

## Shift Function について

東海大学理学部情報数理学科 若井 健太郎 (Kentaro Wakai)

Department of Mathematical Sciences,  
Tokai University

$\mathbb{Q}$  は有理数全体の集合とする.  $x, y \in \mathbb{Q}^\omega$  に和  $+$  と 1 変数関数  $\sigma$  を次のように定義する.

$$(x + y)(i) = x(i) + y(i)$$

$$\sigma(x)(i) = x(i + 1)$$

つまり, 和は各成分の和,  $\sigma$  は成分を 1 つずらす関数である. この  $\sigma$  を shift function と呼ぶことにする.  $(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$  の性質について考える.

### 1 Quantifier Elimination

$(\mathbb{Q}^\omega, +)$  が divisible であることと,  $\sigma$  が  $+$  を保存することから, パラメータ  $\bar{a} \in \mathbb{Q}^\omega$  を持つ positive atomic formula は次の形をしていると考えてよい

$$\sum_{i=0}^n q_i \sigma^i(x) = t(\bar{a})$$

ただし  $q_i \in \mathbb{Q}$  で,  $t$  は term である. これを  $n$  次の多項式

$$f = \sum_{i=0}^n q_i \sigma^i \in \mathbb{Q}[\sigma]$$

を使って

$$f(x) = t(\bar{a})$$

とも書くことにする.  $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{Q}$  を任意に取り, 漸化式

$$\sum_{i=0}^n q_{m+i} b_{m+i} = t(\bar{a})_m$$

を満たすように  $b_n, b_{n+1}, \dots$  をとれば,  $(b_0, b_1, \dots)$  は  $f(x) = t(\bar{a})$  の解になる. すなわち

**Proposition 1** 任意の positive atomic formula は高々可算個の解を持つ.

$f$  が  $n$  次なら,  $b$  の最初の  $n$  項を自由にとることができる. このとき解の自由度は  $n$  であるということにする.

2 個の positive atomic formula の共通解については次のことがわかる.

**Proposition 2**  $f, g \in \mathbb{Q}[\sigma]$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}^\omega$  とする.  $h$  を  $f$  と  $g$  の最大公約数,  $f = f_0h$ ,  $g = g_0h$ ,  $f_0p + g_0q = 1$  ( $p, q \in \mathbb{Q}[\sigma]$ ) とする. このとき次は同値である.

- $f(x) = a$  と  $g(x) = b$  は共通解を持つ
- $f_0b = g_0a$

また, 共通解は  $h(x) = pa + qb$  の解になっている.

これを繰り返せば任意有限個の positive atomic formula の共通解は 1 つの positive atomic formula で表せる.

これと解の自由度を考えると次もわかる.

**Proposition 3**  $f, g_i \in \mathbb{Q}[\sigma]$ ,  $a, b_i \in \mathbb{Q}^\omega$  とする.

$$f(x) = a \wedge g_0(x) \neq b_0 \wedge \cdots \wedge g_n(x) \neq b_n$$

は

- $f(x) = a$  と  $g_i(x) = b_i$  の共通解の次数が  $f$  の次数と同じ  $i$  があれば解なし
- そうでなければ高々可算個の解をもつ

これらのことより次がわかる.

**Theorem 4**  $Th(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$  で quantifier を消去することができる.

**Corollary 5**  $(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$  は quasi-minimal,  $\omega$ -stable である. ただし quasi-minimal とは任意の definable set が countable または co-countable になることである.

また, type について次のことがわかる.

**Proposition 6**  $(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$  の complete type は次の 2 つのどちらかと同値である.  $f, g_i \in \mathbb{Q}[\sigma]$ ,  $a, b_i \in \mathbb{Q}^\omega$  とする.

- $\{f(x) = a\} \cup \{q_i(x) = b_i : i \in I\}$  (positive atomic formula 1 つとあとは negative atomic formula,  $b_i$  は  $a$  をパラメータとする positive atomic formula の解)
- $\{q_i(x) = b_i : i \in I\}$  (全部 negative atomic formula)

## 2 Saturation

type  $p = \{\sigma(x) = x\} \cup \{x \neq q(1, 1, \dots) : q \in \mathbb{Q}\}$  は  $\mathbb{Q}^\omega$  で解を持たない。パラメータは  $(1, 1, \dots)$  だけだから

**Proposition 7**  $(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$  は  $\omega$ -saturated でない。

$(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$  と同様に  $((\mathbb{Q}^n)^\omega, +, \sigma)$  も  $\text{Th}(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$  のモデルになる。  $((\mathbb{Q}^n)^\omega, +, \sigma)$  たちの間に自然な埋め込みを考えると,  $p$  は  $((\mathbb{Q}^2)^\omega, +, \sigma)$  で解を持つが,  $((\mathbb{Q}^2)^\omega, +, \sigma)$  上  $((\mathbb{Q}^2)^\omega, +, \sigma)$  で解を持たない type を作ることができる。同様に,

**Proposition 8** •  $((\mathbb{Q}^n)^\omega, +, \sigma)$  は  $\omega$ -saturated でない。

- $((\mathbb{Q}^n)^\omega, +, \sigma)$  上の type は  $((\mathbb{Q}^{n+1})^\omega, +, \sigma)$  で解を持つ。

これより

**Theorem 9**  $\cup_{i < \omega} ((\mathbb{Q}^i)^\omega, +, \sigma)$  は  $\text{Th}(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$  の quasi-minimal  $\omega$ -saturated extension.

である。また, type の形が限定されていることより

**Theorem 10** 同じ非可算濃度の  $\text{Th}((\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma))$  の quasi-minimal  $\omega$ -saturated model は同型である。

がわかる。

## 参考文献

- [IW1] Masanori ITAI and Kentaro WAKAI, *On quasi-minimal structures*, Kokyuroku of the Research Institute of Mathematical Sciences in Kyoto, vol. 1213 (2001), pp. 50-54
- [IW2] Masanori ITAI and Kentaro WAKAI, *Quasi-minimal structures and uncountable categoricity*, Proc. Sch. of Sci, Tokai Univ., Vol. 37(2002), pp. 1-8
- [IW3] Masanori ITAI and Kentaro WAKAI,  *$\omega$ -saturated quasi-minimal models of  $\text{Th}(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$* , preprint
- [ITW] Masanori ITAI, Akito TSUBOI, and Kentaro WAKAI, *Construction of saturated quasi-minimal structure*, to appear in JSL
- [MR] David Marker, **Model Theory**, Graduate Texts in Mathematics vol. 217, Springer, 2002