

不公平性の比較とミニマックス定理

小宮英敏

慶應義塾大学商学部

223-8521 横浜市港北区日吉 4-1-1

E-mail: hkomiya@fbc.keio.ac.jp

概要

経済学者は長い間所得分配の問題に興味を持ってきた。数学のある分野の結果がその所得分配の解析に応用されてきたが、その分野はそれ自身数学の対象として興味深いものでもあり、経済学との接触なしに発展してきた。また、経済学において提起された問題に触発され発展した数学の分野もある。所得分配の問題はこのような様々な数学の分野の結果によって研究されてきた。本論はこれらの様相を具体的に提示することを目的としている。

キーワード: 所得分配, ローレンツ支配, 二重確率行列, ミニマックス定理, 距離

1 序論

複数の構成員から成るひとつの社会を想定する。大きくは国とその国民を考えることもでき、小さくは少人数のある目的をもったグループを考えてもよい。話を簡明にするためにこの社会は数量で記述できるあるものを生産したとし、この社会の構成員はそれぞれその生産に対し等しい寄与をしたとする。そして生産の成果を構成員間で分け合うことを考える。寄与が等しいとしているのだから各構成員が相等しい分け前をうることが最も公平な分配と考えられる。しかし、現実には分配の不公平が起り、すべての成果を独り占めする構成員が現れるかもしれないし、ふたりの構成員が結託し全成果を山分けする可能性もある。これらすべての可能性を記述するために一般に数ベクトルが用いられる。すなわち、社会の構成員の総数を n 人とし生産成果が m 単位であるとした場合の分配は $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($\sum_{i=1}^n x_i = m, x_i \geq 0$) という数ベクトルで表現される。ここで、考察対象の社会の構成員の名前は 1 から n であり、構成員 i の生産成果の分配量は x_i で表している。 $(3, 1, 2)$ という数ベクトルは 3 人からなる社会における生産成果 6 の分配の一例である。この社会の他の分配の例としては $(2, 2, 2)$ があるが、これが最も公平な分配である。また、 $(1, 2, 3)$ という分配は $(3, 1, 2)$ という分配とは異なる。実際、構成員 1 に対し、前者は 1 を後者は 3 を分配している。しかし、社会における分配という観点からは同一の不公平性をもった分配とみなすことができる。したがって、 $(3, 1, 2)$ という分配の数学的な分析を行なう時は適当に構成員の名前である番号の順番を入れ換え $(1, 2, 3)$ という昇順に分配量である成分を並べたベクトルを使う。このようにベクトル $x = (x_1, \dots, x_n)$ の成分を小さい成分から順番に大きい成分に並べ換えたベクトルを x の並べ換えと呼び $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ と表す。したがって、 x^* と x の間には集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上の置換 π が存在し、

$$x^* = \pi x = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

と書くことができる。

分配の公平性についての議論をミニマックス定理とからめて進めていく。

2 所得分配の公平性

前節で社会における分配の公平性について記述を進めるためにベクトルを使い、公平性の議論においては分配を表わすベクトルは順列には依らずその並べ換えに注目して議論を進めればよいことを確認した。本節では話を進めて社会のふたつの分配を比べてより公平であることを定式化する。その助けとなる経済学でよくしられた概念にローレンツ曲線がある。分配 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対しまずこれの並び換え $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$ を作る。そして、各 $k (1 \leq k \leq n)$ に対し x^* の第1成分から第 k 成分までの和 $s_k = \sum_{i=1}^k x_i^*$ を計算し、平面上に点 $(k/n, s_k/s_n)$ を打ちその点を折れ線で結ぶ。この折れ線を分配 x のローレンツ曲線とよぶ。ローレンツ曲線は平面 $[0, 1] \times [0, 1]$ 内に描かれ点 $(0, 0)$ と $(1, 1)$ を結ぶことは明かである。そして、常に45度線より下にある。分配 x の各成分が等しい、すなわち、最も公平な分配の場合にはそのローレンツ曲線は45度線に一致する。分配が偏るに従ってローレンツ曲線は下に落ち込むことになる。ふたつの分配が与えられたとき、それぞれのローレンツ曲線を描き一方が他方の完全に下にあるとき、上にある分配は下にある分配より公平であると解釈し、この意味での「より公平である」という分配の間の関係を考察する。

$x = (x_1, \dots, x_n)$ と $y = (y_1, \dots, y_n)$ をふたつの R^n 内のベクトルとし、これらはある生産成果の二通りの分配の仕方を表現しているとする。この前提から $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ が成立している。 x のローレンツ曲線が y のその下にあることを定式化すると、

$$\sum_{i=1}^k x_i^* \leq \sum_{i=1}^k y_i^*, \quad k = 1, \dots, n-1$$

となる。このような関係が成立しているとき、 y は x をローレンツ支配していると言うことにし、 $x \preceq_L y$ と表記する。

さらに、分配の公平性を記述する順序である上記のローレンツの意味での公平性を拡張する。ふたつのベクトル $x, y \in R^n$ に対し、

$$\sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i, \quad k = 1, \dots, n$$

が成立する時、 $x \preceq_{GL} y$ とかく。この定義は $x \preceq_L y$ の定義から成分の総和が等しいという条件を除いただけであるが、総所得が大きい方がより好ましいという順序を考えたいために取り上げた定義である。 $x \preceq_{GL} y$ が成立しているとき、 y は x を広義ローレンツ支配しているということにする。

3 広義ローレンツ支配とゼロ和二人ゲーム

本節ではある種のゼロ和二人ゲームの値と広義ローレンツ支配との関連を議論する。 x と y をふたつの R^n のベクトルとする。この x と y からゼロ和二人ゲームを構成し、その値が x と

y の広義ローレンツ支配性と密接に関係していることを示す。

記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で R^n のユークリッド内積を表すことにする。すなわち、 $\langle \lambda, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ である。 x^* はこれまでと同様に x の昇順の並び換えを表し、 x_* は降順の並び換えとする。

x と y を R^n のふたつのベクトルとする。このとき、次のような有限ゼロ和二人ゲーム $G_{x,y}$ を定義する。第一プレーヤの戦略集合は $N = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。すなわち、第一プレーヤの戦略はベクトルの成分を選ぶことである。第二プレーヤの戦略集合は N の置換全体の集合 Π とする。すなわち、第二プレーヤの戦略はベクトルの成分の並べ換えの仕方を選ぶことである。最後に第一プレーヤの利得関数 $u_{x,y} : N \times \Pi \rightarrow R$ を

$$u_{x,y}(i, \pi) = (\pi x - y)_i, \quad (i, \pi) \in N \times \Pi.$$

と定義する。このゲームでは第一プレーヤは成分の選択を、第二プレーヤは成分の並べ換えを考えることにより、第一プレーヤは選んだ x と y の成分の差をなるべく大きくしたく思っており、第二プレーヤはなるべく小さくしたく思っている状況を考えている。ゼロ和二人ゲーム $G_{x,y}$ の混合拡張を $\hat{G}_{x,y} = (\Delta_N, \Delta_\Pi, \hat{u}_{x,y})$ とする。すなわち、 Δ_N, Δ_Π はそれぞれ N および Π 上の確率分布全体の集合であり、

$$\hat{u}_{x,y}(\lambda, \mu) = \sum_{i \in N} \sum_{\pi \in \Pi} \lambda_i \mu_\pi u_{x,y}(i, \pi), \quad \lambda \in \Delta_N, \mu \in \Delta_\Pi$$

である。この利得関数は λ および μ に関して線形であり、 Δ_N と Δ_Π は共にコンパクトなのでミニマックス等式

$$\max_{\lambda \in \Delta_N} \min_{\mu \in \Delta_\Pi} \hat{u}_{x,y}(\lambda, \mu) = \min_{\mu \in \Delta_\Pi} \max_{\lambda \in \Delta_N} \hat{u}_{x,y}(\lambda, \mu)$$

が成立する。また、二重確率行列に関するよく知られた Birkhoff の定理より Δ_Π は二重確率行列すべてからなる集合 $\mathcal{D}_n$ と同一視できるので、 $\hat{u}$ を書き下して、上記のミニマックス等式は

$$\max_{\lambda \in \Delta_N} \min_{D \in \mathcal{D}_n} \langle \lambda, xD - y \rangle = \min_{D \in \mathcal{D}_n} \max_{\lambda \in \Delta_N} \langle \lambda, xD - y \rangle$$

と書き直せる。線形関数は凸集合上で最大値または最小値をとるとすると、端点でもその最大値または最小値をとっているの、さらに

$$\max_{\lambda \in \Delta_N} \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda, \pi x - y \rangle = \min_{D \in \mathcal{D}_n} \max_{i \in N} (xD - y)_i$$

と書き直せる。このミニマックス等式の値はゲーム $\hat{G}_{x,y}$ の値と呼ばれる。これを $v(\hat{G}_{x,y})$ と書くことにする。以上の準備の下に次の定理が成立する。

定理 1 R^n の任意のふたつのベクトル x と y に対して、 $x \preceq_{GL} y$ が成立することと $v(\hat{G}_{x,y}) \leq 0$ が成立することは同値である。

証明 まず x と y は共に R_{++}^n の要素である場合の証明を行なう。 $x \preceq_{GL} y$ を仮定する。 λ を Δ_N の任意の要素とする。このとき、不等式

$$\langle \lambda, y \rangle \geq \langle \lambda_*, y^* \rangle \geq \langle \lambda_*, x^* \rangle = \langle \pi' \lambda, \pi'' x \rangle = \langle \lambda, \pi'^{-1}(\pi'' x) \rangle$$

をうる。ここで、 π' と π'' は N のある置換である。したがって、 $\pi = \pi'^{-1} \circ \pi'' \in \Pi$ とおけば、 $\langle \lambda, \pi x - y \rangle \leq 0$ をうる。これより $\min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda, \pi x - y \rangle \leq 0$ となる。 $\lambda \in \Delta_N$ は任意だったので、

$$v(\hat{G}_{x,y}) = \max_{\lambda \in \Delta_N} \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda, \pi x - y \rangle \leq 0$$

が成立する。

逆に $v(\hat{G}_{x,y}) \leq 0$ を仮定する。 $v(\hat{G}_{x,y}) \leq 0$ の定義より

$$\min_{D \in \Delta_\Pi} \max_{i \in N} (xD - y)_i \leq 0,$$

が成立するが、これよりすべての $i = 1, 2, \dots, n$ に対して、 $(xD)_i \leq y_i$ が成立するような二重確率行列 D が存在する。 x は R_{++}^n の要素であると仮定しているのので、すべての $i = 1, 2, \dots, n$ に対し $(xD)_i > 0$ が成立する。 $i = 1, 2, \dots, n$ に対し $\alpha_i = y_i / (xD)_i \geq 1$ とおき、 n 次正方形行列 S を $S = (\alpha_1 d_1, \alpha_2 d_2, \dots, \alpha_n d_n)$ と定義をする。ここで、 d_i は D の第 i 列を表している。すると、 S は二重優確率行列であることは明らかで、 $xS = y$ が成立する。したがって、 $x \preceq_{\text{GL}} y$ となる。

以上で $x, y \in R_{++}^n$ の場合には定理が成立することが確認できた。一般の $x, y \in R^n$ については、十分大きな $\alpha > 0$ をとり $x + \alpha e, y + \alpha e \in R_{++}^n$ が成立するようにする。 $x \preceq_{\text{GL}} y$ と $x + \alpha e \preceq_{\text{GL}} y + \alpha e$ は同値であり、 $v(\hat{G}_{x,y}) = v(\hat{G}_{x+\alpha e, y+\alpha e})$ が成立するので、証明が完了する。Q.E.D.

系 1 R^n の任意のふたつのベクトル x と y に対して、 $x \preceq_L y$ が成立することと $v(\hat{G}_{x,y}) = 0$ かつ $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ が成立することは同値である。特に、もし $x^* = y^*$ ならば $v(\hat{G}_{x,y}) = 0$ である。

証明 $x \preceq_L y$ を仮定する。定理 1 より $v(\hat{G}_{x,y}) \leq 0$ が成立する。もし $v(\hat{G}_{x,y}) < 0$ とすると、 $\min_{D \in \Delta_\Pi} \max_{i \in N} (xD - y)_i < 0$ が成立するので、二重確率行列 D が存在し、すべての $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $(xD - y)_i < 0$ が成立する。このとき、 $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (xD)_i < \sum_{i=1}^n y_i$ が成立するが、これは $x \preceq_L y$ に矛盾する。

逆に、 $v(\hat{G}_{x,y}) = 0$ かつ $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ であると仮定する。上記と同じ議論で、二重確率行列 D が存在し、すべての $i = 1, 2, \dots, n$ に対し $(xD)_i \leq y_i$ が成立する。 $\sum_{i=1}^n (xD)_i = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ なので、 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $(xD)_i = y_i$ である。すなわち、 $xD = y$ が成立するので $x \preceq_L y$ がでる。Q.E.D.

系 2 $x^* \neq y^*$ である R^n の任意のふたつのベクトル x と y に対して、 $x \preceq_{\text{GL}} y$ であることと $v(\hat{G}_{x,y}) \leq 0 < v(\hat{G}_{y,x})$ が成立することは同値である。

証明 $x^* = y^*$ が成立することと $x \preceq_{\text{GL}} y$ かつ $y \preceq_{\text{GL}} x$ が成立することが同値であることに注意すれば定理 1 より明らかである。Q.E.D.

4 ゲームの値と距離

第3節では広義ローレンツ支配とゼロ和二人ゲームの関係を議論した。本節ではそこでえられた結果を基に広義ローレンツ支配と密接に関連する距離を定義し、それらの基本性質を考察する。 $R^n \times R^n$ 上の実数値関数 δ をゲームの値を使い以下のように定義をする。

$$\delta(x, y) = v(\widehat{G}_{x, y}).$$

まず、関数 δ は三角不等式を満たしていることを証明する。

命題 1 R^n の任意の三つの要素 x, y, z に対して、

$$\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z).$$

が成立する。

証明 $\delta(x, z) = \max_{\lambda \in \Delta_N} \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda, \pi x - z \rangle$ が成立しているので、 $\delta(x, z) = \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda', \pi x - z \rangle$ となる $\lambda' \in \Delta_N$ が存在する。 Π 内の任意の置換 π' をとり固定して考える。このとき、以下の等式が成立する。

$$\begin{aligned} \delta(x, z) &= \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda', \pi x - \pi' y + \pi' y - z \rangle \\ &= \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda', \pi x - \pi' y \rangle + \langle \lambda', \pi' y - z \rangle \\ &= \min_{\pi \in \Pi} \langle \pi'^{-1} \lambda', (\pi'^{-1} \circ \pi) x - y \rangle + \langle \lambda', \pi' y - z \rangle \\ &= \min_{\pi \in \Pi} \langle \pi'^{-1} \lambda', \pi x - y \rangle + \langle \lambda', \pi' y - z \rangle \\ &\leq \max_{\lambda \in \Delta_N} \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda, \pi x - y \rangle + \langle \lambda', \pi' y - z \rangle \\ &= \delta(x, y) + \langle \lambda', \pi' y - z \rangle. \end{aligned}$$

$\pi' \in \Pi$ を任意にとったので、

$$\begin{aligned} \delta(x, z) - \delta(x, y) &\leq \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda', \pi y - z \rangle \\ &\leq \max_{\lambda \in \Delta_N} \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda, \pi y - z \rangle \\ &= \delta(y, z) \end{aligned}$$

が成立し、 $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$ となる。Q.E.D.

次に上で定義した δ を使い R^n 上の距離を定義し、その基本的な性質を調べる。 $R^n \times R^n$ 上の実数値関数 d を

$$d(x, y) = \delta(x, y) \vee \delta(y, x)$$

で定義する。次の定理 2 は d はほとんど距離の公理を満足していることを示している。

定理 2 R^n の任意の三つの要素 x, y, z に対して, 関数 d は次の性質をもつ.

1. $d(x, y) \geq 0$ が成立し, $d(x, y) = 0$ であるための必要十分条件は $\pi x = y$ となる N の置換 π が存在することである;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;
4. もし $x \preceq_{GL} y \preceq_{GL} z$ ならば,

$$d(x, y) \leq d(x, z) \quad \text{かつ} \quad d(y, z) \leq d(x, z).$$

が成立する.

証明

1. 系 2 より明らかである.
2. d の定義から明らかである.
3. 命題 1 から直接でる.
4. 次の不等式が最初の主張を示している.

$$d(x, y) = \delta(y, x) \leq \delta(y, z) + \delta(z, x) \leq \delta(z, x) = d(x, z).$$

同様にして $d(y, z) \leq d(x, z)$ をうる.

Q.E.D.

次の命題は d の基本的な性質を述べている.

命題 2 R^n の任意の要素 x, y と任意の実数 α に対して, 次の主張が成立する.

1. $d(x + \alpha e, y + \alpha e) = d(x, y)$;
2. もし $\alpha \geq 0$ ならば, $d(\alpha x, \alpha y) = \alpha d(x, y)$;
3. Π 内の任意の置換の π と π' に対し, $d(\pi x, \pi' y) = d(x, y)$ が成立する.

証明 第一と第二の主張は, 対応する関数 δ の性質を考えれば明らかである. 第三の主張は d の性質から明らかである. Q.E.D.

5 典型的な所得分配間の距離

本節では典型的な所得分配間の距離を与える。ページの都合上各命題の証明は省略する。

e ですべての成分が1である R^n のベクトルを表し, e_n で最後の成分が1で他のすべての成分が0である R^n のベクトルを表す。したがって, e と ne_n はすべての成分が非負で成分の総和が n であるベクトルである。このような性質をもつベクトルの集合を F_n と書くことにする。すなわち,

$$F_n = \{x \in R^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \text{ そして } \sum_{i=1}^n x_i = n\}$$

である。さらに, n に必ずしも等しくない r についても F_r という記号を使うことにする。すなわち, $F_r = \{x \in R^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \text{ かつ } \sum_{i=1}^n x_i = r\}$ である。以下では集合 F_n の性質を調べていく。次の命題は F_n の要素間の距離は高々1であり, 最大の距離1は F_n の中でローレンツ支配の意味で最も極端な分配である e と ne_n によって達成されることを主張しており, 前節で定義した距離がローレンツ支配を記述する距離として妥当と考えられるひとつの根拠となる。

命題 3 1. 任意の $x, y \in F_n$ に対して $d(x, y) \leq 1$ が成立する。

2. 任意の $x \in F_n$ に対して $d(ne_n, x) = \frac{1}{n-1}(n - \max_{i \in N} x_i)$ が成立する。したがって, $x \in F_n$ に対して, $d(ne_n, x) = 1$ であるための必要十分条件は $x = e$ である。

3. 任意の $x \in F_n$ に対して, $d(e, x) = 1 - \min_{i \in N} x_i$ が成立する。したがって, $x \in F_n$ に対して, $d(e, x) = 1$ であるための必要十分条件は $\min_{i \in N} x_i = 0$ である。

R^n 内のよく知られた線分について考えてみる。 R^n のふたつのベクトル x と y を結ぶ線分 $[x, y]$ は通常

$$[x, y] = \{(1-s)x + sy : 0 \leq s \leq 1\}$$

と R^n の線形構造を使い定義される。次のユークリッド距離 $d_E(d_E(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle})$ を使った線分 $[x, y]$ の特徴付けは容易に確認できる。

$z \in [x, y]$ であるための必要十分条件は $d_E(x, z) + d_E(z, y) = d_E(x, y)$ が成立することである

この特徴付けからの示唆により, ne_n と e を結ぶ F_n 内の線分 L_n を我々が定義した距離 d を使い

$$L_n = \{x \in F_n : d(ne_n, x) + d(x, e) = d(ne_n, e)(= 1)\}$$

と定義する。次の命題は L_n の要素の形を明示している。

命題 4 L_n を上で定義された ne_n と e を結ぶ F_n 内の線分とし, $x \in F_n$ とする。このとき, x が L_n に属するための必要十分条件は, x は $(n-1)$ 個の相等しい成分をもちそれは残りのひとつの成分以下であることである。

最後に隣り合う所得レベルの構成員の間で所得の移転が起きた場合に生じる距離と所得分配の割合は変わらずに生産成果の総量が増加した場合に生じる距離を求める。

命題 5 x を F_n の要素とする.

1. $x_k^* < x_{k+1}^*$ とし, $x_k^* + t \leq x_{k+1}^* - t$ なる $t > 0$ をとる. $x' \in F_n$ を以下で定義されるベクトルとする: $i \neq k$ かつ $i \neq k+1$ なる i に対して, $x'_i = x_i^*$ とし, $x'_k = x_k^* + t$, $x'_{k+1} = x_{k+1}^* - t$ とする. このとき,

$$d(x, x') = \frac{t}{k}$$

が成立する.

2. $r > 0$ としたとき,

$$d(x, (1+r)x) = r$$

が成立する.

もし社会厚生を我々の距離を用いて測るならば, 分配レベルが $(k+1)$ 番目の構成員から k 番目の構成員へ t だけ移転することにより公平性を目指すことと分配の割合は変化させずに生産成果を $(1+t/k)$ 倍にすることは同じ社会厚生を増加をもたらすと命題 5 は解釈できる.

参考文献

- [1] Birkhoff, G.: Tres Observaciones sobre el Álgebra Lineal, Univ. Nac. Tucumán Rev. Ser. A 5, 147–151 (1946).
- [2] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Pólya, : Inequalities 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London and New York, 1952.
- [3] 川又邦雄, 市場機構と経済厚生, 創文社, 1991.
- [4] Komiyama, H.: On Infinite Doubly Substochastic Matrices, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 61, 119–128 (1982).
- [5] Lorenz, M.O.: Methods of measuring concentration of wealth, J. Amer. Statist. Assoc. 9, 209–219 (1905).
- [6] Marshall, A.W., Olkin, I.: Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Academic Press, New York, 1979.
- [7] Shorrocks, A.F.: Ranking Income Distributions, Economica 50, 3–17 (1983).
- [8] Sion, M.: On General Minimax Theorems, Pacific J. Math. 8, 171–176 (1958).