

Homotopically stable homeomorphisms について

愛媛大理 平出 耕一

M は位相閉多様体とし、 $f: M \rightarrow M$ は同相写像で不動点 $m_0 \in M$ を持つとする。次が成り立つとき、 f をホモトピー安定 (homotopically stable) と呼ぶことにする: 同相写像 $g: M \rightarrow M$, $g(m_0) = m_0$, が $\{m_0\}$ を固定して f とホモトピーックならば、恒等写像とホモトピーックな連続写像 $h: M \rightarrow M$ が存在して $f \circ h = h \circ g$, i.e. 図式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & M \\ h \downarrow & \curvearrowright & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

が可換になる。この様な性質をもつ同相写像の例として n 次元トーラスの双曲的自己同型写像あるいはもっと一般に infra-nil-manifold の双曲的 infra-nil-automorphism がある。これらの同型写像はそのホモトピー類の中でいろいろな力学的数量例えば、位相エントロピー、 n 周期点の個数、Nielsen 数等の最小値を与える。閉曲面の pseudo-Anosov 同相写像も上の数量を最小にしているけれども、後で述べる様にホモトピー安定

でないのに注意を要する。(注. pseudo-Anosov 同相写像は不動点を有)

ここでは、ホモトピー安定な同相写像はどのような写像であるかについて考える。以後 M の距離 d を一つ固定する。

$\pi: \bar{M} \rightarrow M$ は普遍被覆空間, $\bar{F}: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ は f の持ち上げとする。 $\bar{d}$ を π による d の持ち上げ, 即ち, 次の a) ~ d) が成立する $\bar{M}$ の距離とする:

$$a) \quad \exists \eta_0 > 0 \text{ s.t. } \bar{d}(x, y) < \eta_0 \Rightarrow d(\pi(x), \pi(y)) = \bar{d}(x, y)$$

$$b) \quad \forall \alpha \in \pi_1(M) \text{ に対して } \bar{d}(\alpha(x), \alpha(y)) = \bar{d}(x, y), \quad \forall x, y \in \bar{M}$$

$$c) \quad (\bar{M}, \bar{d}) \text{ は完備距離空間}$$

$$d) \quad \forall x, y \in \bar{M} \text{ に対して } \bar{d}(x, y) = \inf_{\substack{\eta_0\text{-chain} \\ \text{from } x \text{ to } y}} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{d}(x_i, x_{i+1})$$

$$\text{ここで } x = x_0, x_1, \dots, x_n = y : \eta_0\text{-chain} \iff \bar{d}(x_i, x_{i+1}) < \eta_0, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

定理 1. $\bar{F}: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ は次の A, B を満たすとする。

$$A. \quad \forall c > 0 \text{ に対し } \bar{d}(\bar{F}^i(x), \bar{F}^i(y)) \leq c \quad (\forall i \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = y$$

$$B. \quad \forall K > 0, \exists \delta_K > 0 \text{ s.t. } \forall (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}: K\text{-擬軌道 (i.e.}$$

$$\bar{d}(\bar{F}(x_i), x_{i+1}) < K, \forall i \in \mathbb{Z}), \exists x \in \bar{M} \text{ s.t.}$$

$$\bar{d}(\bar{F}^i(x), x_i) < \delta_K, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

このとき X : コンパクト, 連結, 局所弧状連結, 弱局所単連結
ハウスドルフ空間

$$g: X \rightarrow X \quad \text{同相写像}, \quad g(x_0) = x_0$$

$$\phi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(M, m_0) \quad \text{準同型写像}$$

に対して

$f_* \circ \phi = \phi \circ g_*$ が成立するならば、一意的に連続写像 $h: X \rightarrow M$ が存在して $h(x_0) = m_0$, $h_* = \phi$, $f \circ h = h \circ g$ となる。
特に $f: M \rightarrow M$ はホモトピー安定である。

双曲的 infra-nil-automorphism に対し A, B が成立するので、定理 1 よりこの写像はホモトピー安定であることが分かる。

定理 2. $f: M \rightarrow M$ は A, B を満たすとする、 M は infra-nil-manifold と同相で f は双曲的 infra-nil-automorphism と位相共役である。

したがってホモトピー安定な同相写像に対し A, B が成立するか否かが問題となる。これに関して

補題 3. (shadowing lemma) 同相写像 $f: M \rightarrow M$ がホモトピー安定ならば、 $F: M \rightarrow M$ は B の性質を持つ。

pseudo-Anosov 同相写像に対し A が成立するので、定理 2 と補題 3 より次が得られる。

系 4. M^2 は閉曲面とし $f: M^2 \rightarrow M^2$ は pseudo-Anosov 同相写像とする。このとき $M^2 \neq T^2$ (2次元トーラス) ならば f はホモトピー安定でない。

一方、Handel は次を示している。

定理 ([3, 4]) $f: M^2 \rightarrow M^2$ は pseudo-Anosov とし、 $g: M^2 \rightarrow M^2$ は同相写像で f とホモトピックとする。このとき g -不変な閉集合 $Y \subset M^2$ ($g(Y) = Y$) と上の連続写像 $h: Y \rightarrow M^2$

が存在して

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Y \\ h \downarrow & \curvearrowright & \downarrow h \\ M^2 & \xrightarrow{f} & M^2 \end{array}$$

かつ h は $\text{id}|_Y$ とホモトピックである ([3])。さらに f と g の位相エントロピーが等しいならば $Y = M^2$ ([4])。

また Fathi [1] は Handel よりも分かり易い方法で上の定理の前半を示した。Fathi の証明方法は、基本的に、(双曲的 infra-nil-automorphism の特別な場合である) 双曲的トーラス自己同型に対するものと同じで Franks [2] の結果を利用している。また定理 1 の証明方法を適用することもできる。

References

- [1] A. Fathi. Homotopical stability of pseudo-Anosov diffeomorphisms, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* (1990), 10, 287-294.
- [2] J. Franks. Anosov diffeomorphisms, *Proc. Symp. in Pure Mathematics* 14 (1970), 61-94.
- [3] M. Handel. Global shadowing of pseudo-Anosov diffeomorphisms. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 5 (1985), 373-377.
- [4] M. Handel. Entropy and semi-conjugacy in dimension two, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 8 (1988), 585-596.
- [5] K. Hiraide. Positively expansive open maps of Peano spaces, *Topology and its Appl.* 37 (1990), 213-220.