

放物型方程式の或る逆問題について

東大 理 鈴木 貴

東大 理 村山 令二

§1. Introduction

我々がここで扱うのは、Neumann条件付きの、放物型方程式の初期値と係数を、解の境界値から決定するという問題である。

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を、滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域, $p(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $a(x) \in L^2(\Omega)$ とする。放物型方程式:

$$(E_q) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -A_p u \equiv \Delta u - p(x)u \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\nu: \text{単位外法線ベクトル}) \\ u \Big|_{t=0} = a(x) \end{cases}$$

の解 $u = u(t, x)$ は、良く知られているように初期値 a と係数 p によって決まるわけであるが、逆に、 $a(x), p(x)$ は、ある時刻までの解 u の境界上の値により決まるであろうか。我々は、空間次元が 1 のとき、初期値 a に関する仮定をおいて、上の問題が肯定的であることを証明した。 $a(x)$ について、ある程度の

仮定をおかなければならないことは容易に予想される。例えば、 $a(x) \equiv 0$ ならば、 (E_g) の解は $u \equiv 0$ であり、 $p(x)$ は一意には決まらない。

Def. $N(x) - \Delta$ に Neumann 条件を与えたものの、 $L^2(\Omega)$ の実現を A_p , その固有値・固有関数を $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\varphi(\cdot, \lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ とする。初期値 $a \in L^2(\Omega)$ が、 $(a, \varphi(\cdot, \lambda_n)) \neq 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$) をみたすとき a を、 A_p に関する generating element であるという。

我々の結果は次のものである。

Theorem $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}^1$

$p(x), g(x) \in C^1[0, 1]$, $a(x), b(x) \in L^2(0, 1)$ に対する次の方程式で、(I) においては、 a は A_p に関する generating element であるとする。

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + (p(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2})u(t, x) = 0 & (t > 0, x \in (0, 1)) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi) = 0 & (t > 0, \xi = 0, 1) \\ u(0, x) = a(x) & (x \in [0, 1]) \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + (g(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2})v(t, x) = 0 & (t > 0, x \in (0, 1)) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t, \xi) = 0 & (t > 0, \xi = 0, 1) \\ v(0, x) = b(x) & (x \in [0, 1]) \end{cases}$$

その時、ある有限時刻 $0 < T_0 < T_1 < +\infty$ があって、 $u(t, \xi) = v(t, \xi)$ ($T_0 < t < T_1, \xi = 0, 1$) ならば、 $p(x) = g(x)$ ($x \in [0, 1]$), $a(x) = b(x)$ ($a, b \in L^2[0, 1]$) が成立する。

Pierce [6] は、初期値が 0、境界条件が $\xi = 0$ で、第三

種非斉次 (非斉次項 $\neq 0$), $\gamma=1$ で '第三種斉次の場合に、

$u(t, \gamma)$ ($0 < t < T, \gamma=0$) の観測によって $p(x) = q(x)$ を示した。それによると、このような状況のもとで、 A_p のスペクトル関数が観測によって一意に決まり、Gel'fand-Levitan の理論 [2] と結びつく。我々の場合にはそうではないけれども、証明のアイデアにおいて、Gel'fand-Levitan [2] に負うところがある。(§2 参照)

偏微分方程式の初期値境界値問題では、係数、初期値とも既知のものとするのに対し、上の問題は、その逆問題と言える。既知量として、物理的に直接測定される、境界における解の値を用いている点で、Sabatier [8] の言う 応用的逆問題 (applied inverse problem) である。

放物型方程式の逆問題には、未知量にある条件 (例えば、依存する空間変数が一つ少ないとか、変数分離形になっているとか) をつけた、Prilepko [7], Isakov [3], Iskenderov [4] 等、Optimization として扱った Chavent [1], などがあるが、我々の定理はそれらの扱いとは異なっている。

以下では、§2 で、定理の証明のあらすじを述べる。その際必要な Proposition を §3 で証明する。§4 で、多次元の場合などへの注意を述べる。

§2. 定理の証明のあらすじ

$q(x) - \frac{d^2}{dx^2} 1 =$ Neumann 条件を課したものの A_q の固有値、固有

関数を $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\psi(\cdot, \mu_n)\}_{n=1}^{\infty}$ とし, $\varphi(0, \lambda_n) = \psi(0, \mu_n) = 1$ ($n=1, 2, 3, \dots$) により正規化する。 $\rho_n = \int_0^1 \varphi(t, \lambda_n)^2 dt$, $\sigma_n = \int_0^1 \psi(t, \mu_n)^2 dt$ ($n=1, 2, 3, \dots$) とおくと, (I), (II) の解は, 次のように固有関数展開される:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \frac{(a, \varphi(\cdot, \lambda_n))}{\rho_n} \varphi(x, \lambda_n)$$

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n t} \frac{(b, \psi(\cdot, \mu_n))}{\sigma_n} \psi(x, \mu_n) \quad (t > 0, x \in [0, 1])$$

仮定より $u(t, \xi) = v(t, \xi)$ ($T_0 < t < T_1$, $\xi = 0, 1$) であるが, 両辺は t について解析的だから, 上式は $0 < t < +\infty$, $\xi = 0, 1$ について成り立つ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \frac{(a, \varphi(\cdot, \lambda_n))}{\rho_n} \varphi(\xi, \lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n t} \frac{(b, \psi(\cdot, \mu_n))}{\sigma_n} \psi(\xi, \mu_n).$$

a は generating element であり, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ は simple であるから $\xi = 0$ とおいて, $\forall n \exists m(n) \quad \lambda_n = \mu_{m(n)}, \quad \frac{(a, \varphi(\cdot, \lambda_n))}{\rho_n} = \frac{(b, \psi(\cdot, \mu_{m(n)}))}{\sigma_{m(n)}} \neq 0$.
よってまた, $\xi = 1$ とおいて, $\frac{(a, \varphi(\cdot, \lambda_n))}{\rho_n} \varphi(1, \lambda_n) = \frac{(b, \psi(\cdot, \mu_{m(n)}))}{\sigma_{m(n)}} \psi(1, \mu_{m(n)})$ より, $\varphi(1, \lambda_n) = \psi(1, \mu_{m(n)})$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 。

ここで次の主張をする。

Prop 1) 次のような, $0 \leq t \leq x \leq 1$ において二階連続微分可能な関数 $k(x, t)$ が存在する;

$$(E) \begin{cases} k_{xx}(x, t) - k_{tt}(x, t) + p(t) k(x, t) = q(x) k(x, t) \\ k_t(x, 0) = 0, \quad k(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x \{q(\omega) - p(\omega)\} d\omega \end{cases}$$

2) 上の k に対して,

$$\psi(x, \mu_{m(n)}) = \varphi(x, \lambda_n) + \int_0^x k(x, t) \varphi(t, \lambda_n) dt \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

1) の証明は §3 で行なうことにして, 2) を示す。

等式の右辺を $\psi(x)$ とおき、 $\lambda_n = \mu_{m(n)} = \lambda$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \psi(x, \lambda) + \left[\frac{d}{dx} k(x, x) \right] \psi(x, \lambda) + k(x, x) \frac{d}{dx} \psi(x, \lambda) + k_x(x, x) \psi(x, \lambda) \\ &\quad + \int_0^x k_{xx}(x, t) \psi(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

$$(p(x) - \frac{d^2}{dx^2}) \psi(x, \lambda) = \lambda \psi(x, \lambda) \text{ により}$$

$$\begin{aligned} \lambda \psi(x) &= \lambda \psi(x, \lambda) + \int_0^x k(x, t) \lambda \psi(t, \lambda) dt \\ &= \lambda \psi(x, \lambda) + \int_0^x k(x, t) \left\{ p(t) \psi(t, \lambda) - \frac{d^2}{dt^2} \psi(t, \lambda) \right\} dt \\ &= \lambda \psi(x, \lambda) + \int_0^x \{ k(x, t) p(t) - k_{tt}(x, t) \} \psi(t, \lambda) dt \\ &\quad - [k(x, t) \frac{d}{dt} \psi(t, \lambda) - k_t(x, t) \psi(t, \lambda)]_{t=0}^{t=x} \end{aligned}$$

ψ に関する境界条件を考慮し、1) の k の条件を考えれば

$$\lambda \psi(x) + \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = q(x) \psi(x).$$

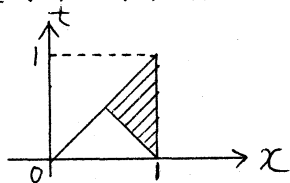
$$\text{一方、} \psi'(0) = \psi'(0, \lambda) + k(0, 0) \psi(0, \lambda) = 0, \quad \psi(0) = \psi(0, \lambda) = 1 \text{ である。}$$

常微分方程式の Cauchy 問題の解の一意性より $\psi(x) = \psi(x, \lambda) //$

定理の証明を続ける。Prop によつて

$$\begin{cases} \psi(1, \mu_{m(n)}) = \psi(1, \lambda_n) \text{ より} \\ \psi'(1, \mu_{m(n)}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \int_0^1 k(1, t) \psi(t, \lambda_n) dt = 0 \\ k(1, 1) \psi(1, \lambda_n) + \int_0^1 k_x(1, t) \psi(t, \lambda_n) dt = 0 \end{cases}$$

これが $n=1, 2, 3, \dots$ について成立し、 $\{\psi(\cdot, \lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $L^2(0, 1)$ で完全だから、 $k(1, t) = k_x(1, t) = 0 \quad (t \in [0, 1])$ 。 k が (E) の双曲型方程式の解であることから、依存領域の考察により、左図



の斜線で $k(x, t) \equiv 0$ 。特に、次で成立する：

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x \{ q(\omega) - p(\omega) \} d\omega = 0 \quad (\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$$

$$\text{したがって、} q(x) = p(x) \quad (\frac{1}{2} \leq x \leq 1).$$

次に $\hat{q}(x) = q(1-x)$, $\hat{p}(x) = p(1-x)$ とおき、上の論法を繰り返せば、 $\hat{q}(x) = \hat{p}(x)$ ($\frac{1}{2} \leq x \leq 1$) $\therefore q(x) = p(x)$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$)。

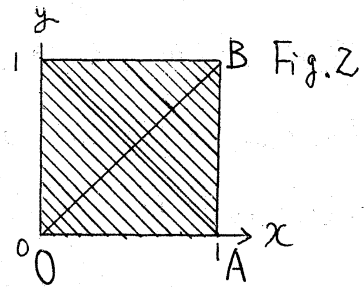
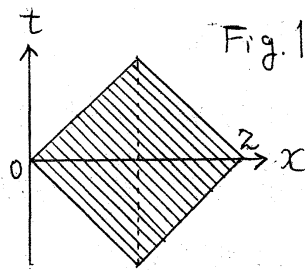
最後に (I), (II) の解を固有関数展開した式において、
 $(a, \varphi(\cdot, \lambda_n)) = (b, \varphi(\cdot, \lambda_n))$ ($n=1, 2, \dots$) を得るから、 $a(x) = b(x)$
 $(a.e.-x \in [0, 1])$ を得る。 //

§3. 方程式 (E) の解の存在について

$p(t)$ を $C^1[H, 1]$ に、 $q(x)$ を $C^1[0, 2]$ にそれぞれ拡張して
 次の問題 $(E)_0$ の解 $K(x, t)$ の存在を示す：

$$(E)_0 \begin{cases} K_{xx}(x, t) - K_{tt}(x, t) + p(t)K(x, t) = q(x)K(x, t) \\ K_t(x, 0) = 0 \\ K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x \{q(s) - p(s)\} ds \end{cases}$$

ただし、 $(E)_0$ は下の Fig. 1 の斜線部で考える。



変数変換 $\xi = \frac{1}{2}(x+t)$, $\eta = \frac{1}{2}(x-t)$ により $(E)_0$ を書き直し、 ξ, η を改めて x, y と書くと、Fig. 2 の斜線部における次の $(E)_1$ を得る。

$$(E)_1 \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = r(x, y)u(x, y) \\ (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})(x, x) = 0 \\ u(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$\gamma = 1: u(x, y) = k(x+y, x-y), \quad r(x, y) = \frac{1}{2} \{g(x+y) - p(x-y)\}.$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \{g(\alpha) - p(\alpha)\} d\alpha.$$

Lemma 1. 双曲型方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = r(x, y)u(x, y)$ の Riemann 関数を $R(x, y; x_0, y_0)$, $Q(x, \xi)$ を $(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2})(\xi, \xi; x, 0)$ としたとき、

$\psi \in C^2[0, 1]$ を次の積分方程式 (Q) の解とする:

$$(Q) \quad \psi(x) + \int_0^x Q(x, \xi) \psi(\xi) d\xi = 2\psi(x) - \psi(0)$$

そうすれば、方程式:

$$(E)_2 \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = r(x, y)u(x, y) \\ u(x, x) = \psi(x) \\ u(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

は、Fig. 2 の斜線部で、二階連続微分可能な解 u をもち、 u は $(E)_1$ の解にもなる。

証明 (Q) は、第二種 Volterra 積分方程式だから、 Q が $C^2([0, 1] \times [0, 1])$ に属し、 ψ が $C^2[0, 1]$ に属すれば、解 $\psi \in C^2[0, 1]$ を持つ。 $\psi \in C^2[0, 1]$ であることは、 $p, g \in C^1[0, 1]$ による。 $Q \in C^2([0, 1] \times [0, 1])$ は、 Q の定義と、下の Lemma 2 による。次に、方程式 $(E)_2$ は、特性曲線 OA 、非特性曲線 OB 上に値を与えて双曲型方程式を解く問題であるが、Picard [5] が扱っている。主張の後半を述べる。Riemann の公式により、

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} \{u(x, x) + u(0, 0)\} + \frac{1}{2} \int_0^x \{R(\xi, \xi; x, 0) (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(\xi, \xi) + (\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2})(\xi, \xi; x, 0) u(\xi, \xi)\} d\xi$$

が成立するから、 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ の定義により、

$$\int_0^x R(\xi, \xi; \lambda, 0) \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] (\xi, \xi) d\xi = 0.$$

Lemma 2 に示される、 $R(\xi, \xi; \lambda, 0)$ の λ に関する微分可能性 (その導関数は有界である) によって上式を λ について微分して、

$$R(x, x; \lambda, 0) \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] (x, x) + \int_0^x \frac{\partial R(\xi, \xi; \lambda, 0)}{\partial \lambda} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] (\xi, \xi) d\xi = 0.$$

Gronwall の不等式を用いて、 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) (x, x) = 0$ //

この Lemma により、 $(E)_1$ の階連続微分可能な解が得られ、従って、 $(E)_1$ から変数変換により $(E)_0$ にうつって、 (E) の解の存在が示された。

Lemma 2 $R = R(x, y; x_0, y_0)$ とおくとき、 $R, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial x_0}, \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x_0}, \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 R}{\partial x \partial x_0^2}, \frac{\partial^3 R}{\partial y \partial x_0^2}$ は、すべて $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ で連続である。

証明は、 R を逐次近似法により構成する手続きを詳しく検討すれば、得られる。その時、 $r \in C^1([0, 1] \times [0, 1])$ に注意する。 //

§4. 多次元の場合などへの注意

多次元の場合に Theorem が成立するかどうか、今のところわかっていないが、次のことは、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して証明できる。

Prop 1. $p(x) \equiv g(x) (x \in \bar{\Omega})$ かつ、 $(a, \varphi(\cdot, \lambda_1)) \neq 0$ ならば、 $u(t, \xi) = v(t, \xi) (T_0 < t < T_1 < +\infty, \xi \in \partial\Omega)$ のとき、

$$p(x) = q(x) \quad (x \in \Omega) \quad a(x) = b(x) \quad (a.e. - x \in \Omega).$$

証明には、最小固有値に属する固有関数 $\varphi(\cdot, \lambda_1)$ の定値性と、 $p(x) \geq q(x)$ の仮定のもとでは、 A_p, A_q のスペクトルが“一斉に同じ方向へずれている”ことを用いる。Theorem の証明とは、全く異なり、 Q が、 A_p に関する generating element であることまでは要求しない。

一次元の場合については、Theorem の次のような variation がある：

1. Theorem において、境界条件は第三種にしてもよい。また、境界条件を Dirichlet にした場合にも、 $u(t, \xi) = v(t, \xi)$ ($T_0 < t < T_1, \xi = 0, 1$) のかわりに、 $\frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi) = \frac{\partial v}{\partial x}(t, \xi)$ ($T_0 < t < T_1, \xi = 0, 1$) とすれば、結論が成立する。この事は、上の Prop 1. についても同様である。

2. 最高階の係数が 1 でない場合にも、Liouville 変換を利用すると、Theorem に帰着される場合がある：

Prop 2. $d(x) > 0$ ($x \in [0, 1]$), $d(x) \in C^3[0, 1]$ として、Theorem の (I), (II) の方程式がそれぞれ、 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(d(x) \frac{\partial u}{\partial x}) - p(x)u$, $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(d(x) \frac{\partial v}{\partial x}) - q(x)v$ の時も、結論は成り立つ。

最高階の係数を決める問題については、一次元の場合に、Liouville 変換を利用することにより、Theorem が応用される場合がある：

Prop 3. $\alpha(x), \beta(x) \in C^3[0, 1]$, $\alpha(x), \beta(x) > 0$ ($x \in [0, 1]$),
 $a(x), b(x) \in L^2(0, 1)$ としたとき、次の方程式:

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = -A_\alpha u \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x}) & (t > 0, x \in (0, 1)) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, \bar{x}) = 0 & (t > 0, \bar{x} = 0, 1) \\ u(0, x) = a(x) & (x \in [0, 1]) \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = -A_\beta v \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\beta(x) \frac{\partial v}{\partial x}) & (t > 0, x \in (0, 1)) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t, \bar{x}) = 0 & (t > 0, \bar{x} = 0, 1) \\ v(0, x) = b(x) & (x \in [0, 1]) \end{cases}$$

において、 a は、 A_α に関する generating element, 更に、

$$\frac{\beta(0)}{\alpha(0)} = \frac{\beta(1)}{\alpha(1)} = \left(\frac{\beta'(0)}{\alpha'(0)}\right)^2 = \left(\frac{\beta'(1)}{\alpha'(1)}\right)^2, \quad \int_0^1 \frac{dA}{\sqrt{\alpha(A)}} = \int_0^1 \frac{dA}{\sqrt{\beta(A)}} \quad \text{とす。}$$

その時、ある有限時刻 $0 < T_0 < T_1 < +\infty$ があって、

$$u(t, \bar{x}) = v(t, \bar{x}) \quad (T_0 < t < T_1, \bar{x} = 0, 1) \quad \text{ならば、} \quad \alpha(x) = \beta(x) \quad (x \in [0, 1])$$

$$a(x) = b(x) \quad (a.e.-x \in (0, 1))。$$

Prop 4. Prop 3 において、方程式 (I), (II) の境界条件が、Dirichlet であり、 α, β が $\frac{\beta(0)}{\alpha(0)} = \frac{\beta(1)}{\alpha(1)}, \int_0^1 \frac{dA}{\sqrt{\alpha(A)}} = \int_0^1 \frac{dA}{\sqrt{\beta(A)}}$ であるとするとき、 a が A_α に関する generating element である時、 $\alpha(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x}(t, \bar{x}) = \beta(\bar{x}) \frac{\partial v}{\partial x}(t, \bar{x})$ ($T_0 < t < T_1, \bar{x} = 0, 1$) であれば、Prop 3 の結論が成立する。

以上の Prop 2 ~ Prop 4 について、drift の項がある場合などについては、検討中である。

References

- [1] Chavent, G., Analyse fonctionnelle et identification de coefficient répartis dans les équations aux dérivées partielles, These, Paris (1971)
- [2] Gelfand, I. M., Levitan, B. M., On the determination of a differential equation from its spectral function, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. 15 No. 4 (1951) (Russian)
= English translation: Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2. Vol 1 253 ~ 304 (1955)
- [3] Isakov, V. M., Uniqueness theorems for inverse problems of heat potentials, Siberian Math. J. vol 17 No. 2 202 ~ 212 (1977)
- [4] Iskenderov, A. D., Multidimensional inverse problems for linear and quasi-linear parabolic equations, Dokl. Akad. Nauk. SSSR Tom 225 No. 5 1564 ~ 1568 (1975)
- [5] Picard, E., 偏微分方程式論. 山口昌哉・田村祐三訳
現代数学社 (1977)
- [6] Pierce, A., Unique identification of eigenvalues and coefficients in a parabolic problem, SIAM J. Control & Optimization vol 17 No. 4 494 ~ 499 (1979)
- [7] Prilepko, A. I., Inverse problems of potential theory

(elliptic, parabolic, hyperbolic, and transport equations)

Mathematical Notes vol 14 990~996 (1973)

[8] Sabatier, P. C., Introduction to applied inverse problems. Springer Lecture Notes in Physics 85

Applied Inverse Problems 1~26 (1978)