

Hamburger - Hecke の定理と無限階微分方程式

京大 数理解析

河合 隆裕

Hamburger による ζ -函数の特微付子に関する古典的

結果は, $Z_A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, $Z_B(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \nu^{-s}$

なる二つのディリクレ級数 $\sigma=1$ における極を持つ有理型函数として解析接続され, しかも

$$\frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{s/2}} Z_A(s) = \frac{\Gamma((1-s)/2)}{\pi^{(1-s)/2}} Z_B(1-s)$$

なる函数等式を満たすならば (然るべき増大度条件の下で) 実は, 或る定数 c が存在して $a_n = b_{\nu} = c$

が任意の n, ν に対して成立つ, 即ち $Z_A(s) = Z_B(s)$

$= c \zeta(s) (= \sum_{n=1}^{\infty} c/n^s)$ が成立つことを主張している。

この結果は, 本質的には, ホアソンの和公式の逆定理とも謂うべき次の結果に同値である。(17)

定理 1. 今 N, m を正整数とし, $a_{\alpha, n}, b_{\beta, \nu}$

($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$, $|\alpha|, |\beta| < N$, $n, \nu \in \mathbb{Z}^m$) は, 或る

定数 C, M に対し, 次の条件 (1) を満たす数列とする。

$$(1) \quad |a_{\alpha, n}| \leq C |n|^M, \quad |b_{\beta, \nu}| \leq C |\nu|^M.$$

ここで、更に、

$$\mathcal{F} \left(\sum_{\alpha, n} a_{\alpha, n} \delta^{(\alpha)}(x-n) \right) = \sum_{\beta, \nu} b_{\beta, \nu} \delta^{(\beta)}(\xi-\nu)$$

(但し $\mathcal{F}f = \int f(x) \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle x, \xi \rangle) dx$ とする。)

が成立つならば、或る多項式係数の線型微分作用素 $P(x, D_x)$ が存在して

$$\sum_{\alpha, n} a_{\alpha, n} \delta^{(\alpha)}(x-n) = P(x, D_x) \left(\sum_n \delta(x-n) \right)$$

が成立する。更に P の階数は N 階未満であり、 P の各係数の次数も N 未満である。

このように、上述の Hamburger の結果は本質的に大域的なものであるが、Mellin 変換を通じて ζ -函数に対応する $\mathcal{V}$ -zero value に対しては、それか特別な形のフーリエ展開 $\sum_{\nu} \exp(\pi\sqrt{-1}\nu^2\tau)$ を持つ、と云う事実が

$$(2) \quad \left(\frac{d}{d\tau} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\pi\sqrt{-1}\nu^2} \frac{d}{d\tau} \right) \right) \mathcal{V}(\tau)$$

$$(\equiv \sqrt{\pi\sqrt{-1}} \frac{d}{d\tau} \sinh \sqrt{\pi\sqrt{-1}} \frac{d}{d\tau} \mathcal{V}(\tau)) = 0$$

なる無限階微分方程式を満たす、という事実を翻
 訳されること、及び、 η の虚変換 $\eta(-1/\tau)/\sqrt{-i\tau} (= \eta(\tau))$
 に対して同様の議論を用いて

$$(3) \quad \left(\tau \frac{d}{d\tau} + \frac{1}{2}\right) \frac{\sinh \sqrt{\pi\sqrt{-1}} (\tau^2 d/d\tau + \tau/2)}{\sqrt{\pi\sqrt{-1}} (\tau^2 d/d\tau + \tau/2)} \eta(\tau) = 0$$

という方程式を得ることから、という事実に注目
 して、(2), (3) の共通解の空間が 1 次元である、と
 言う形で η 函数の局所的な特徴付けが可能で
 あることが佐藤先生によって見出たされている。(こ
 こで (2), (3) に現われる作用素は、例えば "正則函
 数の層 $\mathcal{O}$ に層準同型として作用することに注意して
 置く。)

このような微分方程式系による η -zerovalue の取扱ひ
 は、Hecke [2] によって扱われた函数すべてに対して可
 能な訳ではない (Hecke [2] は、 $a_n = b_n$ なる付帯条
 件を課することによって、有限次元性の証明を行っているこ
 とに注意) けれども、それだけに、高次元の場合に、 η -
 函数の良ゝ拡張を見出たす為には有用であろう、と期
 待する。その第一歩として、無限階微分方程式系に
 対する有限次元性の定理が [3] に与えられている。
 ここでは、正則函数解を対象として議論が行われている

けれど、それを超局所化することは今後の興味深い課題である。

文 献

- [1] Ehrenpreis, L. and T. Kawai : Poisson's summation formula and Hamburger's theorem. To appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ., 18 (1982).
- [2] Hecke, E. : Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Ann. 111 (1936), 664-699. (Werke, 591-626).
- [3] Sato, M., M. Kashiwara and T. Kawai : Linear differential equations of infinite order and theta functions. To appear.