

ルックバックパワーオプションの価格付けとヘッジ

中央大学理工学部経営システム工学科 川西泰裕 藤田岳彦

Takahiko Fujita and Yasuhiro Kawanishi

Department of Industrial and Systems Engineering, Faculty of Science and Engineering
Chuo University

概要 本稿ではルックバックパワーオプションの価格付けに取り組む。モデルとしてはブラック・ショールズ (BS) モデルおよび CGMY モデルを採用する。正確には後者は risk neutral modelling の考え方に従い, pricing measure の下での株価が CGMY モデルに従うと仮定するということである。ブラック・ショールズモデルの場合はヘッジも導く。

1 はじめに

本稿ではペイオフが以下で定義されるルックバックパワーオプションの価格付けを行う。

$$Z := S_T^\alpha \left(\sup_{0 \leq t \leq T} S_t \right)^\beta \quad \alpha, \beta > 0$$

ただし, $\{S_t\}$ は株価過程とする。第 2 節ではモデルとしてブラック・ショールズ (BS) モデルを採用し, その下で価格とヘッジを導く。第 3 節では risk neutral modelling ([2] 11 章) の考え方に従い, pricing measure の下での株価の挙動として CGMY モデル ([1]) を採用し, 価格評価について考察する。ただし CGMY 過程のパラメーターは過程が有界変動となるように制限する。このとき価格付けには CGMY 過程とその上限過程の同時分布, あるいはその特性関数が必要になるが, これはウィーナー・ホップ分解 ([4] 定理 45.7) の逆ラプラス変換により得られることが分かる。上述の制限は, この逆ラプラス変換の可能性を保証するためのものである。

2 ブラック・ショールズモデル下

ブラック・ショールズモデルを採用し, リスク中立確率 Q の下での株価の挙動を以下のように表す。

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = S \Leftrightarrow S_t = S e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

ただし r, σ, S は定数で r は無リスク金利である。また $\{W_t\}$ は Q の下での 1 次元標準ブラウン運動である。このモデルの下で価格およびヘッジを求めるために, まず $E_t := E^Q[e^{-rT} Z | \mathcal{F}_t]$ を計算

したい. ただし $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s; 0 \leq s \leq t)$ である. 以下を定義する.

$$\begin{aligned}\tilde{r} &:= \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}, \quad X_t := W_t + \tilde{r}t, \quad M_t := \sup_{0 \leq s \leq t} X_s, \\ H_t &:= \frac{e^{rT}}{S^{\alpha+\beta}} E_t = E^Q[e^{\alpha\sigma X_T + \beta\sigma M_T} | \mathcal{F}_t], \\ U_t &:= e^{-\tilde{r}W_t - \frac{1}{2}\tilde{r}^2 t} = e^{-\tilde{r}X_t + \frac{1}{2}\tilde{r}^2 t}, \quad \tilde{Q}[A] := \int_A U_T dQ \quad \text{for } A \in \mathcal{F}_T, \\ \tilde{\alpha} &:= \alpha\sigma + \tilde{r}, \quad \tilde{\beta} := \beta\sigma.\end{aligned}$$

このとき, $\tilde{Q}$ の下で $\{X_t; 0 \leq t \leq T\}$ が標準ブラウン運動となることに注意すると以下を得る.

$$\begin{aligned}H_t &= e^{\alpha\sigma X_t} E^Q[e^{\alpha\sigma(X_T - X_t) + \beta\sigma\{M_t \vee (X_t + \sup_{t \leq s \leq T} (X_s - X_t))\}} | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{\alpha\sigma X_t} E^{\tilde{Q}}[e^{\alpha\sigma(X_T - X_t) + \beta\sigma\{M_t \vee (X_t + \sup_{t \leq s \leq T} (X_s - X_t))\}} \frac{U_t}{U_T} | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{\alpha\sigma X_t - \frac{1}{2}\tilde{r}^2(T-t)} E^{\tilde{Q}}[e^{(\alpha\sigma + \tilde{r})(X_T - X_t) + \tilde{\beta}\sigma\{M_t \vee (X_t + \sup_{t \leq s \leq T} (X_s - X_t))\}} | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{\alpha\sigma X_t - \frac{1}{2}\tilde{r}^2(T-t)} E^{\tilde{Q}}[e^{\tilde{\alpha}(X_T - X_t) + \tilde{\beta}\{M_t \vee (X_t + \sup_{t \leq s \leq T} (X_s - X_t))\}} | X_t, M_t]\end{aligned}$$

$x \leq m$ について,

$$\begin{aligned}& E^{\tilde{Q}}[e^{\tilde{\alpha}(X_T - X_t) + \tilde{\beta}\{M_t \vee (X_t + \sup_{t \leq s \leq T} (X_s - X_t))\}} | X_t = x, M_t = m] \\ &= E^{\tilde{Q}}[e^{\tilde{\alpha}X_{T-t} + \tilde{\beta}\{m \vee (x + M_{T-t})\}}] \\ &= \iint_{u \leq v, v \geq 0, x+v \leq m} \frac{2(2v-u)}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}m - \frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}} dudv \\ &\quad + \iint_{u \leq v, v \geq 0, x+v > m} \frac{2(2v-u)}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}(x+v) - \frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}} dudv \\ &=: I + J\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Ie^{-\tilde{\beta}m} &= \int_{-\infty}^0 du \int_0^{m-x} \frac{2(2v-u)}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\tilde{\alpha}u - \frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}} dv \\ &\quad + \int_0^{m-x} du \int_u^{m-x} \frac{2(2v-u)}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\tilde{\alpha}u - \frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}} dv \\ &= E[e^{\tilde{\alpha}N(0, T-t)}] E\left[\frac{e^{\tilde{\alpha}N(0, T-t)}}{E[e^{\tilde{\alpha}N(0, T-t)}]} 1_{(N(0, T-t) \leq m-x)}\right] \\ &\quad - E[e^{\tilde{\alpha}N(2(m-x), T-t)}] E\left[\frac{e^{\tilde{\alpha}N(2(m-x), T-t)}}{E[e^{\tilde{\alpha}N(2(m-x), T-t)}]} 1_{(N(2(m-x), T-t) \leq m-x)}\right] \\ &= e^{\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2(T-t)} \Phi\left(\frac{m-x-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) - e^{2(m-x)\tilde{\alpha} + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2(T-t)} \Phi\left(\frac{-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right)\end{aligned}$$

ただし, $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数であり, 最後の等式はエッシャー変換から直ちに導かれる.

$$\begin{aligned}
J e^{-\tilde{\beta}x} &= \int_{-\infty}^{m-x} du \int_{m-x}^{\infty} \frac{2(2v-u)}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\tilde{\alpha}u+\tilde{\beta}v-\frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}} dv \\
&\quad + \int_{m-x}^{\infty} du \int_u^{\infty} \frac{2(2v-u)}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\tilde{\alpha}u+\tilde{\beta}v-\frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}} dv \\
&=: \int_{-\infty}^{m-x} K du + \int_{m-x}^{\infty} L du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K &= \int_{m-x}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \left(e^{-\frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}} \right)' e^{\tilde{\alpha}u+\tilde{\beta}v} dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{(u-2(m-x))^2}{2(T-t)}+\tilde{\alpha}u+\tilde{\beta}(m-x)} + \frac{\tilde{\beta}}{2} e^{(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})u+\frac{T-t}{8}\tilde{\beta}^2} \Phi\left(\frac{u-2(m-x)+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&=: K_1 + K_2
\end{aligned}$$

特に $\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{2} (= \frac{r}{\sigma} + \sigma(\alpha - \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2})) = 0$ の時の K, K_1, K_2 をそれぞれ $\tilde{K}, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2$ と表す.

L は K において $m-x$ を u で置き換えればよい.

$$L = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{u^2}{2(T-t)}+(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})u} + \frac{\tilde{\beta}}{2} e^{(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})u+\frac{T-t}{8}\tilde{\beta}^2} \Phi\left(\frac{-u+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) =: L_1 + L_2$$

同じく, $\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{2} = 0$ の時の L, L_1, L_2 をそれぞれ $\tilde{L}, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2$ と表す.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{m-x} K_1 du &= e^{(2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(m-x)+\frac{T-t}{2}\tilde{\alpha}^2} \Phi\left(\frac{-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
\int_{-\infty}^{m-x} \tilde{K}_1 du &= e^{\frac{T-t}{2}\tilde{\alpha}^2} \Phi\left(\frac{-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
\frac{2}{\tilde{\beta}} e^{-\frac{T-t}{8}\tilde{\beta}^2} \int_{-\infty}^{m-x} K_2 du &= \int_{-\infty}^{m-x} \frac{(e^{(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})u})'}{\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2}} \Phi\left(\frac{u-2(m-x)+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) du \\
&= \frac{e^{(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})(m-x)}}{\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2}} \Phi\left(\frac{-(m-x)+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2}} e^{(2(m-x)-\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t))(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})+\frac{1}{2}(T-t)(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})^2} \Phi\left(\frac{-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^{m-x} K_2 du &= \frac{\tilde{\beta}}{2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}} e^{\frac{T-t}{8}\tilde{\beta}^2} \left\{ e^{(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})(m-x)} \Phi\left(\frac{-(m-x)+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \right. \\
&\quad \left. - e^{(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})(2(m-x)+\frac{1}{2}(T-t)(\tilde{\alpha}-\frac{\tilde{\beta}}{2}))} \Phi\left(\frac{-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \right\} \\
\frac{2}{\tilde{\beta}} e^{-\frac{T-t}{8}\tilde{\beta}^2} \int_{-\infty}^{m-x} \tilde{K}_2 du &= \int_{-\infty}^{m-x} (u)' \Phi\left(\frac{u-2(m-x)+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) du \\
&= (-(m-x) - \tilde{\alpha}(T-t)) \Phi\left(\frac{-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad + \sqrt{\frac{T-t}{2\pi}} e^{-\frac{(-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t))^2}{2(T-t)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_{-\infty}^{m-x} \tilde{K}_2 du = -\tilde{\alpha} e^{\frac{T-t}{2}\tilde{\alpha}^2} \left\{ -(m-x) - \tilde{\alpha}(T-t) \right\} \Phi\left(\frac{-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad + \sqrt{\frac{T-t}{2\pi}} e^{-\frac{(-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t))^2}{2(T-t)}} \} \\
&\int_{m-x}^{\infty} L_1 du = e^{\frac{1}{2}(T-t)(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})^2} \Phi\left(\frac{-(m-x)+(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\int_{m-x}^{\infty} \tilde{L}_1 du = e^{\frac{T-t}{2}\tilde{\alpha}^2} \Phi\left(\frac{-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) = \int_{-\infty}^{m-x} \tilde{K}_1 du \\
&\frac{2}{\tilde{\beta}} e^{-\frac{T-t}{8}\tilde{\beta}^2} \int_{m-x}^{\infty} L_2 du = \int_{m-x}^{\infty} \frac{(e^{(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})u})'}{\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2}} \Phi\left(\frac{-u+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) du \\
&\quad = -\frac{e^{(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})(m-x)}}{\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2}} \Phi\left(\frac{-(m-x)+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2}} e^{\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})+\frac{1}{2}(T-t)(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})^2} \Phi\left(\frac{-(m-x)+(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\Rightarrow \int_{m-x}^{\infty} L_2 du = \frac{\tilde{\beta}}{2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}} e^{\frac{T-t}{8}\tilde{\beta}^2} \left\{ -e^{(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})(m-x)} \Phi\left(\frac{-(m-x)+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \right. \\
&\quad \left. + e^{\frac{1}{2}(T-t)(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})(\tilde{\alpha}+\frac{3}{2}\tilde{\beta})} \Phi\left(\frac{-(m-x)+(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \right\} \\
&\frac{2}{\tilde{\beta}} e^{-\frac{(T-t)}{8}\tilde{\beta}^2} \int_{m-x}^{\infty} \tilde{L}_2 du = \int_{m-x}^{\infty} \Phi\left(\frac{-u+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) du = \frac{2}{\tilde{\beta}} e^{-\frac{(T-t)}{8}\tilde{\beta}^2} \int_{-\infty}^{m-x} \tilde{K}_2 du \\
&\Rightarrow \int_{m-x}^{\infty} \tilde{L}_2 du = \int_{-\infty}^{m-x} \tilde{K}_2 du
\end{aligned}$$

以上より, まず $\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{2} \neq 0$ のとき, E_t は以下のようになる. ただし,

$$g_1(t) := S^{\alpha+\beta} e^{-rT+\frac{1}{2}(T-t)(\tilde{\alpha}^2-\tilde{r}^2)}, \quad g_2(t) := S^{\alpha+\beta} e^{-rT+\frac{1}{2}(T-t)((\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})^2-\tilde{r}^2)}$$

とする.

$$\begin{aligned}
E_t &= e^{-rT} S^{\alpha+\beta} H_t = S^{\alpha+\beta} e^{-rT-\frac{1}{2}\tilde{r}^2(T-t)+(\tilde{\alpha}-\tilde{r})X_t} (I+J)|_{x=X_t, m=M_t} \\
&= S^{\alpha+\beta} e^{-rT-\frac{1}{2}\tilde{r}^2(T-t)+(\tilde{\alpha}-\tilde{r})X_t} \\
&\quad \times \left\{ e^{\tilde{\beta}m} \left(e^{\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2(T-t)} \Phi\left(\frac{m-x-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) - e^{2(m-x)\tilde{\alpha}+\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2(T-t)} \Phi\left(\frac{-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. + e^{\tilde{\beta}x} \left(\int_{-\infty}^{m-x} K du + \int_{m-x}^{\infty} L du \right) \right\} \Big|_{x=X_t, m=M_t} \\
&= g_1(t) e^{(\tilde{\alpha}-\tilde{r})X_t+\tilde{\beta}M_t} \Phi\left(\frac{M_t-X_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad + g_1(t) e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+\tilde{r})X_t+2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})M_t} \Phi\left(\frac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad - \frac{2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}} g_1(t) e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{r})X_t+(2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})M_t} \Phi\left(\frac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad + \frac{2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}} g_2(t) e^{(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}-\tilde{r})X_t} \Phi\left(\frac{X_t-M_t+(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&=: f(t, W_t, M_t) \quad (\text{注: } X_t = W_t + \tilde{r}t)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで $t = 0$ とすると、現在価格が得られる。

$$\begin{aligned} E_0 &= E^Q \left[e^{-rT} S_T^\alpha \left(\sup_{0 \leq t \leq T} S_t \right)^\beta \right] \\ &= \frac{2\tilde{\alpha}}{2\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}} g_1(0) \Phi(-\tilde{\alpha}\sqrt{T}) + \frac{2(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}} g_2(0) \Phi((\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})\sqrt{T}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

一方, $\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{2} = 0$ のとき, E_t を特に $\tilde{E}_t$ で表すことにすると, $\tilde{E}_t$ は以下のようになる。ただし, $g_3(t) := S^{\alpha+\beta} e^{-rT - \frac{1}{2}\tilde{r}^2(T-t)}$ とする。

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t &= g_1(t) e^{(\tilde{\alpha} - \tilde{r})X_t - 2\tilde{\alpha}M_t} \Phi\left(\frac{M_t - X_t - \tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad + 2g_1(t) \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}(X_t - M_t) + \tilde{\alpha}^2(T-t)\right) e^{-(\tilde{\alpha} + \tilde{r})X_t} \Phi\left(\frac{X_t - M_t - \tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad - 2g_3(t) \tilde{\alpha} \sqrt{\frac{T-t}{2\pi}} e^{-\tilde{r}X_t - \tilde{\alpha}M_t - \frac{(X_t - M_t)^2}{2(T-t)}} \\ &=: h(t, W_t, M_t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで $t = 0$ とすると、現在価格が得られる。

$$\tilde{E}_0 = 2g_1(0)(1 + \tilde{\alpha}^2 T) \Phi(-\tilde{\alpha}\sqrt{T}) - 2g_3(0) \tilde{\alpha} \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \quad (2.4)$$

ちなみに、定義より $E_t, \tilde{E}_t$ は Q -マルチンゲールなので、(2.1) 式および (2.3) 式は Azéma-Yor マルチンゲール、あるいはより正確には、Kennedy マルチンゲールの具体例となっている。

次にヘッジ戦略を求めるために $dE_t, d\tilde{E}_t$ を計算すると以下のようになる。ただし $\varphi(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数を表す。

$$\begin{aligned} dE_t &= [(\tilde{\alpha} - \tilde{r})g_1(t) e^{(\tilde{\alpha} - \tilde{r})X_t + \tilde{\beta}M_t} \Phi\left(\frac{M_t - X_t - \tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad - g_1(t) e^{(\tilde{\alpha} - \tilde{r})X_t + \tilde{\beta}M_t} \varphi\left(\frac{M_t - X_t - \tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \frac{1}{\sqrt{T-t}} \\ &\quad - (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{r})g_1(t) e^{-(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{r})X_t + 2(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})M_t} \Phi\left(\frac{X_t - M_t - \tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad + g_1(t) e^{-(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{r})X_t + 2(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})M_t} \varphi\left(\frac{X_t - M_t - \tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \frac{1}{\sqrt{T-t}} \\ &\quad + (\tilde{\alpha} + \tilde{r}) \frac{2(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}} g_1(t) e^{-(\tilde{\alpha} + \tilde{r})X_t + (2\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})M_t} \Phi\left(\frac{X_t - M_t - \tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad - \frac{2(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}} g_1(t) e^{-(\tilde{\alpha} + \tilde{r})X_t + (2\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})M_t} \varphi\left(\frac{X_t - M_t - \tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \frac{1}{\sqrt{T-t}} \\ &\quad + (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} - \tilde{r}) \frac{2(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}} g_2(t) e^{(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} - \tilde{r})X_t} \Phi\left(\frac{X_t - M_t + (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad + \frac{2(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}} g_2(t) e^{(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} - \tilde{r})X_t} \varphi\left(\frac{X_t - M_t + (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \frac{1}{\sqrt{T-t}}] dW_t \\ &=: f_w(t, W_t, M_t) dW_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\tilde{E}_t &= [(\tilde{\alpha} - \tilde{r})g_1(t)e^{(\tilde{\alpha}-\tilde{r})X_t-2\tilde{\alpha}M_t}\Phi\left(\frac{M_t-X_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad - g_1(t)e^{(\tilde{\alpha}-\tilde{r})X_t-2\tilde{\alpha}M_t}\varphi\left(\frac{M_t-X_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right)\frac{1}{\sqrt{T-t}} \\
&\quad - 2\tilde{\alpha}g_1(t)e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{r})X_t}\Phi\left(\frac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad - 2(\tilde{\alpha} + \tilde{r})g_1(t)\left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}(X_t - M_t) + \tilde{\alpha}^2(T-t)\right)e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{r})X_t}\Phi\left(\frac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad + 2g_1(t)\left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}(X_t - M_t) + \tilde{\alpha}^2(T-t)\right)e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{r})X_t}\varphi\left(\frac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right)\frac{1}{\sqrt{T-t}} \\
&\quad + 2g_3(t)\tilde{\alpha}\{\tilde{r}(T-t) + X_t - M_t\}e^{-\tilde{r}X_t-\tilde{\alpha}M_t}\varphi\left(\frac{X_t-M_t}{\sqrt{T-t}}\right)\frac{1}{\sqrt{T-t}} \\
&=: h_w(t, W_t, M_t) dW_t
\end{aligned}$$

よって、複製戦略における株式と安全債券の保有単位 ϕ_t, ψ_t ($\tilde{\phi}_t, \tilde{\psi}_t$) は以下で与えられる。ただし $\tilde{\phi}_t, \tilde{\psi}_t$ は $\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\rho}}{2} = 0$ の場合に対応する。

$$\begin{aligned}
\phi_t &= \frac{f_w(t, W_t, M_t)}{\sigma e^{-rt} S_t} = \frac{1}{\sigma S} e^{rt-\sigma X_t} f_w(t, W_t, M_t) \\
\psi_t &= E_t - \phi_t e^{-rt} S_t = E_t - \frac{f_w(t, W_t, M_t)}{\sigma} \\
\tilde{\phi}_t &= \frac{h_w(t, W_t, M_t)}{\sigma e^{-rt} S_t} = \frac{1}{\sigma S} e^{rt-\sigma X_t} h_w(t, W_t, M_t) \\
\tilde{\psi}_t &= \tilde{E}_t - \phi_t e^{-rt} S_t = \tilde{E}_t - \frac{h_w(t, W_t, M_t)}{\sigma}
\end{aligned}$$

3 CGMY モデル下

本節では risk neutral modelling の考え方に従い、pricing measure Q の下で対数株価は CGMY 過程に従うと仮定し、ルックバックパワーオプションの価格評価について考察する。まず株価を $S_t := Se^{X_t}$ と定義し、 $\{X_t\}$ は Q の下でパラメーター $C, G, M > 0, 0 \leq Y < 1$ を持つ CGMY 過程に従うとする。つまり $\{X_t\}$ はガウス分散 $\Sigma = 0$ 、ドリフト $\mu_0 = 0$ 、および以下で定義されるレヴィ測度 ν を持つレヴィ過程である。

$$\nu(dx) = \frac{C}{|x|^{1+Y}} (e^{-G|x|} 1_{(-\infty, 0)}(x) + e^{-Mx} 1_{(0, \infty)}(x)) dx$$

特に $Y = 0$ の時、 $\{X_t\}$ は Variance Gamma 過程と呼ばれる ([3])。またパラメーター Y は本来 $(-\infty, 2) \setminus \{1\}$ の範囲の値を取ることが許されているが、ここでは $\{X_t\}$ が有界変動となり、かつジャンプの時点の集合が稠密となるように Y の範囲を制限していることに注意してほしい。また、割引き株価過程は Q の下でマルチンゲールでなければならないから、パラメーター C, G, M, Y には以下の制約が課せられる。

$$\begin{cases} r = C \log \frac{1}{(1-\frac{1}{M})(1+\frac{1}{G})} & , Y = 0 \text{ のとき} \\ r = C \frac{\Gamma(1-Y)}{Y} \{M^Y - (M-1)^Y + G^Y - (G+1)^Y\} & , Y \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

ちなみに一本目と二本目はそれぞれ $M > 1$, $M \geq 1$ を要求しているが, これは S_t の可積分条件に対応している. つまり以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \forall t > 0, E^Q[S_t] < \infty &\Leftrightarrow \forall t > 0, E^Q[e^{X_t}] < \infty \\ &\Leftrightarrow (Y, M) \in A_1 := [0, 1) \times [1, \infty) \setminus \{(0, 1)\} \end{aligned}$$

よって以降 $(Y, M) \in A_1$ が分析の対象となることに注意してほしい.

次に $\{X_t^{(1)}\}$ をドリフト $\gamma_0^{(1)} = 0$ および以下で定義されるレヴィ測度 $\nu^{(1)}$ を持つ increasing Lévy process, すなわち subordinator とする.

$$\nu^{(1)}(dx) = \frac{C^{1-Y}M^Y}{x^{1+Y}} e^{-Cx} 1_{(0,\infty)}(x) dx$$

一方, $\{X_t^{(2)}\}$ をドリフト $\gamma_0^{(2)} = 0$ および以下で定義されるレヴィ測度 $\nu^{(2)}$ を持つ subordinator とする.

$$\nu^{(2)}(dx) = \frac{C^{1-Y}G^Y}{x^{1+Y}} e^{-Cx} 1_{(0,\infty)}(x) dx$$

また, $\{X_t^{(1)}\}$ と $\{X_t^{(2)}\}$ は独立であるとする. このとき $\{\frac{C}{M}X_t^{(1)} - \frac{C}{G}X_t^{(2)}\}$ も, ガウス分散 Σ , ドリフト μ_0 , レヴィ測度 ν を持つレヴィ過程, すなわちパラメータ C, G, M, Y の CGMY 過程となる. 実際, $E[e^{iz(\frac{C}{M}X_1^{(1)} - \frac{C}{G}X_1^{(2)})}] = E^Q[e^{izX_1}]$ が成り立つことが容易に示せる. ちなみに $Y = 0$ のとき, $\{X_t^{(1)}\} (= \{X_t^{(2)}\})$ はパラメーター $\frac{1}{C}$ のガンマ過程と呼ばれ, その周辺分布は以下で与えられる.

$$P[X_t^{(1)} \in dx] = \frac{C}{\Gamma(Ct)} (Cx)^{Ct-1} e^{-cx} dx \quad \text{for } x > 0$$

以上をふまえてルックバックパワーオプションの価格を調べる. $M_t := \sup_{0 \leq s \leq t} X_s$ と定義すると以下を得る.

$$E^Q[e^{-rT}Z] = E^Q[e^{-rT}S_T^\alpha (\sup_{0 \leq t \leq T} S_t)^\beta] = e^{-rT} S^{\alpha+\beta} E^Q[e^{\alpha X_T + \beta M_T}]$$

まず,

$$\begin{aligned} E^Q[e^{\alpha X_T}] < \infty &\Leftrightarrow \int_{|x|>1} e^{\alpha x} \nu(dx) < \infty \\ &\Leftrightarrow (Y, M) \in A_2 := [0, 1) \times [\alpha, \infty) \setminus \{(0, \alpha)\} \end{aligned}$$

に注意すると, $(Y, M) \in A_1 \cap A_2^c$ のとき以下のようなばかげた結果を得る.

$$E^Q[e^{\alpha X_T + \beta M_T}] \geq E^Q[e^{\alpha X_T}] = \infty \Rightarrow E^Q[e^{-rT}Z] = \infty$$

次に

$$\begin{aligned} E^Q[e^{(\alpha+\beta)\frac{C}{M}X_T^{(1)}}] < \infty &\Leftrightarrow \int_{|x|>1} e^{(\alpha+\beta)\frac{C}{M}x} \nu^{(1)}(dx) < \infty \\ &\Leftrightarrow (Y, M) \in A_3 := [0, 1) \times [\alpha + \beta, \infty) \setminus \{(0, \alpha + \beta)\} \end{aligned}$$

に注意すると, $(Y, M) \in A_1 \cap A_3$ のとき以下を得る.

$$\begin{aligned} E^Q[e^{\alpha X_T + \beta M_T}] &= E[e^{\alpha(\frac{C}{M} X_T^{(1)} - \frac{C}{G} X_T^{(2)}) + \beta \sup_{0 \leq t \leq T} (\frac{C}{M} X_t^{(1)} - \frac{C}{G} X_t^{(2)})}] \\ &\leq E[e^{(\alpha + \beta) \frac{C}{M} X_T^{(1)}}] < \infty \\ \Rightarrow E^Q[e^{-rT} Z] &< \infty \end{aligned}$$

そこで以降 $(Y, M) \in A_1 \cap A_3$ についてのみ考察する.

価格計算には (X_T, M_T) の同時分布が必要になるが, その特性関数は以下で与えられる.

$$E^Q[e^{izX_T + iwM_T}] = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iu}^{c+iu} \frac{1}{q} \varphi_q^+(w+z) \varphi_q^-(z) e^{qT} dq \quad (3.1)$$

ただし, $c > 0$ は任意であり, φ_q^+, φ_q^- は以下で定義される.

$$\begin{aligned} \varphi_q^+(u) &:= \exp \left\{ \int_0^\infty t^{-1} e^{-qt} E^Q[e^{iuX_t} - 1; X_t > 0] dt \right\} \\ \varphi_q^-(u) &:= \exp \left\{ \int_0^\infty t^{-1} e^{-qt} E^Q[e^{iuX_t} - 1; X_t < 0] dt \right\} \end{aligned}$$

(3.1) の証明: まずウィーナー・ホップ分解 ([4] 定理 45.7) と呼ばれる以下の式が成り立つ.

$$\int_0^\infty e^{-qt} E^Q[e^{izX_t + iwM_t}] dt = \frac{1}{q} \varphi_q^+(w+z) \varphi_q^-(z) \quad \text{for } \forall q > 0 \quad (3.2)$$

よって上式の逆ラプラス変換が可能であることを示しさえすればよい. そこで $h(t) := E^Q[e^{izX_t + iwM_t}]$ と定義する. この時まず, $\forall t \geq 0, Q[X_{t-} = X_t = X_{t+}] = 1$ (ただし $X_{0-} := 0$) より, $h(t)$ は $[0, \infty)$ 上連続, ゆえに局所可積となる. 次に任意の $R > 0$ について, $0 \leq s < t \leq R$ とすると以下を得る.

$$\begin{aligned} |h(t) - h(s)| &\leq E^Q[|e^{iz(X_t - X_s) + iw(M_t - M_s)} - 1|] \\ &\leq |z| E^Q[|X_t - X_s|] + |w| E^Q[M_t - M_s] \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで以下を定義する.

$$J(B, \omega) := \#\{u; (u, X_u(\omega) - X_{u-}(\omega)) \in B\} \quad \text{for } B \in \mathcal{B}((0, \infty) \times \mathbf{R} \setminus \{0\})$$

このとき以下を得る.

$$\begin{aligned} E^Q[|X_t - X_s|] &= E^Q \left[\left| \int_{(s,t] \times \mathbf{R} \setminus \{0\}} x J(d(u, x), \omega) \right| \right] \\ &\leq \int_{(s,t] \times \mathbf{R} \setminus \{0\}} |x| du \nu(dx) \\ &= (t-s) CT(1-Y)(G^{Y-1} + M^{Y-1}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

よって (3.3) と (3.4) より, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = R$ について以下が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^n |h(t_i) - h(t_{i-1})| \leq |z| CT(1-Y)(G^{Y-1} + M^{Y-1})R + |w| E^Q[M_R] \quad (3.5)$$

さらに先程と同様に以下を定義する.

$$J^{(1)}(B, \omega) := \#\{u; (u, X_u^{(1)}(\omega) - X_{u-}^{(1)}(\omega)) \in B\} \quad \text{for } B \in \mathcal{B}((0, \infty) \times \mathbf{R} \setminus \{0\})$$

このとき以下を得る.

$$\begin{aligned} E^Q[M_R] &= E\left[\sup_{0 \leq t \leq R} \left(\frac{C}{M} X_t^{(1)} - \frac{C}{G} X_t^{(2)}\right)\right] \\ &\leq E\left[\sup_{0 \leq t \leq R} \frac{C}{M} X_t^{(1)}\right] = \frac{C}{M} E[X_R^{(1)}] \\ &= \frac{C}{M} E\left[\int_{(0, R] \times \mathbf{R} \setminus \{0\}} x J^{(1)}(d(u, x), \omega)\right] \\ &= \frac{C}{M} \int_{(0, R] \times \mathbf{R} \setminus \{0\}} x du \nu^{(1)}(dx) \\ &= RCM^{Y-1} \Gamma(1-Y) < \infty \end{aligned}$$

よってこの事と (3.5) より, $h(t)$ は $[0, R]$ 上有界変動である.

以上より, (3.2) の逆ラプラス変換は確かに可能である. $\square$

よってさらに (3.1) に逆フーリエ変換を施せば (X_T, M_T) の同時分布が得られ, これを用いれば価格の数値計算が可能となる. しかし言うまでもなく, そのような方法では計算効率が非常に悪い. そこで (3.1) において $iz \rightarrow \alpha$, $iw \rightarrow \beta$ と置き換えたもの, ないしその類似物を得ることが望まれるのだが, 今のところそれが可能かどうか定かではなく, この点が今後の課題となる.

参考文献

- [1] Carr, P., Geman, H., Madan, D. and Yor, M. "The fine structure of asset returns: an empirical investigation", *The Journal of Business*, Vol. 75, (2002), 305-332.
- [2] Cont, R. and Tankov, P. *Financial Modelling With Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [3] Madan, D. and Seneta, E. "The Variance Gamma (V.G.) Model for Share Market Returns", *The Journal of Business*, Vol. 63, (1990), 511-524.
- [4] Sato, K. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge, 1999.

Department of Industrial and Systems Engineering
 Faculty of Science and Engineering, Chuo University
 1-13-27, Kasuga, Bunkyo, Tokyo, Japan
 E-mail address: mendel.op.61@gmail.com

中央大学理工学部経営システム工学科 川西泰裕 藤田岳彦