)$ として次のものを使う:

$$f(\xi) = \frac{g(3\xi - 1)}{\sqrt{|g(3\xi - 1)|^2 + |g(2 - 3\xi)|^2}}, \quad g(x) = \exp\left(-\frac{1}{1 - x^2}\right). \quad (4)$$

¹ 本研究では Fourier 変換を次式で定義する: $\hat{f}(\xi) := \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \exp\left(-\frac{2\pi i \xi x}{L}\right) dx$. 3次元の Fourier 変換はこの定義を3方向に適用する. 逆変換は $f(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi) \exp\left(\frac{2\pi i \xi x}{L}\right)$.

² ウェーブレットは多重解像度近似 (multiresolution approximation, MRA) の条件を満たす関数の総称.

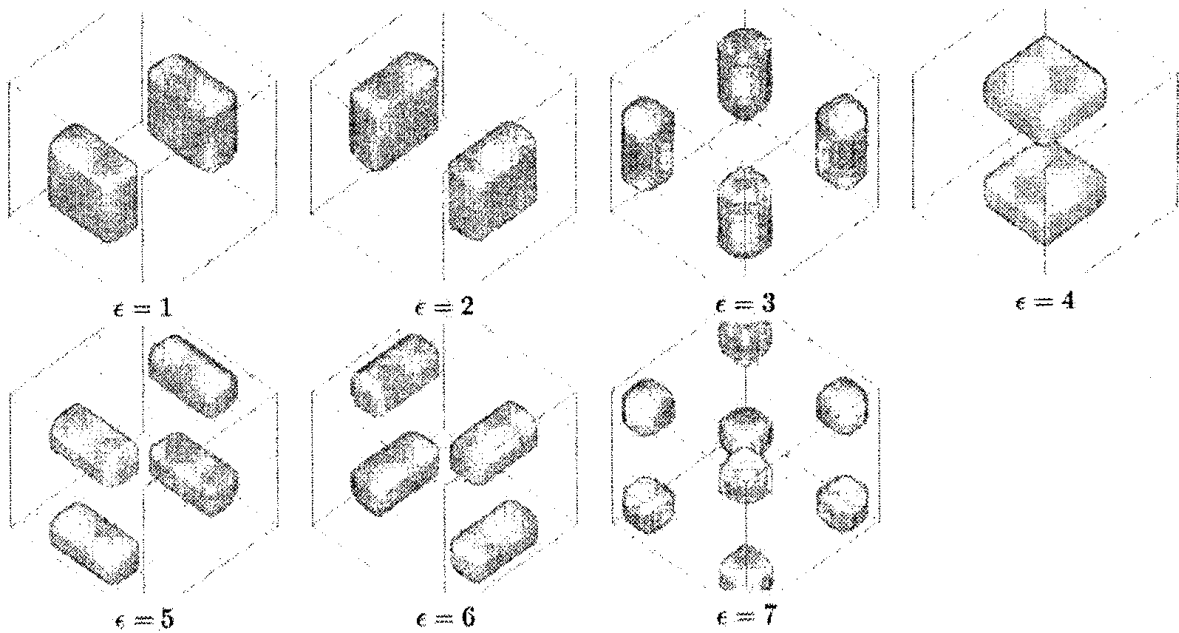


Figure. 1 異方性添字 ϵ 毎のウェーブレットの Fourier 像. 3次元のウェーブレットを1次元のスケール関数, ウェーブレットの直積で定義したのでこのような7種の基底関数が現れる. これら7種のウェーブレットの全体で Fourier 空間の全方向をカバーしていることが分かる. これらの関数が nested(入れ子) 構造をとって全空間をカバーする.

ヘリカル・ウェーブレットの性質を列挙する: (1) 各々が3次元非発散実ベクトル場; (2) 全体として3次元周期境界領域のソレノイダル・ベクトル場 $\{\mathbf{u}; \mathbf{u} \in \mathcal{X}([0, L]^3), \exists \mathbf{a} \text{ s.t. } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{a}\}$ の関数空間の正規直交完全系; (3) 空間的に局在した構造を持つ; (4) Meyer ウェーブレットを使ったので, 各々の関数のサポートは全空間³: $\text{supp}(\psi)=[0, L]^3$.

2.2 速度場のウェーブレット解析

速度場 $\mathbf{u}(\vec{x}, t)$ はヘリカル・ウェーブレット係数

$$u_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(t) := \int \mathbf{u}(\vec{x}, t) \cdot \boldsymbol{\psi}_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (5)$$

を用いて

$$\mathbf{u}(\vec{x}, t) = \sum_{j\epsilon\vec{l}\sigma} u_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(t) \boldsymbol{\psi}_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(\vec{x}) \quad (6)$$

とヘリカル・ウェーブレット分解される. ヘリカル・ウェーブレット分解は「スケール」「位置」「異方性」「ヘリシティ」の情報を与えるが, 本研究では「異方性」「ヘリシティ」

³したがって原理的には, あるウェーブレットモードの時間発展には, 他のすべてのウェーブレットモードが寄与する. しかし, ウェーブレットは局在した関数なので, 遠く離れた位置にあるウェーブレット間の相互作用は小さい.

の情報を縮約したスケール・位置スペクトル⁴

$$\mathbf{u}_{j\vec{l}}(\vec{x}, t) := \sum_{\epsilon, \sigma} u_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(t) \psi_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(\vec{x}) \quad (7)$$

および「位置」「異方性」「ヘリシティ」の情報を縮約したスケール・スペクトル

$$\mathbf{u}_j(\vec{x}, t) := \sum_{\epsilon, \vec{l}, \sigma} u_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(t) \psi_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(\vec{x}) \quad (8)$$

を考え、空間的構造と非線形エネルギー輸送との対応を見る。

本研究では運動エネルギーの非線形輸送を解析するので、速度場の運動エネルギー $E(t) := \frac{1}{2} \int |\mathbf{u}(\vec{x}, t)|^2 d\vec{x}$ のスペクトル分解を考えていく。ヘリカル・ウェーブレット関数系は正規直交なので、系の運動エネルギーは展開係数の二乗和で与えられる：

$$E(t) = \sum_{j, \epsilon, \vec{l}, \sigma} E_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(t), \quad E_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(t) := \frac{1}{2} |u_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(t)|^2. \quad (9)$$

本研究では渦構造の空間的構造と運動方程式の関係を調べるので、「スケール」と「位置」の情報に着目する。そこで「異方性」と「ヘリシティ」の情報を縮約したエネルギーのスケール・位置スペクトル

$$E_{j\vec{l}}(t) := \sum_{\epsilon, \sigma} E_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(t) \quad (10)$$

の時間変化に着目する⁵。

2.3 Navier-Stokes 方程式のウェーブレット表現

非圧縮性流体に対する Navier-Stokes 方程式 (NSE) は次式で与えられる：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad P(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\nabla \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]) \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y}. \quad (11)$$

速度場のウェーブレット展開 Eq.(6) を Eq.(11) に代入し、各ウェーブレット関数への射影を取ることで、ヘリカル・ウェーブレット係数に関する運動方程式系 (dynamical system) を得る：

$$\frac{du_\lambda(t)}{dt} = \sum \langle \psi_\lambda | \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle u_\alpha(t) u_\beta(t) + \nu \sum \langle \psi_\lambda | \Delta | \psi_\beta \rangle u_\beta(t) \quad (12)$$

⁴ $\psi_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(\vec{x})$ の直交性より、結果として速度場のスケール・位置エネルギースペクトル $\mathbf{u}_{j\vec{l}}(\vec{x}, t)$ は互いに直交している、すなわち

$$\int \mathbf{u}_{j\vec{l}}(\vec{x}, t) \cdot \mathbf{u}_{k\vec{m}}(\vec{x}, t) d\vec{x} = \delta_{jk} \delta_{l_x m_x} \delta_{l_y m_y} \delta_{l_z m_z},$$

ここで δ は Kronecker のデルタ。気をつけねばならないことは、 $\mathbf{u}_{j\vec{l}}(\vec{x}, t)$ は互いに直交してはいるが、系の力学的変数ではない。すなわち $\mathbf{u}_{j\vec{l}}(\vec{x}, t)$ の時間変化の式は「バジレットの式」ではあるが「(系の時間発展を決める) 運動方程式」ではない。

⁵ エネルギーのスケール・位置スペクトルは速度のスケール・位置スペクトルを用いてもあらわすことができる： $E_{j\vec{l}}(t) = \frac{1}{2} \int |\mathbf{u}_{j\vec{l}}(\vec{x}, t)|^2 d\vec{x}$ 。

ここで λ, α, β はウェーブレットの添え字の組 $(j, \epsilon, \vec{l}, \sigma)$ を表し、ブラケットの記号は次の積分を表す⁶:

$$\langle a|b|c \rangle := - \int a(\vec{x}) \cdot [(b(\vec{x}) \cdot \nabla)c(\vec{x})] d^3\vec{x}, \quad \langle a|\Delta|c \rangle := \int a(\vec{x}) \cdot (\Delta c(\vec{x})) d^3\vec{x}. \quad (13)$$

ヘリカルウェーブレットは非発散の関数なので圧力項が消える。Eq.(12) の両辺に $u_\lambda(t)$ を掛け算して各ウェーブレットモードのエネルギーの時間発展の式 (budget equations) を得る:

$$\frac{dE_\lambda(t)}{dt} = \sum_{\alpha, \beta} \langle \psi_\lambda | \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle u_\lambda(t) u_\alpha(t) u_\beta(t) + \nu \sum_{\beta} \langle \psi_\lambda | \Delta | \psi_\beta \rangle u_\lambda(t) u_\beta(t). \quad (14)$$

ここで非線形項のブラケットは反転関係

$$\langle \psi_\lambda | \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle = - \langle \psi_\beta | \psi_\alpha | \psi_\lambda \rangle \quad (15)$$

を満たすこと⁷に着目すると、総エネルギー $E(t)$ の変化に対する非線形項の寄与は0となる:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, \alpha, \beta} \langle \psi_\lambda | \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle u_\lambda(t) u_\alpha(t) u_\beta(t) &= \sum_{\lambda, \alpha, \beta} \langle \psi_\beta | \psi_\alpha | \psi_\lambda \rangle u_\beta(t) u_\alpha(t) u_\lambda(t) \\ &\quad (\text{ダミーインデックス } \lambda, \beta \text{ を入れ替えても同じ}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \alpha, \beta} (\langle \psi_\lambda | \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle + \langle \psi_\beta | \psi_\alpha | \psi_\lambda \rangle) u_\lambda(t) u_\alpha(t) u_\beta(t) \\ &\quad (\text{上の二つの表現を足して2で割って}^8) \\ &\quad (\text{反転関係 Eq.(15) より}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

⁶ブラケットに関する注意 1: NSE の Fourier 解析で良く行われるような非線形項の対称化を本研究ではしない。詳細釣り合いが見えづらくなるからである。数学的には対称化しない方が良い。対称化しない表現には「流体の運動の配位空間上の Levi-Civita 接続」という微分幾何学的に厳密な意味づけができる。

ブラケットに関する注意 2: ここで from-mode と by-mode あるいは to-mode と by-mode が同じである場合がある (from-, by-, to- の名称の意味は後述)。これは「2モード相互作用」である。ウェーブレット基底 (というかフーリエ以外の基底) による解析では、from-mode と by-mode を指定しても to-mode は一意に決まらない。(to-mode が from-, by-mode から一意に決まるのは基底が Beltrami 流すなわち $\nabla \times \psi \parallel \psi$ の場合だけである。) その結果として「2モード相互作用」と「3モード相互作用」の双方が無視できない数だけ存在するのが一般的である。フーリエの場合だけが to-mode が一意に決まってしまうので特殊である。詳細は文献 [9] を参照のこと。

⁷非線形項のブラケットの定義 Eq.(13) は一見したところ安直なモード分解のように見えるが、実はそれなりの背景がある。反転関係 Eq.(15) を満たすだけならば c を任意定数として

$$\langle \psi_\lambda | \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle := \langle \psi_\lambda | c[\nabla \times (\psi_\alpha \times \psi_\beta)] + c[\psi_\alpha \times (\nabla \times \psi_\beta)] + (c-1)[(\nabla \times \psi_\alpha) \times \psi_\beta] \rangle$$

と定義してもよい。これは $\psi_\alpha = \psi_\beta = \mathbf{u}$ の時に c の値によらずに $\langle \psi_\lambda | \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle := \langle \psi_\lambda | \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \rangle$ となる、つまりモードの総和を取ると非線形項が再現される。もちろん反転関係 Eq.(15) を満たすのでエネルギーの保存に関する計算 Eq.(16) も成り立っている。この任意定数 c を非線形相互作用に伴うエネルギーの『遷移行列』 $\langle \psi_\lambda | \partial_t + \mathbf{u} | \psi_\beta \rangle u_\lambda u_\beta$ が Galilei 変換に対して値を変えないという条件を使って決定すると $c = 1/2$ となり $\langle \psi_\lambda | \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle = - \langle \psi_\lambda | (\psi_\alpha \cdot \nabla) \psi_\beta \rangle$ となる。このあたりの詳しい数学的背景については文献 [9] を参照のこと。

これより Eq.(15) は非線形項によるエネルギーの釣り合いをモード解析する際の基本ユニットであることが分かる (詳細は脚注7を参照)。

ブラケットの物理的含意

ここで詳細釣り合いの関係式 Eq.(15) の物理的含意について考えよう。ただし以下に書いた議論は脚注7に挙げた形のブラケットを用いても成り立つ。

表記法として展開関数と係数のまとまりを「モード名のみ」のブラケット等で表す、すなわち $\langle \lambda | = \langle \psi_\lambda | u_\lambda$, $|\lambda\rangle = |\psi_\lambda\rangle u_\lambda$, $|\lambda\rangle = |\psi_\lambda\rangle u_\lambda$ と表記する。このときエネルギーの発展方程式 Eq.(14) と反転関係 Eq.(15) は次のように書かれる:

$$\frac{dE_\lambda(t)}{dt} = \sum_{\alpha, \beta} \langle \lambda | \alpha | \beta \rangle + (\text{粘性項の寄与}), \quad \langle \lambda | \alpha | \beta \rangle + \langle \beta | \alpha | \lambda \rangle = 0. \quad (17)$$

まずブラケットの中間項のモード $|\alpha\rangle$ が反転関係に対して独立なので、これに関する和をとると発展方程式と反転関係は

$$\frac{dE_\lambda(t)}{dt} = \sum_{\beta} \langle \lambda | u | \beta \rangle + (\text{粘性項の寄与}), \quad \langle \lambda | u | \beta \rangle + \langle \beta | u | \lambda \rangle = 0. \quad (18)$$

となる。非線形相互作用によるエネルギーの保存もこの中間項をまとめた形で説明できる:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_{\lambda} \frac{dE_\lambda}{dt} = \sum_{\lambda} \sum_{\beta} \langle \lambda | u | \beta \rangle + (\text{粘性項の寄与}) \\ &\quad (\text{ダミー添え字に関して入れ替えをやって和をとる}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\beta} \left(\langle \lambda | u | \beta \rangle + \langle \beta | u | \lambda \rangle \right) + (\text{粘性項の寄与}) \\ &\quad (\text{中間項について和をとった反転関係を用いて}) \\ &= (\text{粘性項の寄与}). \end{aligned} \quad (19)$$

非線形輸送量 $\langle \lambda | u | \beta \rangle$ はモード λ の運動エネルギー E_λ の時間変化に対する、モード β からの寄与である。詳細釣り合い Eq.(15) から、「モード λ の運動エネルギー E_λ の時間変化に対するモード β からの寄与」は「モード β の運動エネルギー E_β の時間変化に対するモード λ からの寄与」と大きさが同じで符号が逆である。したがってこれを「 β から λ への非線形エネルギー輸送量」とみなせる。よって β を「from-mode」、 λ を「to-mode」と名づける。

次にこのエネルギー変化をもたらした「中間項」 $|u\rangle$ の意味を考える。まずこの中間項はモードのエネルギー E_λ の収支の釣り合いと独立している、つまり形式的にはここに何を入れても from-, to-mode 間の釣り合いが成り立つので、エネルギーの収支に対して「中立」の立場にある。また、このブラケットが実質微分に由来するという起源に立ち返って考えると、この中間項には「from-mode ψ_β を変形させる場」という物理的意味を与えることができる。言い換えると $u|\psi_\beta\rangle$ は「 u による移流に伴う ψ_β の変形」で

⁸厳密に言うとかやしい操作である。無限級数の項の入れ替えは収束性をきちんと調べないといけない。

あると考えられる。そこで変形を引き起こす場 $\mathbf{u}$ (およびそれをスペクトル分解したモード) を by-mode と呼ぶことにする。

ブラケットは by-mode に関して線形性を持っているので、この項をスペクトルに分解することもできる。ここで $\langle \lambda | \mathbf{u} | \beta \rangle$ は「 β から λ への非線形エネルギー輸送量」と考えてよかったから、それをさらにスペクトル分解したもの $\langle \lambda | \alpha | \beta \rangle$ は「 β から λ への非線形エネルギー輸送量に対する ($\mathbf{u}$ の中での) α による変形の寄与」と考えられる。

3 非線形輸送の解析

本研究ではスケール・位置毎の from-mode から to-mode へのエネルギー輸送をあらわす「遷移行列」

$$\langle j, \vec{l} | \mathbf{u} | k, \vec{m} \rangle := - \int \mathbf{u}_{j\vec{l}}(\vec{x}, t) \cdot [(\mathbf{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{k\vec{m}}(\vec{x}, t)] d\vec{x} \quad (20)$$

の振幅と組織構造との対応関係を調べた⁹。ここで速度のスケール・位置スペクトル $\mathbf{u}_{j\vec{l}}$ は非発散のベクトル場なので、NSE(Eq.(11)) の圧力項との積分 $-\int \mathbf{u}_{j\vec{l}} \cdot \nabla P d\vec{x}$ は消えることに注意。この遷移行列を用いると、運動エネルギーのスケール・位置スペクトル $E_{j\vec{l}}(t)$ の時間変化は次式で与えられる：

$$\frac{dE_{j\vec{l}}}{dt} = \sum_{k, \vec{m}} \langle j, \vec{l} | \mathbf{u} | k, \vec{m} \rangle + (\text{粘性項の寄与}). \quad (21)$$

ここでくどいようだが by-mode の分解をしなくてもエネルギーの詳細釣り合いは成り立っていることに注意しよう。「 $(j, \vec{l})$ の変化に対する $(k, \vec{m})$ の寄与 $\langle j, \vec{l} | \mathbf{u} | k, \vec{m} \rangle$ 」と「 $(k, \vec{m})$ の変化に対する $(j, \vec{l})$ の寄与 $\langle k, \vec{m} | \mathbf{u} | j, \vec{l} \rangle$ 」とは振幅が同じで符号が逆である、すなわち：

$$\langle j, \vec{l} | \mathbf{u} | k, \vec{m} \rangle + \langle k, \vec{m} | \mathbf{u} | j, \vec{l} \rangle = 0. \quad (22)$$

本研究では数値計算のチェックとして Eq.(22) が倍精度実数程度の精度で成立していることを、(解析をした範囲内の) スケール・位置スペクトル $(j, \vec{l})$, $(k, \vec{m})$ の各ペア毎に確認した。

今回は解像度クラスとして $j = 4, 5$ のケースを取り上げ¹⁰、 $\langle 5, \vec{l} | \mathbf{u} | 4, \vec{m} \rangle$ すなわち「位置 $\vec{m}/2^4$ を中心とした空間スケール $L/2^{4-1}$ 程度のコヒーレンスを持った流体の運動から、位置 $\vec{l}/2^5$ を中心とした空間スケール $L/2^{5-1}$ 程度のコヒーレンス (元の $1/2$ 程度の空間スケール) を持った流体の運動へのエネルギー伝達 (カスケード)」, および $\langle 4, \vec{l} | \mathbf{u} | 4, \vec{m} \rangle$ 「位置 $\vec{m}/2^4$ を中心とした空間スケール $L/2^{4-1}$ 程度のコヒーレンスを持った流体の運動

⁹ 流体の実質微分の演算子 $\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ が Galilei 変換に対して形を変えないから、本研究では非線形輸送を考える際に by-mode の分解を行わなかった。速度場のなんらかの関数系 $\{\phi_\lambda\}$ に関するスペクトル分解 $\mathbf{u}(\vec{x}, t) = \sum_\lambda u_\lambda(t) \phi_\lambda$ を考える際に、これを Galilei 変換 (Galilean boost) $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \mathbf{U}t, t \rightarrow t' = t$ に伴う速度場の変換 $\mathbf{u}(\vec{x}, t) \rightarrow \mathbf{u}'(\vec{x}', t') = \mathbf{u}(\vec{x}, t) + \mathbf{U}$ にどのように関連付けるべきかについて、著者にはアイディアがない。数学的には $\mathbf{u}(\vec{x}, t)$ はソレノイダルなベクトル場の集合、 $\mathbf{U}$ は調和関数ベクトル場の集合の元であるから、互いに直交する異なる関数空間に属しているので $\phi_\lambda(\vec{x}) \rightarrow \phi'_\lambda(\vec{x}') = \phi_\lambda(\vec{x})$ で定義しても良さそうには思われる。いままでこのことがあまり問題になっていないのは、展開関数として三角関数を使っていたせいであろう。特定の波数の三角関数の張る部分空間は「平行移動」の変換に関して不変であるからである。

から、位置 $\vec{l}/2^4$ を中心とした同じコヒーレント長の流体の運動へのエネルギー伝達(スィーピング)」について解析を行った。ただし計算領域 $[0, L]^3$ 内にあるすべてのウェーブレットではなく、その中の $[0, L/4]^3$ の領域内に位置しているウェーブレット・モードに関して解析を行った (Figure.3 参照)。

以下の節で空間分布を図を示すが、図中の「棒」は $\langle j, \vec{l} | \mathbf{u} | k, \vec{m} \rangle$ を表している。図には振幅の大きいもの上位 200 個の「遷移行列」を取り出して表示してある¹¹。「棒」の始点(緑色に塗った側)は from-mode のウェーブレットの「位置」 $((m_x + \frac{1}{2})/2^k, (m_y + \frac{1}{2})/2^k, (m_z + \frac{1}{2})/2^k)$ に、終点(赤あるいは青色に塗った側)は to-mode のウェーブレットの「位置」 $((l_x + \frac{1}{2})/2^j, (l_y + \frac{1}{2})/2^j, (l_z + \frac{1}{2})/2^j)$ に配置されている¹²。

3.1 調べた場

今回解析した場はシステムサイズ $L = 2\pi$ の周期境界条件を満たす領域で、格子点数を 256^3 とし初期値問題を擬スペクトル法を用いて直接数値計算した結果の時刻 $t = 3.5$ のデータである。

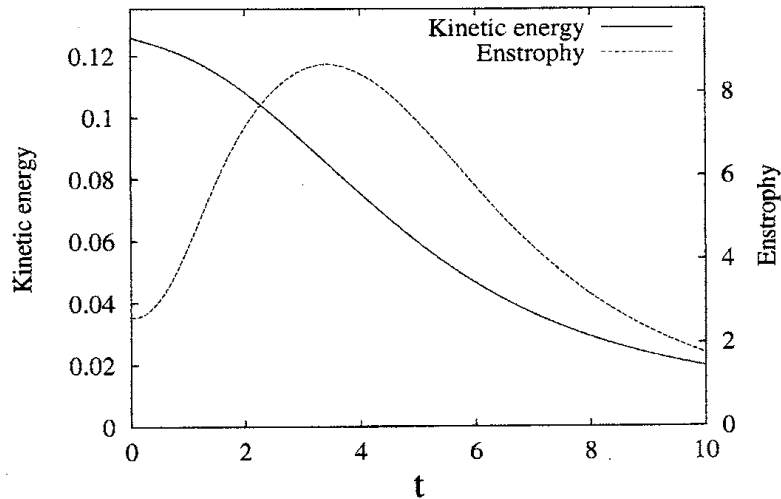


Figure. 2 シミュレーションした場のエネルギー、エンストロフィの時間発展

¹⁰解像度クラス $j=4$ とは計算領域 $[0, L]^3$ に対して、間隔 $(L/2^4)$ で並んだ大きさ(窓の幅) $(L/2^3)$ 程度のウェーブレットを使うということである。この空間解像度の選定にあまり深い意味はない。解像度が隣接していること、エネルギー分布のピークを外していること、解析の格子点数などを考慮して適当に決めた。

¹¹ウェーブレットのサポートは全空間なので原理的にはすべてのモード間に相互作用が存在する。したがって、すべてのサイト間に「棒」を描くことができる。

¹² $1/2$ のズレは見やすくするための工夫である。

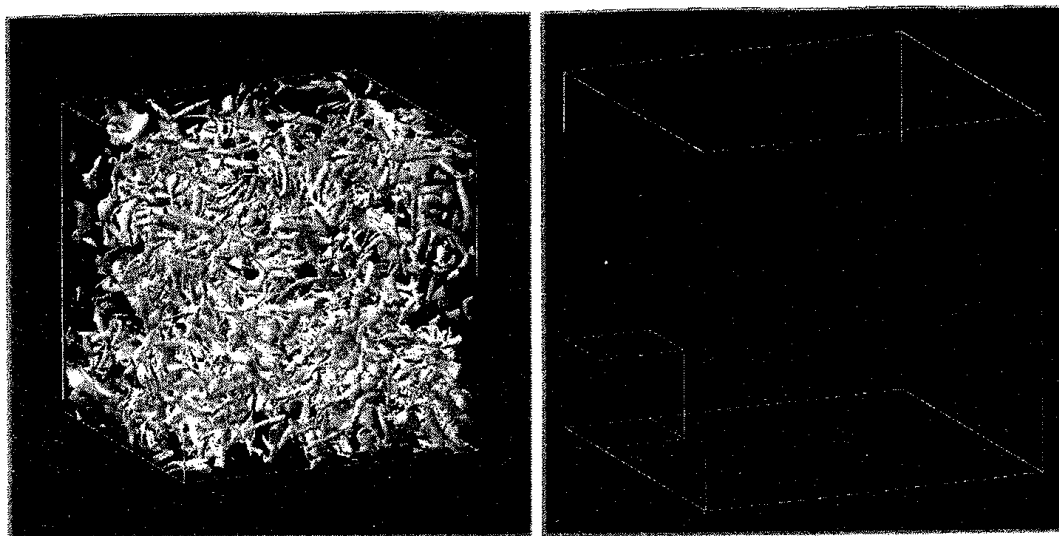


Figure. 3 (左) 解析した乱流場のエンストロフィの等値面, (右) 解析した領域は全体の $(1/4)^3$ の領域. 等値面の閾値は面の囲む体積が全体の 5% となるようにとった.

3.2 隣接スケール間輸送の空間分布

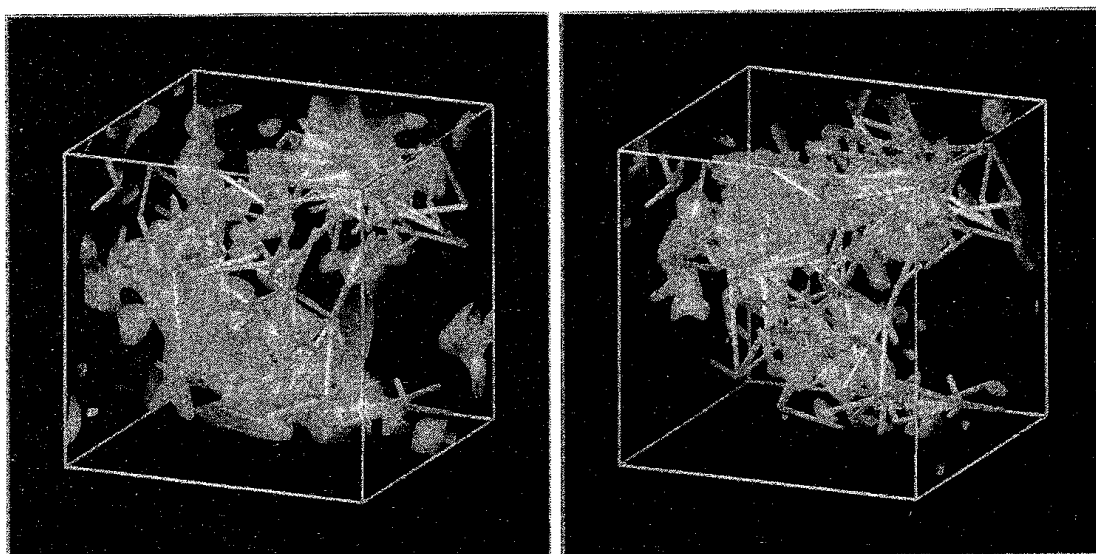


Figure. 4 ウェーブレット・サイト間の非線形エネルギー輸送の空間分布: 非線形エネルギー輸送の『遷移行列』 $\langle 5, \vec{k} | \mathbf{u} | 4, \vec{l} \rangle$ のうち振幅の絶対値の大きいものから 200 個を選んで図示している. 各図に描かれている等値面は (右) from-mode $|\mathbf{u}_4|$ の等値面, (左) to-mode $|\mathbf{u}_5|$ の等値面.

Figure.4 に解像度クラス $j=4$ と $j=5$ に属するウェーブレット・モード間の非線形相互作用の『遷移行列』 $\langle 5, \vec{k} | \mathbf{u} | 4, \vec{l} \rangle$ を図示した. この解像度の関係は「スケール」の意味で「局所的」である. Kishida et al. によるスケール間相互作用の解析の結果, 「局所的」な相互作用が卓越していた. したがって今回解析をした量は, 乱流中の支配的なスケール間エネルギー輸送過程の「内部構造」を調べることになっている. 果たして「位置 (空間分布)」の意味での「局所性」があるのであろうか?

さて、遷移行列の値が正ならばエネルギーの「順カスケード」が生じており、負ならば「逆カスケードが生じた」とみなすことができる。計算結果は「順カスケード」と「逆カスケード」の頻度に極端な差は見られなかった。すなわち非線形相互作用は「順カスケード」「逆カスケード」の双方が活発に生じている。もちろんこれらの総和をとると「順方向」のエネルギー輸送が卓越している。

Figure.4には解像度クラス $j=4$ と $j=5$ の速度場の等値面を描いている。解像度別の速度場の振幅の強い部分のコヒーレンスと、「棒」がクラスターをなす部分との間に直感的な対応関係が見て取れる。

3.3 同スケール間輸送の空間分布

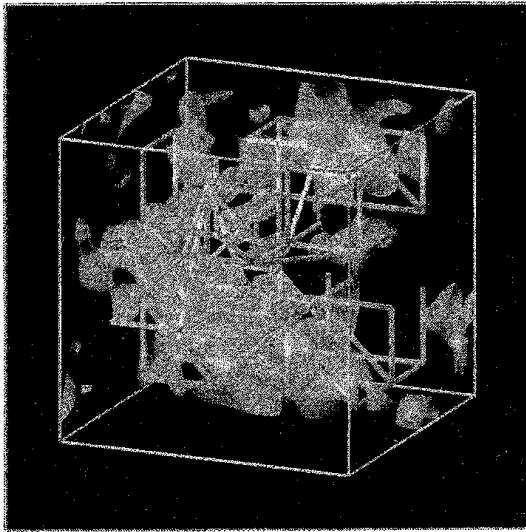


Figure. 5 ウェーブレット・サイト間の非線形エネルギー輸送の空間分布：非線形輸送 $\langle 4, \vec{k} | \mathbf{u} | 4, \vec{l} \rangle$ のうち振幅の絶対値の大きいものから 200 個を選んで図示している。各図に描かれている等値面は from-mode, to-mode $|\mathbf{u}_4|$ の等値面。

Figure.5に同じ解像度 $j=4$ に属するウェーブレット・モード間の非線形相互作用の『遷移行列』 $\langle 4, \vec{k} | \mathbf{u} | 4, \vec{l} \rangle$ を図示した。同じ解像度の内部での相互作用なので、これらの総和は零になることに注意しよう：

$$\sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{l}} \langle 4, \vec{k} | \mathbf{u} | 4, \vec{l} \rangle = 0. \quad (23)$$

つまり「遷移行列」要素の全体で見ると「同じ解像度クラス内部でのエネルギーの再配分」という物理的意味を持っている。したがって同じ解像度間の「遷移行列」は「流れによるスケーリングの効果」を評価する指標として使えることを示唆している。

解析結果を見ると近いサイト間を結ぶ「棒」が目立っている。また速度場の振幅の大きい部分と「棒」のなすクラスターの対応関係も見えて取れる。

3.4 空間分布の特徴とまとめ

図を観察して分かるように、まず非線形相互作用の振幅の大きい「棒」のクラスターと各解像度の速度場の振幅の大きい部分との間の対応が見られる。次に、「位置」的に近いサイト同士を結ぶ「棒」が目立っている。これは空間的に局所的な相互作用の振幅が大きいことを表している。もちろんウェーブレット基底は局在しているので、遠く離れたサイト間では Eq.(12) の接続係数 $\langle \psi_\lambda | \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle$ そのものが小さいことを反映しているとも考えられる。

今のところは直観的な観察結果に過ぎないが、相互作用の振幅とフィルターされた場の振幅との間に対応があることは定性的に示唆された。これらの量の統計的性質、特にいわゆる「組織構造」との相関を調べる必要がある。この対応関係のよさから Batchelor and Townsend が直観的に描いた乱流の間欠的な性質の生成メカニズムへの手がかりがつかめるものと考えている [10].

References

- [1] U. Frisch, "Trubulence", (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).
- [2] J. A. Domaradzki, R. S. Rogallo, Phys. Fluids A, **2**, p.413 (1990).
- [3] P. K. Yeung, J. G. Brasseur, Phys. Fluids A, **3**, p.884 (1991).
- [4] K. Ohkitani, S. Kida, Phys. Fluids A, **4**, p.794 (1992).
- [5] Y. Zhou, Phys. Fluids A., **5**, p.2511 (1993).
- [6] K. Kishida, K. Araki, S. Kishiba, K. Suzuki, Phys. Rev. Lett., **83**, p.5487 (1999).
- [7] K. Kishida, K. Araki, "Orthonormal divergence-free wavelet analysis of spatial correlation between kinetic energy and nonlinear transfer in turbulence", in Y. Kaneda, T. Gotoh (Eds.), "Statistical Theories and Computational Approaches to Turbulence, Modern Perspectives and Applications to Global-Scale Flows", pp.248-259, (Springer, Tokyo, 2002).
- [8] Y. Meyer, "Wavelets and operators", (Cambridge Univ. Press, 1992).
- [9] あらきけいすけ, 『非圧縮流体の解析力学と非線形相互作用のモード分解』, 九大応用力学研究所 研究集会報告 13ME-S2 「乱流現象の動力学, ランダムネス, そして幾何学構造」, pp.57-61.
- [10] G. K. Batchelor, A. A. Townsend, Proc. Roy. Soc. London, **A199**, p.238 (1949).

appendix: 遷移行列の計算方法

(1) 解析領域内に含まれているウェーブレット格子点 $\vec{x} = (\vec{m}/2^j)L$ に対し, 対流項

$$\mathbf{N}^{(k, \vec{m})}(\vec{x}, t) := -(\mathbf{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{k\vec{m}}(\vec{x}, t)$$

を数値的に求める. この際に位相シフト法を用いたエイリアス除去を行った. (2) 得られた場をヘリカルウェーブレット分解する:

$$\mathbf{N}^{(k, \vec{m})}(\vec{x}, t) = \sum_{j, \epsilon, \vec{l}, \sigma} N_{j\epsilon\vec{l}\sigma}^{(k, \vec{m})}(t) \psi_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(\vec{x}) + (\text{圧縮性成分}).$$

(3) 得られた対流項のウェーブレット係数 $N_{j\epsilon\vec{l}\sigma}^{(k, \vec{m})}(t)$ と速度場のウェーブレット係数 $u_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(t)$ との積を取り, 「異方性」「ヘリシティ」に関して和を取る:

$$\langle j, \vec{l} | \mathbf{u} | k, \vec{m} \rangle = \sum_{\epsilon} \sum_{\sigma} u_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(t) N_{j\epsilon\vec{l}\sigma}^{(k, \vec{m})}(t).$$

したがって, from-mode の格子点の数だけ非線形項を計算する.