

Majorization による norm の評価

北大応電研 安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)

§1. 目標と準備.

以下では $(n$ 行 n 列) の行列の全体を $M = M_n$ であらわし, Hermitian 行列の全体を H , skew-Hermitian の全体を SH で, また unitary の全体を U であらわす.

正規行列 A の固有値を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ としたとき, これを対角線上に並べた対角行列を $Eig(A)$ とかく. $\{1, 2, \dots, n\}$ の置換 σ に対して $\{\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_n}\}$ からできる対角行列を $Eig_{\sigma}(A)$ とかく.

われわれの問題は, M に norm $\|\cdot\|$ が与えられたときに,

$$\|A - B\| \leq \gamma \cdot \max_{\sigma} \|Eig(A) - Eig_{\sigma}(B)\| \quad (1)$$

が (n に無関係に) 全ての正規行列 A, B に成り立つような γ の最小値をおよび

$$\min_{\sigma} \|Eig(A) - Eig_{\sigma}(B)\| \leq \delta \|A - B\| \quad (2)$$

となる δ の最小値を評価しようということにある.

norm があまり一般であると, n に無関係な γ, δ の評

価は難かしいし、また実際的でないので、以下では unitarily invariant な norm のみを考察する。ここで norm $\|\cdot\|$ が unitarily invariant とは

$$\|UTV\| = \|T\| \quad (T \in M; U, V \in \mathcal{U})$$

が成り立つときを言う。よく知られたように ([5], [9], [10], [12]) そのような norm は $\mathbb{R}_+^n$ 上の symmetric gauge function φ と

$$\|T\| = \varphi(\lambda_1(T), \dots, \lambda_n(T)) \quad (T \in M) \quad (3)$$

の関係で一対一に対応している。ここで $\{\lambda_j(T)\}_j$ は T の特異値、すなわち $|T| = (T^*T)^{1/2}$ の固有値である。最も親しまれる p -norm は φ として $\varphi(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j=1}^n t_j^p$ ($1 \leq p < \infty$ のとき), $= \max_j t_j$ ($p = \infty$ のとき) をとったものである。 φ と (3) で結びつく norm を明示するため $\|\cdot\|_\varphi$ とかく、特に

$$\|T\|_p = \begin{cases} \left\{ \sum_j \lambda_j(T)^p \right\}^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \max_j \lambda_j(T) & (p = \infty) \end{cases}$$

である。

norm $\|\cdot\|_\varphi$ に関する (1), (2) の optimal な γ, δ をそれぞれ $\gamma_\varphi, \delta_\varphi$ と書く。特に p -norm に対しては γ_p, δ_p とかく。正規行列 A, B を、例えば $\mathbb{H}$ に制限したときの optimal な γ, δ を $\gamma_\varphi(\mathbb{H}, \mathbb{H}), \delta_\varphi(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ であらわす。同様に $\gamma_\varphi(\mathcal{U}, \mathcal{U}), \gamma_\varphi(\mathbb{H}, \mathbb{S}\mathbb{H}), \dots$ 等が考えられる。

正規行列 A の unitary 軌道 $= \{V^*AV : V \in U\}$ を $A(U)$ と書く。 A の V^*AV の固有値は同じであるから (1), (2) の関係から,

$A(U)$ と $B(U)$ の $\|\cdot\|_p$ による最長距離 $\leq \delta_p \max_{\sigma} \|E_{\sigma}(A) - E_{\sigma}(B)\|_p$ かつ

$A(U)$ と $B(U)$ の $\|\cdot\|_p$ による最短距離 $\geq \delta_p^{-1} \min_{\sigma} \|E_{\sigma}(A) - E_{\sigma}(B)\|_p$ が出る。

unitary invariant な norm に関する不等式を導くのに majorization の考えが有効であることがよく知られている ([1], [5], [9])。 $\mathbb{R}^n$ の vector $x = \{x_j\}_j$, $y = \{y_j\}_j$ に対して majorization $x \prec y$ が成り立つとは

$$\sum_{j=1}^k x_{[j]} \leq \sum_{j=1}^k y_{[j]} \quad (k=1, \dots, n-1) \quad \text{かつ} \quad \sum_{j=1}^n x_{[j]} = \sum_{j=1}^n y_{[j]}$$

のときである。 ここで $\{x_{[j]}\}_j$ は $\{x_j\}_j$ を減少順に並べ替えたものである。 上で最後の等式を不等式にしたときには sub-majorization と呼ぶ $x \prec\prec y$ と書く。

majorization に関する基本的な性質として次が有用である ([1], [5], [8]): $f(t)$ が x_j, y_j すべてを含む区間で凸なら

$$x \prec y \Rightarrow \{f(x_j)\}_j \prec \{f(y_j)\}_j \Rightarrow \sum_{j=1}^n f(x_j) \leq \sum_{j=1}^n f(y_j). \quad (4)$$

$g(t)$ がそのような区間で凹関数なら, $-g(t)$ を考えて (4) より

$$x \prec y \Rightarrow \sum_{j=1}^n g(x_j) \geq \sum_{j=1}^n g(y_j). \quad (5)$$

sub-majorization に関しては, $f(t)$ が 増加, 凸 ならば

$$x \prec y \Rightarrow \{f(x_j)\} \prec \{f(y_j)\} \Rightarrow \sum_1^n f(x_j) \leq \sum_1^n f(y_j). \quad (6)$$

symmetric gauge function φ の関係では ([1], [5], [9])

$$x, y \in \mathbb{R}_+^n, x \prec y \Rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) \leq \varphi(y_1, \dots, y_n)$$

したがって (3) より

$$\Delta(S) \prec \Delta(T) \Rightarrow \|S\|_\varphi \leq \|T\|_\varphi. \quad (7)$$

A が Hermitian のときは固有値は実数であるから、これを減少順に番号をつけたとき $\lambda^\downarrow(A)$ であらわし、増加順に番号をつけたとき $\lambda^\uparrow(B)$ と書く。 A, B が共に Hermitian のとき、 $A, B, A+B$ の固有値の間 基本的な関係は次の Lidskii - Wielandt の定理 ([1], [7], [5]) で規定される。

$$\lambda^\downarrow(A) + \lambda^\uparrow(B) \leq \lambda^\downarrow(A+B) \leq \lambda^\downarrow(A) + \lambda^\downarrow(B). \quad (8)$$

S, T が一般の行列のときは、次の関係はよく知られている ([1], [5])

$$\lambda^\downarrow(S+T) \leq \lambda^\downarrow(S) + \lambda^\downarrow(T). \quad (9)$$

ここで $\lambda^\downarrow(S)$ は S の特異値を減少順に番号をつけたものである。

この報告では、これ等の majorization 関係を援用して $\tau_\varphi, \delta_\varphi$ の評価に関して幾つかの情報を与えようとするものであるが、まだ最終的なものとは言えない。

なお §2 の内容は北大応電研中村美浩氏との、§§3-4 の内容はインド統計研究所 R. Bhatia 教授との討論に基づいている。

§2. 一般の正規行列 A, B の場合.

先づ A, B が共に Hermitian のときは (8) に凸関数
 (4) を適用し (4) を使うと

$$|\lambda^{\downarrow}(A) - \lambda^{\uparrow}(B)| \leq |\lambda^{\downarrow}(A-B)| \leq |\lambda^{\downarrow}(A) - \lambda^{\downarrow}(B)|$$

となるから (7) により次がわかる

$$\delta_{\varphi}(\|H\|) = \gamma_{\varphi}(\|H\|, \|H\|) = 1. \quad (10)$$

一般の正規行列の場合も, スペクトル分解と majorization より
 Hoffman-Wielandt [6] は Hilbert-Schmidt norm $\|\cdot\|_2$ に

$$\delta_2 = \gamma_2 = 1 \quad (11)$$

を示した. 一方 Bhatia-Davis-McIntosh [3] は Fourier
 解析, combinatorics を巧みに使って

$$\delta_{\infty} \leq \text{const} < \pi \quad (12)$$

を得ている.

[定理 1] $\gamma_{\varphi} \leq 2.$

証明. $\text{Re}(A), \text{Re}(B)$ に対して (10) をよび (1) を使って

$$\|\text{Re}(A) - \text{Re}(B)\|_{\varphi} \leq \max_{\sigma} \|E_{\varphi}(\text{Re}(A)) - E_{\varphi\sigma}(\text{Re}(B))\|_{\varphi}.$$

A, B が正規なことから

$$E_{\varphi}(\text{Re}(A)) = \text{Re}(E_{\varphi}(A)), \quad E_{\varphi\sigma}(\text{Re}(B)) = \text{Re}(E_{\varphi\sigma}(B))$$

であり結局

$$\|\text{Re}(A) - \text{Re}(B)\|_{\varphi} \leq \max_{\sigma} \|E_{\varphi}(A) - E_{\varphi\sigma}(B)\|_{\varphi}. \quad (13)$$

となる. $\text{Im}(A) - \text{Im}(B)$ にも同様で, それ等を加えるとよい. ■

p -norm に関しては, 上の定数 2 は改良の余地がある. これを実行するため, 一般の行列 $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ の $\operatorname{Re}(T)$, $\operatorname{Im}(T)$ の p -norm の関連を調べよう. ここで基本的な関係式は

$$|\operatorname{Re}(T)|^2 + |\operatorname{Im}(T)|^2 = |T|^2 + |T^*|^2 \quad (14)$$

である. $\operatorname{Re}(T)$, $\operatorname{Im}(T)$ の固有値を $\{\lambda_j\}_j$, $\{\mu_j\}_j$ とし

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|, \quad |\mu_1| \geq \dots \geq |\mu_n|$$

とし, $\Delta^\downarrow(T) = \Delta^\downarrow(T^*)$ に注意すると, Lidskii-Wielandt の式 (8) より

$$\{|\lambda_j|^2 + |\mu_{n-j+1}|^2\}_j < \{\Delta_j^2\}_j \quad (15)$$

$$\{(\Delta_j^2 + \Delta_{n-j+1}^2)/2\}_j < \{|\lambda_j|^2 + |\mu_j|^2\}_j \quad (16)$$

が出る. ここで $\Delta^\downarrow(T) = \{\Delta_j\}_j$ である.

$p \geq 2$ のときは凸関数 $t^{p/2}$ を (16) に適用して, (4) より

$$\begin{aligned} 2^{p/2} \sum_{j=1}^n (\Delta_j^2 + \Delta_{n-j+1}^2)^{p/2} &\leq \sum_{j=1}^n \{|\lambda_j|^2 + |\mu_j|^2\}^{p/2} \\ &\leq 2^{p/2-1} \sum_{j=1}^n (|\lambda_j|^p + |\mu_j|^p) \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad \sum_{j=1}^n (\Delta_j^2 + \Delta_{n-j+1}^2)^{p/2} \geq \sum_{j=1}^n (\Delta_j^p + \Delta_{n-j+1}^p) = 2 \sum_{j=1}^n \Delta_j^p$$

であるから

$$\|T\|_p^p \leq 2^{p-2} \{\|\operatorname{Re}(T)\|_p^p + \|\operatorname{Im}(T)\|_p^p\}. \quad (17)$$

$2 \geq p \geq 1$ のときは凹関数 $t^{p/2}$ を (15) に適用して, (5) より

$$\|\operatorname{Re}(T)\|_p^p + \|\operatorname{Im}(T)\|_p^p \geq \|T\|_p^p \quad (18)$$

が出る.

【定理2】 $\gamma_p \leq \max(2^{1/p}, 2^{1-1/p})$.

証明. $T = A - B$ に (17), (18) を適用し, (13) を使えばよい. ■

この評価では $\gamma_1 = \gamma_\infty = 2$ となり定理1よりよくなっていない. γ_∞ に関しては次が成り立つ.

【定理3】 $\gamma_\infty \leq \sqrt{2}$.

証明. n^2 行 n^2 列行列 $A \otimes I - I \otimes^t B$ を考える. これは正規で, A, B の固有値を $\{\lambda_j\}_j, \{\mu_k\}_k$ とすると

$$\begin{aligned} \max_{j,k} \| \text{Eig}(A) - \text{Eig}(B) \|_\infty &= \max_{j,k} |\lambda_j - \mu_k| \\ &= \| A \otimes I - I \otimes^t B \|_\infty \end{aligned}$$

であるから, 一般に

$$\| A - B \|_\infty \leq \sqrt{2} \| A \otimes I - I \otimes^t B \|_\infty$$

すなわち

$$| \langle (A-B)x, y \rangle | \leq \sqrt{2} \| A \otimes I - I \otimes^t B \|_\infty \| x \| \| y \| \quad (19)$$

が全ての vector x, y に成り立つことを示せばよい.

M の線形写像 Δ を

$$\Delta(T) = AT - TB$$

で定義すると

$$\langle (A-B)x, y \rangle = \text{tr} \Delta(x \otimes \bar{y}). \quad (20)$$

ここで $x \otimes \bar{y}$ は rank 1 の行列 $[x_i \bar{y}_j]$ である. $\Delta(x \otimes \bar{y})$ が rank ≤ 2 に着目すると

$$\| \Delta(x \otimes \bar{y}) \|_1 \leq \sqrt{2} \| \Delta(x \otimes \bar{y}) \|_2$$

であるから, (20) より

$$|\langle (A-B)x, y \rangle| \leq \|\Delta(x \otimes \bar{y})\|_1 \leq \sqrt{2} \|\Delta(x \otimes \bar{y})\|_2.$$

一方

$$\|A \otimes I - I \otimes B\|_\infty = \Delta \text{ の } (M, \|\cdot\|_2) \text{ に関する operator norm}$$

であるから

$$\begin{aligned} \|\Delta(x \otimes \bar{y})\|_2 &\leq \|A \otimes I - I \otimes B\|_\infty \|x \otimes \bar{y}\|_2 \\ &= \|A \otimes I - I \otimes B\|_\infty \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

となり, (19) が出る. ■

§3. A が Hermitian かつ B が skew-Hermitian の場合.

A, B の固有値を $\{\lambda_j\}_j, \{\mu_j\}_j$ とし

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|, \quad |\mu_1| \geq \dots \geq |\mu_n|$$

とする. A が Hermitian なることから λ_j は実数, B が skew-Hermitian なることから μ_j は純虚数となるので

$$|\lambda_j - \mu_k|^2 = |\lambda_j|^2 + |\mu_k|^2 \quad (j, k = 1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

となることに注意する.

【定理4】 $\gamma_g(H, SH) \leq \sqrt{2}$ また $\delta_g(H, SH) \leq 2$.

証明. (9) と (21) から

$$\begin{aligned} \lambda^\downarrow(A-B) &\prec \lambda^\downarrow(A) + \lambda^\downarrow(B) = \{|\lambda_j| + |\mu_j|\}_j \\ &= \sqrt{2} \{|\lambda_j - \mu_j|\}_j \end{aligned}$$

がでて, (7) より $\gamma_g(H, SH) \leq \sqrt{2}$ がわかる. $\delta_g(H, SH)$ の

評価は, (9) より

$$\{|\lambda_j|\}_j = \Delta^\downarrow(A) \prec \{\Delta^\downarrow(A-B) + \Delta^\downarrow((A-B)^*)\}/2 = \Delta^\downarrow(A-B),$$

同様に $\{|\mu_j|\}_j \prec \Delta^\downarrow(A-B)$ が成り

$$\{|\lambda_j - \mu_j|\}_j \leq \{|\lambda_j| + |\mu_j|\}_j \prec \Delta^\downarrow(A-B)$$

となり, (7) から導かれる。■

$\delta_g(H, SH)$ の評価は $\sqrt{2}$ まで改良出来る予想される。

$\delta_\infty(H, SH) = 1$ は Sunder [13] が示したが, 一般の p -norm に関し

【定理 5】 $\delta_p(H, SH) \leq \max(1, 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}})$ また $\delta_p(H, SH) \leq \max(1, 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}})$

証明. (21) に注意すると (15), (16) と同様に

$$\{|\lambda_j - \mu_{n-j+1}|^2\}_j \prec \{\Delta_j^2\} \quad (22)$$

$$\{(\Delta_j^2 + \Delta_{n-j+1}^2)/2\} \prec \{|\lambda_j - \mu_j|^2\}_j \quad (23)$$

が出る。そこで $\Delta^\downarrow(A-B) = \{\Delta_j\}_j$ とする。

$p \geq 2$ のとき $t^{\frac{1}{2}}$ は凸関数であるから (23) と (4) より

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j - \mu_{n-j+1}|^p \leq \sum_{j=1}^n \Delta_j^p$$

となり $\delta_p(H, SH) = 1$ がわかる。また (23) と (4) より

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |\lambda_j - \mu_j|^p &\geq 2^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n (\Delta_j^2 + \Delta_{n-j+1}^2)^{\frac{p}{2}} \\ &\geq 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n (\Delta_j^p + \Delta_{n-j+1}^p) = 2^{1-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n \Delta_j^p \end{aligned}$$

となり, $\delta_p(H, SH) \leq 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ が出る。

$1 \leq p \leq 2$ のときは凹関数 $t^{\frac{1}{2}}$ を (22), (23) に適用して

(5) を使うことにより次が出ることよりわかる:

$$\sum_{j=1}^n \Delta_j^p \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j - \mu_{n-j+1}|^p, \quad \sum_{j=1}^n |\lambda_j - \mu_j|^p \leq 2^{1-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n \Delta_j^p. \quad \blacksquare$$

§4. A, B が共に unitary の場合.

Bhatia - Davis [2] および Bhatia - Holbrook [4] は

$$\delta_{\infty}(U, U) = 1 \quad \text{および} \quad \delta_q(U, U) \leq \pi/2 \quad (24)$$

を示し, さらに trace norm $\|\cdot\|_1$ に関しては定数 $\pi/2$ が最良なことも証明した.

以下では, unitary で固有値がすべて上半平面にあるものの全体を U_+ で, またさらに全ての固有値が第一象限にあるものの全体を U_{++} であらわす.

unitary の組に対して Lidskii - Wielandt の関係式の役割を果たすのが次の Nudelman - Szvartzman ([11], [14]) である.

A, B が unitary で, その固有値を $\{e^{i\alpha_j}\}_j, \{e^{i\beta_j}\}_j$ として

$$\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n, \quad \beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n \quad (25)$$

とある. もし

$$(\alpha_1 - \alpha_n) + (\beta_1 - \beta_n) < 2\pi$$

であれば unitary AB の固有値 $\{e^{i\theta_j}\}_j$ の偏角 $\{\theta_j\}_j$ は区間 $[\alpha_n + \beta_n, \alpha_1 + \beta_1]$ の中に選ぶことができる. このとき

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_n \geq \alpha_n + \beta_n$$

とあると, 次の majorization が成り立つ:

$$\{\theta_j - \beta_j\}_j < \{\alpha_j\}_j \quad (26)$$

$$\text{したがって} \quad \{\theta_j\}_j < \{\alpha_j + \beta_j\}_j \quad (27)$$

【定理6】 $\gamma_g(\mathcal{U}_+, \mathcal{U}_+) \leq \pi/2$ また $\gamma_g(\mathcal{U}_{++}, \mathcal{U}_{++}) \leq \pi/2\sqrt{2}$.

証明. A, B の固有値 $\{e^{i\alpha_j}\}_j, \{e^{i\beta_j}\}_j$ とし

$$\pi \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0, \quad \pi \geq \beta_1 \geq \dots \geq \beta_n \geq 0$$

とする. B^* の固有値は $\{e^{-i\beta_{n-j+1}}\}_j$ であるから AB^* の固有値 $\{e^{i\theta_j}\}_j$ を

$$\pi \geq \theta_1 \geq \dots \geq \theta_n \geq -\pi$$

とし, Nudelman - Svarzman (27) で β_j の代りに $-\beta_{n-j+1}$ を使って, 凸関数 $|t|$ を適用して (4) より

$$\{| \theta_j | \}_j \prec \{ | \alpha_j - \beta_{n-j+1} | \}_j \quad (28)$$

が出る. 一方 $|s|, |t| \leq \pi$ で

$$|e^{is} - 1| \leq |s| \quad \text{および} \quad |s - t| \leq \pi/2 \implies |e^{is} - e^{it}|$$

であるから, (28) から

$$\{|e^{i\theta_j} - 1|\}_j \prec \frac{\pi}{2} \{|e^{i\alpha_j} - e^{i\beta_{n-j+1}}|\}_j \quad (29)$$

となる. $\Delta^\downarrow(A-B) = \Delta^\downarrow(AB^* - I)$ であるから, (29) から (7)

を使えば $\gamma_g(\mathcal{U}_+, \mathcal{U}_+) \leq \pi/2$ が出る.

$\mathcal{U}_{++}$ に関しては, $|s-t| \leq \pi/2$ の所で考えればよいので定数 $\pi/2$ が $\pi/2\sqrt{2}$ まで小さく出来る. ■

$\mathcal{U}_{++}$ に関しては, p -norm ($p \geq 2$) のときはもっと改良できる.

【定理7】 $p \geq 2$ のとき, $\gamma_p(\mathcal{U}_{++}, \mathcal{U}_{++}) = \delta_p(\mathcal{U}_{++}, \mathcal{U}_{++}) = 1$.

証明. $|e^{it} - 1|^p$ は $|t| \leq \pi/2$ で凸であることに注目

し、これを

$$\{\theta_j\}_j < \{\alpha_j - \beta_{n-j+1}\}$$

に適用して (4) より

$$\begin{aligned} \|A-B\|_p^p &= \sum_{j=1}^n |e^{i\theta_j} - 1|^p \leq \sum_{j=1}^n |e^{i(\alpha_j - \beta_{n-j+1})} - 1|^p \\ &= \sum_{j=1}^n |e^{i\alpha_j} - e^{i\beta_{n-j+1}}|^p \end{aligned}$$

が出て、 $\gamma_p(U_{++}, U_{++}) = 1$ がわかる。

$A = (AB^*)B$ に Nudelman-Swartzman (26) を適用して

$$\{\alpha_j - \beta_j\}_j < \{\theta_j\}$$

が出るので、上と同様に

$$\sum_{j=1}^n |e^{i\alpha_j} - e^{i\beta_j}|^p \leq \|A-B\|_p^p$$

が出て、 $\delta_p(U_{++}, U_{++}) = 1$ が出る。 ■

上の定理で $1 \leq p \leq \infty$ のとき どうなるかは未だ判らない。
この他にも、さらに A, B の固有値の分布域を適当に制限する
ことにより、幾つかの結果が出るが省略する。

全般に関する survey として R. Bhatia の草稿 'Perturbation of eigenvalues' 150 頁, 1985 が大変参考になる。

文献

- [1] Ando, T., Majorization, doubly stochastic matrices and comparison of eigenvalues, Lecture Note Sapporo, Japan 1982.
- [2] Bhatia, R. and Davis, C., A bound for the spectral varia-

- tion of a unitary operator, *Linear Multilinear Alg.*, 15(1984), 71-76.
- [3] Bhatia, R., Davis, C. and McIntosh, A., Perturbation of spectral subspaces and solution of linear operator equations, *Linear Alg. Appl.* 52/53(1983), 45-67.
- [4] Bhatia, R. and Holbrook, J.A.R., Short normal paths and spectral variation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 94(1985), 377-382.
- [5] Gohberg, I.C. and Krein, M.G., Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators, *Transl. Math. Monographs* 18, Amer. Math. Soc. 1969.
- [6] Hoffman, A.J. and Wielandt, H.W., The variation of the spectrum of a normal matrix, *Duke Math. J.* 20(1953), 37-39.
- [7] Lidskii, V.B., Inequalities for eigen- and singular values, Appendix to Gantmacher's *Theory of matrices* 2nd ed. pp.535-559.
- [8] Marshall, A.W. and Olkin, I., *Inequalities: Theory of majorization and its applications*, Academic Press, 1979.
- [9] Mirsky, L., *Symmetric gauge functions and unitarily*

- invariant norms, Quart. J. Math. (2), 11(1960), 50-59.
- [10] von Neumann, J., Some matrix inequalities and metrization of matric space, in Collected Works IV, 205-219, Pergamon Press, 1961.
- [11] Nudelman, A. and Svarzman, P., The spectrum of the product of unitary matrices, Uspehi Mat. Nauk 13 (1958), no.6, 111-117.
- [12] Schatten, R., Norm ideals of completely continuous operators, Springer, 1960.
- [13] Sunder, V.S., Distances between normal operators, Proc. Amer. Math. Soc. 84(1984), 483-484.
- [14] Thompson, R.C., On the eigenvalues of a product of unitary matrices I, Linear Multilinear Alg. 2(1974), 13-24.
- [15] Wielandt, H.W., An extreme property of sums of eigenvalues, Proc. Amer. Math. Soc. 6(1955), 106-110.