

# Determining cusp forms by critical values of Rankin-Selberg L-functions

大阪公立大学数学研究所 / 源嶋 孝太 (Gejima, Kohta)

## 1 主結果と先行研究について

楕円モジュラー形式の Rankin-Selberg  $L$ -関数は最も基本的な保型  $L$ -関数の 1 つであり, 志村 [13] により臨界点と呼ばれる整数点におけるある数論性が証明された. 志村の手法は保型  $L$ -関数の積分表示を利用するもので, そのアイディアは他の多くの保型  $L$ -関数の特殊値の数論性の研究にも用いられている.

本記事では Rankin-Selberg  $L$ -関数の特殊値について志村の方法を突き詰めることで得られるより定量的な結果と, その証明の系として得られる保型形式の特徴づけについて報告する. 特に保型形式の特徴づけについて詳しく述べたい (詳細は [7] を見られたい).

正の整数  $k$   $N$  と法  $N$  のディリクレ指標  $\chi$  に対して,  $\mathcal{M}_k(N, \chi)$  を Hecke 合同部分群  $\Gamma_0(N)$  に関する重さ  $k$ , 指標  $\chi$  のモジュラー形式の空間とし,  $\mathcal{S}_k(N, \chi)$  をそのカスプ形式からなる部分空間とする. このとき,  $(f, g) \in \mathcal{S}_k(N, \chi) \times \mathcal{M}_l(N, \psi)$  に対して

$$L(s, f \otimes g) = L(2s - k - l + 2, \bar{\chi}\psi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a_n(f)} a_n(g)}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > \frac{k+1}{2} + l$$

とおき,  $(f, g)$  に関する Rankin-Selberg  $L$ -関数と呼ぶ. ここで  $a_n(f)$  や  $a_n(g)$  はそれぞれ  $\infty$  における  $f, g$  のフーリエ展開の  $n$  番目のフーリエ係数であり,  $L(s, \bar{\chi}\psi)$  は  $\bar{\chi}\psi$  のディリクレ  $L$ -関数である.  $L(s, f \otimes g)$  の臨界点には本質的には  $\frac{k+l}{2} \leq m \leq k-1$  をみたす整数  $s = m$  で尽くされる. また,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n^{(\bar{\chi}\psi)}(m; g) &= \frac{a_n(g) n^{\frac{k-l}{2}} \prod_{p|N} (1 - p^{-1})}{(k-l) \left(\frac{k+l}{2} - 1\right)^{\frac{k-l}{2}}} \cdot \delta \left( m = \frac{k+l}{2}, \chi = \psi \right) \\ &\quad + \frac{a_n(g) N n^{|\mu(m)|}}{(m)_{|\mu(m)|}} \cdot \frac{L(2m - k - l + 2, \bar{\chi}\psi)}{(2\pi i)^{2m-k-l+2} \mathfrak{g}((\bar{\chi}\psi)_0)} \\ &\quad + \frac{(-1)^{m+l+1}}{N^{2m-k-l+1} (m-l)!} \sum_{\nu=1}^n a_{n-\nu}(g) R_{\nu}^{(k-l, \bar{\chi}\psi)}(\mu(m), n) \end{aligned} \quad (1.1)$$

とおく. ここで  $(\bar{\chi}\psi)^0$  は  $\bar{\chi}\psi$  に関する原始的ディリクレ指標,  $\mathfrak{g}((\bar{\chi}\psi)^0)$  は  $(\bar{\chi}\psi)^0$  のガウス和,  $R_{\nu}^{(h)}(j, n)$  はある代数的数<sup>\*1</sup>,  $\delta(P)$  はクロネッカー記号,  $(\alpha)_n = \Gamma(\alpha + n)/\Gamma(\alpha)$  はポツホハマー記号である. さらに

$$\Xi_N(m) = \frac{(4\pi)^k (2\pi i)^{2m-k-l+2} \prod_{p|N} (1 + p^{-1})}{12(m-1)!}$$

<sup>\*1</sup>  $R_{\nu}^{(h)}(j, n)$  の定義はセクション 3.1 を見よ

とおく.

$\mathcal{M}_n(SL_2(\mathbb{Z}))$  を  $SL_2(\mathbb{Z})$  に関する重さ  $n$  のモジュラー形式の空間とし,  $\mathcal{S}_n(SL_2(\mathbb{Z}))$  をそのカスプ形式からなる部分空間とする.  $d = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  とおく.  $\mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  の任意の基底  $\mathcal{B}_k = \{f_1, \dots, f_d\}$  に対し,  $(d \times d)$ -行列  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_k)$  を次のように定義すると命題 4.3 により  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_k)$  は正則であることがわかる:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}_k) = \begin{pmatrix} a_1(f_1) & a_1(f_2) & \cdots & a_1(f_d) \\ a_2(f_1) & a_2(f_2) & \cdots & a_2(f_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_d(f_1) & a_d(f_2) & \cdots & a_d(f_d) \end{pmatrix}.$$

このとき, 次が成り立つ.

**定理 1.1** (Gejima [7], 2022).  $k, l$  を  $k-l \geq 2$  をみたすような正の偶数とする.  $g \in \mathcal{M}_l(SL_2(\mathbb{Z}))$  とし,  $\mathcal{B}_k = \{f_1, \dots, f_d\}$  を  $\mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  の直交基底とする. また  $m$  を  $\frac{k+l}{2} \leq m \leq k-1$  をみたすような整数とする. このとき, 各臨界値  $L(m, f_j \otimes g)$  は次の等式で与えられる:

$$\left[ \frac{L(m, f_j \otimes g)}{\Xi_1(m) \langle f_j, f_j \rangle} \right]_{j=1}^d = \mathcal{A}(\mathcal{B}_k)^{-1} \left[ \mathcal{V}_j^{(1)}(m; g) - \frac{ka_0(g)\sigma_{k-1}(j)B_{k-l}}{(k-l)!B_k} \delta(m=k-1) \right]_{j=1}^d.$$

ここで  $\langle -, - \rangle$  は Petersson 内積であり,  $[x_j]_{j=1}^d$  は縦ベクトル  ${}^t(x_1, \dots, x_d)$  を表す. レベル  $N$  のモジュラー形式に対しても同様の結果が証明される.

定理 1.1 の系として, 次の臨界値の整性が得られる.

**系 1.2.**  $k, l$  を  $k-l \geq 2$  をみたすような正の偶数とする.  $f \in \mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  と  $g \in \mathcal{S}_l(SL_2(\mathbb{Z}))$  をそれぞれ正規化された Hecke 固有形式とし,  $\mathcal{B}_k$  を,  $f$  を含むような  $\mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  の直交基底とする. また,  $m$  を  $\frac{k+l}{2} \leq m \leq k-1$  をみたすような整数とする. このとき

$$\begin{aligned} (k-2)! \operatorname{den} \left( \frac{(m-1)! B_{2m-k-l+2}}{2 \cdot (2m-k-l+2)!} \right) \\ \times \det \mathcal{A}(\mathcal{B}_k) \frac{L(m, f \otimes g)}{\Xi(m) \langle f, f \rangle} \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} \quad \left( \frac{k+l}{2} \leq m \leq k-1 \right), \\ (k-2)! \operatorname{den} \left( \frac{(\frac{k+l}{2}-2)!}{k-l} \right) \det \mathcal{A}(\mathcal{B}_k) \frac{L(\frac{k+l}{2}, f \otimes g)}{\Xi(\frac{k+l}{2}) \langle f, f \rangle} \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} \end{aligned}$$

が成り立つ.

ここで  $B_n$  は母関数  $\frac{x}{e^x-1}$  を持つ  $n$  番目のベルヌーイ数であり,  $\operatorname{den}(x)$  は既約分数  $x$  の分母である.

また, 定理 1.1 の証明の系として, 次のような臨界値によるカスプ形式の特徴づけが得られる. ただし, (1.1) を見てもらえばわかるように, 関数等式により定まる帯領域の中心に近い臨界点  $s = \frac{k+l}{2}$  とそれ以外では特殊値の振る舞いが異なるので結果を分けて紹介する.\*2

**定理 1.3** (Gejima [7], 2022).  $k, l_i, i = 1, 2$  を  $k-l_i \geq 2$  をみたすような整数とする.  $g_i \in \mathcal{S}_{l_i}(N, \psi)$  を  $a_1(g_1)/a_1(g_2) \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$  となるようにとり,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k(N, \chi)$  を  $\mathcal{S}_k(N, \chi)$  の直交基底とする. また,  $m$  を  $\max(\frac{k+l_1}{2}, \frac{k+l_2}{2}) \leq m \leq k-1$  をみたすような整数とする. さらに  $\max(\frac{k+l_1}{2}, \frac{k+l_2}{2}) < m \leq k-1$  ま

\*2 Rankin-Selberg  $L$ -関数の中心値は臨界値ではない.

たは  $\chi \neq \psi$  が成り立つと仮定する. このとき, もし任意の  $f \in \mathcal{B}$  に対して  $L(m, f \otimes g_1) = L(m, f \otimes g_2)$  が成り立つならば  $l_1 = l_2$  かつ  $g_1 = g_2$  である.

**定理 1.4** (Gejima [7], 2022).  $k, l_i, i = 1, 2$  を  $k \equiv l_1 \equiv l_2 \pmod{2}$ ,  $k - l_1 \geq 2$ ,  $l_1 \geq l_2$  をみたすような整数とする.  $g_i \in \mathcal{S}_{l_i}(N, \chi)$  を  $a_1(g_1)/a_1(g_2) \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$  となるようにとり,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k(N, \chi)$  を  $\mathcal{S}_k(N, \chi)$  の正規直交基底とする. さらに  $\lambda = \lambda(k, l_1, N) \notin 24\mathbb{Z}$  または  $\lambda > 2l_1 N^2 \prod_{p|N} (1 - p^{-2})$  が成り立つと仮定する. このとき, もし任意の  $f \in \mathcal{B}$  に対して  $L(\frac{k+l_1}{2}, f \otimes g_1) = L(\frac{k+l_1}{2}, f \otimes g_2)$  が成り立つならば  $l_1 = l_2$  かつ  $g_1 = g_2$  である.

ここで  $\lambda$  は次のように定義される正の整数である:

$$\lambda = \lambda(k, l, N) = N(k - l) \left( \frac{k + l}{2} - 1 \right) \prod_{p|N} (1 + p^{-1}).$$

最後に, 定理 1.3, 1.4 に関連する先行研究について述べたい. Lanphier [10] は臨界値によるカスプ形式の特徴づけについて次のような結果を得た.

**定理 1.5** (Lanphier [10], 2019). 各  $i = 1, 2$  に対して  $l_i$  は  $l_i > 2$  をみたすような整数とし,  $g_i \in S_{l_i}^{new}(N, \psi)$  は Hecke 固有形式とする.  $\{\kappa\}$  を  $\kappa - l_i > 2$  をみたすような整数の無限列とし,  $\mathcal{H}_\kappa(N, \chi)$  を  $\mathcal{S}_\kappa(N, \chi)$  の Hecke 固有形式からなる正規直交基底とする. 各  $\kappa$  に対して  $m_\kappa$  は  $\min\left(\frac{\kappa - l_1}{2}, \frac{\kappa - l_2}{2}\right) < m_\kappa \leq \kappa + 1$  をみたす整数とする. このとき, もし無限に多くのそのような  $\kappa$  と任意の  $f \in \mathcal{H}_\kappa(N, \chi)$  に対して

$$L(m_\kappa, f \otimes g_1) = L(m_\kappa, f \otimes g_2) \quad (1.2)$$

が成り立つならば  $l_1 = l_2$  かつ  $g_1 = g_2$  である.

Lanphier [10] は Rankin–Cohen ブラケットの明示公式の系として定理 1.5 を示した. ここで Lanphier の結果について, 主結果 1.3, 1.4 と大きく異なる点についていくつか注意したい. まず Lanphier の結果における,  $g_i$  がニューフォームであるという仮定は証明の中で重複度 1 定理を用いるため本質的な役割を果たしている. また, (1.2) が成り立つような無限列  $\{\kappa\}$  の存在が仮定されている. これは証明の中でウェイトアスペクトの極限を計算するため, やはり本質的な仮定である. そして帯領域の中心に近い臨界点は除かれている.

他にも Rankin–Selberg  $L$ -関数の中心値による保型形式の特徴づけが Ganguly–Hoffstein–Sengupta [5], Zhang [18] により示された. 定理 1.5 はその臨界値に関する類似である.\*<sup>3</sup>

## 謝辞.

講演および本記事執筆の機会を与えてくださった世話人の宮崎直氏 (北里大学), 青木宏樹氏 (東京理科大学) にはこの場を借りて感謝申し上げます.

筆者は JSPS 科研費 19K14507(若手研究) の助成を受けています.

\*<sup>3</sup> 他にも Ganguly–Hoffstein–Sengupta [5], Zhang [18] の結果のレベルアスペクトの類似が Luo [11] により示されている.

## 記号

$\mathbb{Z}$  を有理整数環,  $\mathbb{Q}$  を有理数体,  $\mathbb{R}$  を実数体,  $\mathbb{C}$  を複素数体,  $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$  を代数的数体,  $\overline{\mathbb{Z}}$  を代数的整数環とする.  $i$  を虚数単位とし,  $e(z) = e^{2\pi iz}$  とおく. 命題  $P$  に対して  $\delta(P)$  をクロネッカー記号とする. すなわち

$$\delta(P) = \begin{cases} 1 & (P \text{ が真}) \\ 0 & (P \text{ が偽}) \end{cases}$$

と定義される.

## 2 準備

### 2.1 モジュラー形式と Rankin–Selberg $L$ -関数

$\mathfrak{H} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$  を上半平面とする. このとき,  $SL_2(\mathbb{R})$  は一次分数変換

$$SL_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}, \quad \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}$$

により作用する.

正の整数  $N$  に対して

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

とおく. このとき, 任意のディリクレ指標  $\chi$  は次のようにして  $\Gamma_0(N)$  上の関数とみなされる:

$$\chi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \chi(d).$$

$k, N$  を正の整数とし,  $\chi$  を法  $N$  のディリクレ指標とする. このとき, 上半平面  $\mathfrak{H}$  上の正則関数  $f$  が重さ  $k$ , レベル  $N$ , 指標  $\chi$  のモジュラー形式であるとは, 任意の  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$  に対して等式  $(f|_k \gamma)(z) = \chi(\gamma)f(z)$ ,  $z \in \mathfrak{H}$  が成り立ち,  $\Gamma_0(N)$  任意のカスプで正則であるときにいう. 特に  $\Gamma_0(N)$  任意のカスプで消えるようなモジュラー形式をカスプ形式という.\*4 ここで  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$  と  $\mathfrak{H}$  上の  $C^\infty$  級関数  $f$  に対して  $f|_k g$  は  $(f|_k g)(z) = (cz + d)^{-k} f(gz)$  と定義される.

$\Gamma_0(N)$  に関する重さ  $k$ , 指標  $\chi$  のモジュラー形式の空間を  $\mathcal{M}_k(N, \chi)$  と表し, そのカスプ形式からなる部分空間を  $\mathcal{S}_k(N, \chi)$  と表す. モジュラー形式  $f \in \mathcal{M}_k(N, \chi)$  (resp.  $f \in \mathcal{S}_k(N, \chi)$ ) はその定義から

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) e(nz) \quad (\text{resp. } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) e(nz))$$

という表示を持つ. ただし  $a_n(f) \in \mathbb{C}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) である. これを ( $\infty$  における)  $f$  のフーリエ展開と呼ぶ.

$k, l, N$  を正の整数とする.  $k \geq l$  と仮定する.  $\chi, \psi$  は法  $N$  のディリクレ指標とする.  $f \in \mathcal{S}_k(N, \chi)$  と  $g \in \mathcal{M}_l(N, \psi)$  に対して

$$L(s, f \otimes g) = L(2s - k - l + 2, \bar{\chi}\psi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a_n(f)} a_n(g)}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > \frac{k+1}{2} + l$$

\*4 モジュラー形式, カスプ形式の正確な定義については例えば [9, CHAPTER III] を参照されたい.

とおき,  $(f, g)$  に関する Rankin-Selberg  $L$ -関数と呼ぶ. ここで  $L(s, \overline{\chi}\psi)$  は  $\overline{\chi}\psi$  のディリクレ  $L$ -関数である. もし  $f$  と  $g$  のどちらもカスプ形式ならば,  $L(s, f \otimes g)$  の絶対収束域が  $\operatorname{Re}(s) > \frac{k+l}{2}$  まで広がるのが Deligne [3] により知られている. Rankin-Selberg  $L$ -関数は全平面上の有理型関数に解析接続され,  $s \leftrightarrow k+l-1-s$  に関する関数等式を持つ. Deligne [4] により良い  $L$ -関数に対して臨界点というものが定義されており, 臨界点における特殊値 (以下, 臨界値) は適当な超越数と代数的数の積であると予想されている.  $L(s, f \otimes g)$  の臨界点は本質的には  $\frac{k+l}{2} \leq m \leq k-1$  をみたす整数  $s = m$  で尽くされることが知られている.\*5 臨界点の集合が空でないためには  $k-l \geq 2$  でなければならないことに注意する.

## 2.2 概正則モジュラー形式と Maass-Shimura 作用素

ここでは概正則モジュラー形式と Maass-Shimura 作用素の定義と基本的な性質を思い出す (詳細は [14], [15] を見よ).  $\mathfrak{H}$  上の  $C^\infty$  級関数  $\varphi$  が重さ  $k$ , レベル  $N$ , 指標  $\chi$ , 次数  $t$  の概正則モジュラー形式であるとは次をみたすときにいう:

- (1) 任意の  $\gamma \in \Gamma_0(N)$  に対して  $\varphi|_k \gamma = \chi(\gamma)\varphi$ .
- (2) 任意の  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$  に対して, 一意的な展開

$$(\varphi|_k \gamma)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(y; \varphi, \gamma) e\left(\frac{nz}{N_\gamma}\right),$$

が成り立つような整数  $N_\gamma$  ( $0 < N_\gamma \leq N$ ) が存在する. ここで  $\{B_n(y; \varphi, \gamma)\}_{n=0}^{\infty}$  は  $y^{-1}$  に関する  $t$  次多項式の族である.

そのような概正則モジュラー形式の集合を  $\mathcal{N}_k^t(N, \chi)$  と表す.

概正則モジュラー形式  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{N}_k^t(N, \chi)$  に対して\*6

$$\operatorname{vol}(\Gamma_0(N) \backslash \mathfrak{H})^{-1} \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathfrak{H}} \overline{\varphi_1(z)} \varphi_2(z) y^k \frac{dx dy}{y^2}$$

が収束するとき, これを  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$  と表す. ここで  $\operatorname{vol}(\Gamma_0(N) \backslash \mathfrak{H})$  は  $\mathfrak{H}$  の測度  $y^{-2} dx dy$  に関する体積である. 特に  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}_k(N, \chi)$  ならば上記のペアリングは  $\mathcal{S}_k(N, \chi)$  上の内積を定めることが知られており, Petersson 内積と呼ばれている.

$C^\infty(\mathfrak{H})$  上の微分作用素  $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  を

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

と定める. さらに, 非負整数  $r$  に対して微分作用素  $\delta_r$  と  $\varepsilon$  をそれぞれ

$$\begin{aligned} (\delta_r f)(z) &= \operatorname{Im}(z)^{-r} \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{Im}(z)^r f(z)) = \frac{rf(z)}{2i \operatorname{Im}(z)} + \frac{\partial f}{\partial z}(z), \\ (\varepsilon f)(z) &= -\operatorname{Im}(z)^2 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \end{aligned}$$

\*5 保型  $L$ -関数の特殊値で, 臨界値の他に中心値と呼ばれる値がよく研究されている. これは関数等式の定める帯領域の中心での値であり, Rankin-Selberg  $L$ -関数の場合は  $s = \frac{k+l-1}{2}$  における特殊値が中心値と呼ばれる. これは明らかに臨界値ではないことに注意する.

\*6 より一般に, 上記の条件 (1) が成り立つような  $\mathfrak{H}$  上の  $C^\infty$  級関数に対し, ペアリング  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$  を考えることができる.

と定める. もし  $f$  が正則ならば  $\varepsilon f = 0$  であることに注意する. また, 非負整数  $p$  に対して  $\delta_r^p$  を  $\delta_r^0 = 1$ ,  $\delta_r^{p+1} = \delta_{r+2p}\delta_r^p$  によって帰納的に定める.

**命題 2.1.** 微分作用素  $\delta_r, \varepsilon$  について次が成り立つ.

- (1)  $4\delta_r\varepsilon = 4\varepsilon\delta_{r+2} - r - 2$
- (2)  $\delta_k^p(\mathcal{N}_k^t(N, \chi)) \subset \mathcal{N}_{k+2p}^t(N, \chi)$ ,  $\varepsilon^{p+1}(\mathcal{N}_{k+2}^t(N, \chi)) \subset \mathcal{N}_{k-2p}^t(N, \chi)$
- (3)  $f \in \mathcal{N}_k^t(N, \chi)$ ,  $g \in \mathcal{N}_{k+2}^t(N, \chi)$  に対し, (ベアリングが定義されるならば)  $\langle f, \varepsilon g \rangle = \langle \delta_k f, g \rangle$ .

志村 [13] は  $k > 2t$  のとき, 任意の  $\varphi \in \mathcal{N}_k^t(N, \chi)$  はモジュラー形式と微分作用素  $\delta_r, \varepsilon$  を使って表されることを示した. より正確には次が成り立つ.

**命題 2.2.**  $k > 2t$  のとき, 概正則モジュラー形式  $\varphi \in \mathcal{N}_k^t(N, \chi)$  は

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^t (\delta_{k-2j}^j \eta_j(\varphi))(z)$$

と表される. ここで  $\eta_j(\varphi) \in \mathcal{M}_{k-2j}(N, \chi)$  であり, これらは  $\varphi$  から一意的に定まる. さらに, もし  $\varphi$  が任意の  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$  に対して  $B_0(y; \varphi, \gamma) = 0$  をみたすならば, 各  $\eta_j(\varphi)$  は  $\eta_j(\varphi) \in \mathcal{S}_{k-2j}(N, \chi)$  ととれる.

特に  $\eta_0(\varphi)$  は  $\varphi$  の正則射影と呼ばれる.

## 2.3 実解析的アイゼンシュタイン級数

ここでは実解析的アイゼンシュタイン級数と, それを用いた Rankin-Selberg  $L$ -関数の積分表示を紹介する.

$h$  を整数とし,  $\chi$  を  $\chi(-1)^h = (-1)^h$  となるような法  $N$  のディリクレ指標とする. 特に  $\chi$  が自明指標  $\mathbf{1}_N$  ならば,  $h$  は偶数でなければならないことに注意する. 以後, 自明指標  $\mathbf{1}_1$  を単に  $\mathbf{1}$  と書くことにする. このとき,

$$E_h^\chi(z, s) = 2L(2s + h, \chi) \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \chi(\gamma)(\mathrm{Im}^s|_h\gamma)(z), \quad (z, s) \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C},$$

を指標  $\chi$  の (実解析的) アイゼンシュタイン級数と呼ぶ. ここで  $\mathrm{Im}^s$  は  $\mathrm{Im}^s(z) = \mathrm{Im}(z)^s$  であり,  $\Gamma_\infty$  は

$$\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

と定義される. 任意の  $z \in \mathfrak{H}$  に対して,  $E_h^\chi(z, s)$  は  $\mathrm{Re}(s) > 1 - h/2$  で絶対かつコンパクト一様収束することが知られている. また, 容易に確かめられるように, 任意の  $\gamma \in \Gamma_0(N)$  に対して  $E_{h,s}^\chi|_h\gamma = \overline{\chi}(\gamma)E_{h,s}^\chi$  が成り立つ. ここで  $E_{h,s}^\chi$  は  $E_{h,s}^\chi(z) = E_h^\chi(z, s)$  と定義される.

アイゼンシュタイン級数  $E_h^\chi(z, s)$  は Whittaker 関数

$$W_{\kappa, \mu}(y) = \frac{e^{-y/2}y^{\mu+1/2}}{\Gamma(-\kappa + \frac{1}{2} + \mu)} \int_0^\infty e^{-yt}t^{-\kappa-1/2+\mu}(1+t)^{\kappa-1/2+\mu}dt, \quad y > 0.$$

を使って表されるフーリエ展開を持つことが知られている (例えば [12, Theorem 7.2.9] を見よ). こ

れにより  $E_h^\chi(z, s)$  は全  $s$ -平面上の有理型関数に解析接続される. 特に, フーリエ展開の特別な場合として, 次のような表示が得られる (証明は [6, Corollary 1] を見よ).

**命題 2.3.**  $h$  を  $h \geq 2$  となるような整数とし,  $\mu$  を  $1 - h/2 \leq \mu \leq 0$  となるような整数とする. このとき

$$\begin{aligned} E_h^\chi(z, \mu) &= 2L(2\mu + h, \chi)y^\mu - \frac{2\pi y^{-h/2}}{Nh} \prod_{p|N} (1 - p^{-1}) \delta\left(\mu = 1 - \frac{h}{2}, \chi = \mathbf{1}_N\right) \\ &\quad + \frac{2i^h \mathbf{g}(\chi_0)}{(\mu + h - 1)!} \left(\frac{-2\pi}{N}\right)^{2\mu+h} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \alpha_\lambda^{(h, \chi)}(\mu) \left(\sum_{j=0}^{|\mu|} \binom{|\mu|}{j} (1 - \mu - h)_j (4\pi\lambda)^{|\mu|-j} y^{-j}\right) e(\lambda z) \end{aligned}$$

が成り立つ.

特に  $1 - h/2 < \mu \leq 0$  に対して  $E_{h, \mu}^\chi \in \mathcal{N}_h^{|\mu|}(N, \overline{\chi})$  が成り立つことと,  $E_{h, 1-h/2}^\chi \in \mathcal{N}_h^{h/2}(N, \overline{\chi})$  が成り立つことがわかる. ここで  $M$  をメビウス関数として,  $\chi_0$  を  $\chi$  の原始的指標,  $c_\chi$  を  $\chi$  の導手とするとき,  $\alpha_n^{(h, \chi)}(s)$  は

$$\alpha_n^{(h, \chi)}(s) = \sum_{0 < d|n} d^{2s+h-1} \sum_{0 < l | \gcd(d, N/c_\chi)} l \cdot M\left(\frac{N}{lc_\chi}\right) \chi_0\left(\frac{N}{lc_\chi}\right) \overline{\chi_0}\left(\frac{d}{l}\right)$$

と定義される. また,  $\mathbf{g}(\chi_0)$  は  $\chi_0$  のガウス和である.

Rankin–Selberg  $L$ -関数  $L(s, f \otimes g)$  について, 次の積分表示が知られている. このおかげで  $L(s, f \otimes g)$  は全  $s$ -平面上の有理関数へ解析接続され, 極の位置もわかる. また, この積分表示は臨界値の研究でも重要な役割を果たす ([13]).

**命題 2.4.**  $f \in \mathcal{S}_k(N, \chi)$ ,  $g \in \mathcal{M}_l(N, \psi)$  に対して

$$\begin{aligned} 2(4\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s, f \otimes g) &= \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathfrak{H}} \overline{f(z)} g(z) E_{k-l}^{\overline{\chi}\psi}(z, s - k + 1) y^k \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \text{vol}(\Gamma_0(N) \backslash \mathfrak{H}) \left\langle f, g E_{k-l, s-k+1}^{\overline{\chi}\psi} \right\rangle \end{aligned}$$

が成り立つ.

### 3 正則射影

#### 3.1 正則射影のフーリエ係数

任意の  $\varphi \in \mathcal{N}_k^t(N, \chi)$  に対して, そのフーリエ係数  $B_n(y, \varphi)$  は  $\mathbb{C}[y^{-1}]$  の要素であった. 各多項式  $\phi(y) \in \mathbb{C}[y^{-1}]$  に対して, その定数項を  $\mathcal{C}(\phi(y))$  と表すことにする. また,  $n \geq 0$  と  $0 \leq q \leq t$  に対して,  $\Upsilon_n(q)$  を

$$\Upsilon_n(q) = \mathcal{C}\left(\frac{2^{2q}}{q!(k-2q)_q} (\varepsilon^q B_n)(y, \varphi)\right)$$

と定める. このとき,  $\varphi \in \mathcal{N}_k^t(N, \chi)$  に対して, モジュラー形式  $\eta_q(\varphi)$  のフーリエ係数は次で与えられる ( $\eta_q(\varphi)$  の定義については命題 2.2 を見よ).

**定理 3.1** (Gejima [7], 2022).  $\varphi \in \mathcal{N}_k^t(N, \chi)$  とする. このとき, もし  $k > 2t$  であれば,  $\eta_q(\varphi)$  の  $n$  番目のフーリエ係数は

$$a_n(\eta_q(\varphi)) = \sum_{j=0}^{t-q} \frac{\Upsilon_n(q+j)(k-2q-1)(k-2q-2j)_j}{(k-2q-j-1)(k-q-j)_j} \binom{q+j}{j} (-2\pi i n)^j$$

で与えられる. 特に正則射影  $\eta_0(\varphi)$  については

$$a_n(\eta_0(\varphi)) = \sum_{j=0}^t \frac{\Upsilon_n(j)(k-2j)_j}{(k-j-1)_j} (-2\pi i n)^j$$

が成り立つ.

$k, l$  を  $k-l \geq 2$  となるような正の整数とし,  $\chi, \psi$  をそれぞれ  $\chi(-1) = (-1)^k, \psi(-1) = (-1)^l$  を満たすような法  $N$  のディリクレ指標とする.  $g \in \mathcal{M}_l(N, \psi)$  とし,  $m$  を  $\frac{k+l}{2} \leq m \leq k-1$  となるような整数とする (つまり  $m$  は  $L(s, f \otimes g)$  の臨界点である).

点列  $\{A_n^{(\overline{\chi}\psi)}(\mu; g)\}_{n=0}^\infty$  を

$$\begin{aligned} A_n^{(\overline{\chi}\psi)}(\mu; g) &= -\frac{a_n(g)\pi(4\pi n)^{\frac{k-l}{2}}}{N h(\frac{k+l}{2}-1)^{\frac{1}{2}}} \prod_{p|N} (1-p^{-1}) \cdot \delta\left(\mu = 1 - \frac{k-l}{2}, \chi = \psi\right) \\ &\quad + \frac{a_n(g)(4\pi n)^{|\mu|}}{(\mu+k-1)_{|\mu|}} L(2\mu+k-l, \overline{\chi}\psi) \\ &\quad + \frac{\pi^\mu (-2\pi i)^{k-l} \mathfrak{g}((\overline{\chi}\psi)_0)}{N^{2\mu+k-l} (\mu+k-l-1)!} \sum_{\nu=1}^n a_{n-\nu}(g) R_\nu^{(k-l, \overline{\chi}\psi)}(\mu, n). \end{aligned}$$

と定める. ここで  $R_\nu^{(k-l, \overline{\chi}\psi)}(\mu, n)$  は

$$R_\nu^{(k-l, \overline{\chi}\psi)}(\mu, n) = \nu^{|\mu|} \alpha_\nu^{(k-l, \overline{\chi}\psi)}(\mu) \sum_{j=0}^{|\mu|} \frac{(k-l+\mu-j)_j}{(k-1-j)_j} \left(\frac{-n}{\nu}\right)^j \binom{|\mu|}{j}$$

で与えられる代数的数である.

このとき, 定理 3.1 により概正則モジュラー形式  $gE_{k-l, m-k+1}^{\overline{\chi}\psi}$  の正則射影は次のようなフーリエ展開を持つことがわかる.

**系 3.2.**

$$\eta_0 \left( gE_{k-l, m-k+1}^{\overline{\chi}\psi} \right) (z) = 2 \sum_{n=0}^\infty A_n^{(\overline{\chi}\psi)}(m-k+1; g) e(nz).$$

### 3.2 正則射影から定まるモジュラー形式間の写像について

$k, l$  を  $k-l \geq 2$  となるような正の整数とし,  $\chi, \psi$  をそれぞれ  $\chi(-1) = (-1)^k, \psi(-1) = (-1)^l$  を満たすような法  $N$  のディリクレ指標とする.  $g \in \mathcal{M}_l(N, \psi)$  とし,  $m$  を  $\frac{k+l}{2} \leq m \leq k-1$  となるような整数とする. このとき, 線形写像  $H_m : \mathcal{S}_l(N, \psi) \rightarrow \mathcal{S}_k(N, \chi)$  を

$$H_m(g) = H_m^{(l)}(g) = \frac{1}{2} \eta_0 \left( gE_{k-l, m-k+1}^{\overline{\chi}\psi} \right) = \sum_{n=0}^\infty A_n^{(\overline{\chi}\psi)}(m-k+1; g) e(nz)$$

と定義する. また, 正の整数  $\lambda$  を

$$\lambda = \lambda(k, l, N) = N(k-l) \left( \frac{k+l}{2} - 1 \right) \prod_{p|N} (1+p^{-1})$$

により定める.

**補題 3.3.**  $S_k(N, \chi) \neq 0$  かつ  $S_l(N, \psi) \neq 0$  ならば  $\lambda > 24$  である.

証明.  $S_k(N, \chi) \neq 0$  かつ  $S_l(N, \psi) \neq 0$  とする. 明らかに

$$\lambda \geq 2lN \prod_{p|N} (1+p^{-1}) \quad (3.1)$$

が成り立つことに注意する.

まず  $N = 1$  とする. このとき,  $l$  は  $l \geq 12$  をみたす偶数であるとしてよい. 特に  $\lambda \geq 24$  が成り立つ. ここで, もし  $\lambda = (k-l) \left( \frac{k+l}{2} - 1 \right) = 24$  ならば,  $k = 8, 9, 14$  でなければならない. しかし, これは  $S_k(SL_2(\mathbb{Z})) \neq 0$  に矛盾する. したがって  $\lambda > 24$  である.

次に  $N \geq 2$  とする. (3.1) から  $\lambda > 2lN$  が成り立つ.  $l = 1$  のとき, [1] の Corollary 3 によると,  $N < 23$  ならば  $S_1(N, \psi) = 0$  である (ウェブページ [2] も見よ). したがって,  $N \geq 23$  としてよく,  $\lambda > 46$  が成り立つことがわかる. 最後に  $l \geq 2$  とする. このとき, ウェブページ [16] のリストによると,  $N > 1$  かつ  $lN \leq 12$  ならば  $S_l(N, \psi) = 0$  が成り立つ. したがって  $lN > 12$  としてよく,  $\lambda > 24$  が成り立つことがわかる.  $\square$

**命題 3.4.**  $S_k(N, \chi) \neq 0$ ,  $S_l(N, \psi) \neq 0$  と仮定する.  $m$  を  $\frac{k+l}{2} \leq m \leq k-1$  をみたす整数とする.

- (1)  $g \in S_l(N, \psi)$  を  $a_1(g) \neq 0$  となるようにとる. このとき  $a_1(H_m^{(l)}(g)) = A_1^{(\bar{\chi}\psi)}(\mu(m); g) \neq 0$  が成り立つ.
- (2) もし  $\frac{k+l}{2} < m \leq k-1$  または  $\chi \neq \psi$  が成り立つならば, 写像  $H_m^{(l)}$  は単射である.
- (3)  $k \equiv l \pmod{2}$  かつ  $\chi = \psi$  と仮定する. もし  $\lambda \notin 24\mathbb{Z}$  または  $\lambda > 2lN^2 \prod_{p|N} (1-p^{-2})$  が成り立つならば  $H_{\frac{k+l}{2}}^{(l)}$  は単射である.

証明. (1)  $g \in S_l(N, \psi)$  を  $a_1(g) \neq 0$  となるようにとる. まず  $\frac{k+l}{2} < m \leq k-1$  または  $\chi \neq \psi$  が成り立つとする. このとき,  $L(2m-k-l+2, \bar{\chi}\psi) \neq 0$  なので

$$A_1^{(\bar{\chi}\psi)}(\mu(m); g) = \frac{a_1(g)(4\pi)^{k-m-1}}{(m)_{k-m-1}} L(2m-k-l+2, \bar{\chi}\psi) \neq 0$$

が成り立つ.

次に  $m = \frac{k+l}{2} \in \mathbb{Z}$  かつ  $\chi = \psi$  が成り立つとする. このとき,  $L(2, \mathbf{1}_N) = \frac{\pi^2}{6} \prod_{p|N} (1-p^{-2})$  なので

$$A_1^{(\mathbf{1}_N)}(1 - \frac{k-l}{2}; g) = \frac{a_1(g)\pi^2(4\pi)^{\frac{k-l}{2}-1}}{6N(k-l) \left( \frac{k+l}{2} - 1 \right)^{\frac{k-l}{2}}} (\lambda - 24) \prod_{p|N} (1-p^{-1})$$

が成り立つ. したがって, 補題 3.3 により  $A_1^{(\mathbf{1}_N)}(1 - \frac{k-l}{2}; g) \neq 0$  であることがわかる.

(2)  $\frac{k+l}{2} < m \leq k-1$  または  $\chi \neq \psi$  が成り立つとする.  $g \in S_l(N, \psi)$  について  $H_m(g) = 0$  であったとする. このとき, 任意の自然数  $n$  について  $A_n^{(\bar{\chi}\psi)}(\mu(m); g) = 0$  が成り立つ. 数学的帰納法により, 各自然数  $n$  について  $a_n(g) = 0$  となることを示す.  $n = 1$  のときは (1) により  $a_1(g) = 0$  である.

$n > 1$  とし,  $1 \leq j < n$  をみたま任意の自然数  $j$  に対して  $a_j(g) = 0$  であると仮定する. このとき, その仮定により

$$A_n^{(\overline{\chi}\psi)}(\mu(m); g) = \frac{a_n(g)(4\pi n)^{k-m-1}}{(m)_{k-m-1}} L(2m - k - l + 2, \overline{\chi}\psi) = 0$$

であるから  $a_n(g) = 0$  であることがわかる. したがって, 数学的帰納法により  $g = 0$  であることがわかる.

(3)  $m = \frac{k+l}{2} \in \mathbb{Z}$  かつ  $\chi = \psi$  とする.  $g \in \mathcal{S}_l(N, \chi)$  について  $H_{\frac{k+l}{2}}(g) = 0$  であったとする. このとき, 任意の自然数について  $A_n^{(1_N)}(1 - \frac{k-l}{2}; g) = 0$  が成り立つ. 数学的帰納法により, 各自然数  $n$  について  $a_n(g) = 0$  となることを示す.  $n = 1$  のときは (1) により  $a_1(g) = 0$  である.  $n > 1$  とし,  $1 \leq j < n$  をみたま任意の自然数  $j$  に対して  $a_j(g) = 0$  であると仮定する. このとき, その仮定により

$$A_n^{(1_N)}(1 - \frac{k-l}{2}; g) = \frac{a_n(g)\pi^2(4\pi n)^{\frac{k-l}{2}-1}}{6N(k-l)\left(\frac{k+l}{2}-1\right)^{\frac{k-l}{2}}} (\lambda - 24n) \prod_{p|N} (1 - p^{-1}) = 0 \quad (3.2)$$

が成り立つ. ここで  $\lambda \notin 24\mathbb{Z}$  ならば明らかに  $a_n(g) = 0$  である. よって  $\lambda > 24N^2 \prod_{p|N} (1 - p^{-2})$  と仮定して  $a_n(g) = 0$  であることを示せば十分である. このとき, 不等式

$$\frac{\lambda}{24} > \frac{l}{12} [SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_1(N)]$$

が成り立つ. なぜなら  $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_1(N)] = N^2 \prod_{p|N} (1 - p^{-2})$  だからである. もし  $\lambda \leq 24N$  ならば, 後述の補題 3.6 により  $g = 0$  である. したがって  $\lambda > 24N$  としてよい. このとき, (3.2) により  $a_n(g) = 0$  であるので, 数学的帰納法により  $\lambda > 24\nu$  をみたま任意の自然数  $\nu$  について  $a_\nu(g) = 0$  が成り立つ. したがって  $\text{ord}_\infty(g) \geq \frac{\lambda}{24}$  であり, 補題 3.6 により  $g = 0$  がわかる.  $\square$

**注意 3.5.**  $k \equiv l \pmod{2}$  かつ  $\chi = \psi$  とする. このとき, もし  $\lambda \in 24\mathbb{Z}$  かつ  $\lambda \leq 24N^2 \prod_{p|N} (1 - p^{-2})$  ならば  $H_{\frac{k+l}{2}}^{(l)} : \mathcal{S}_l(SL_2(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  が単射でない可能性がある. 実際, 例えば  $N = 1, l \in 12\mathbb{Z}, k = l + 2$  の場合を考えてみると,  $\lambda = 2l \in 24\mathbb{Z}$  かつ  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_l(SL_2(\mathbb{Z})) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z})) + 1$  となる. 特に, この場合は  $H_{\frac{k+l}{2}}^{(l)}$  は単射ではない.

次の補題は本質的には Sturm [17] により証明された. 証明は [8, Theorem 3.13] を見よ.

**補題 3.6.**  $\Gamma$  を  $SL_2(\mathbb{Z})$  の合同部分群とし,  $f$  を  $\Gamma$  に関する重さ  $k$  のモジュラー形式とする. このとき, もし

$$\text{ord}_\infty(f) > \frac{k}{12} [SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$$

ならば  $f = 0$  である.

## 4 Rankin–Selberg $L$ -関数の臨界値に関するいくつかの命題について

ここでは Rankin–Selberg  $L$ -関数の臨界値について, 主結果を含むいくつかの定理を紹介したい. ただし, いくつかの命題の証明については [6], [7] に譲る.

以下,  $k, l$  を  $k-l \geq 2$  となるような正の整数とし,  $\chi, \psi$  をそれぞれ  $\chi(-1) = (-1)^k, \psi(-1) = (-1)^l$  をみたまような法  $N$  のディリクレ指標とする. また,  $m$  を  $\frac{k+l}{2} \leq m \leq k-1$  となるような整数とする. 特にことわらない限り  $g \in \mathcal{M}_l(N, \psi)$  である.

#### 4.1 臨界値の平均

$\Xi(m), \mathcal{V}_n^{(\overline{\chi}^\psi)}(m; g)$  をそれぞれ次のように定める:

$$\Xi(m) = \frac{(4\pi)^k (2\pi i)^{2m-k-l+2} \prod_{p|N} (1+p^{-1})}{12(m-1)!}, \quad \mathcal{V}_n^{(\overline{\chi}^\psi)}(m; g) = \frac{N A_n^{(\overline{\chi}^\psi)}(m-k+1; g)}{2^{k-l} i^{2m-k-l+2} \pi^{m-l+1} \mathfrak{g}((\overline{\chi}^\psi)_0)}.$$

**定理 4.1** (Gejima [7], 2022).  $g \in \mathcal{S}_l(N, \psi)$  とし,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k(N, \chi)$  を  $\mathcal{S}_k(N, \chi)$  の任意の直交基底とする. また,  $m$  を  $\frac{k+l}{2} \leq m \leq k-1$  をみたすような整数とする. このとき, 任意の自然数  $n$  に対して

$$\sum_{f \in \mathcal{B}} \frac{a_n(f) L(m, f \otimes g)}{\Xi(m) \mathfrak{g}((\overline{\chi}^\psi)_0) \langle f, f \rangle} = \mathcal{V}_n^{(\overline{\chi}^\psi)}(m; g)$$

が成り立つ.

これは [6] の Theorem 2 の一般化である. Rankin–Selberg  $L$ -関数の積分表示により

$$H_m^{(l)}(g) = \sum_{f \in \mathcal{B}_k(N, \chi)} \frac{\langle f, H_m^{(l)}(g) \rangle}{\langle f, f \rangle} f = (\text{定数}) \times \sum_{f \in \mathcal{B}_k(N, \chi)} \frac{L(m, f \otimes g)}{\langle f, f \rangle} f$$

が成り立つので, 両辺の  $n$  番目のフーリエ係数を比較すれば定理 4.1 が示される.

$SL_2(\mathbb{Z})$  に関する重さ  $k$  のモジュラー形式の空間において, アイゼンシュタイン級数の生成する部分空間の次元は 1 次元であることに注意すると, 定理 4.1 と同様にして次が示される.

**定理 4.2** (Gejima [7], 2022).  $k, l$  を  $k-l \geq 2$  をみたすような正の偶数とする.  $g \in \mathcal{M}_l(SL_2(\mathbb{Z}))$  とし,  $\mathcal{B}_k$  を  $\mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  の任意の直交基底とする. また,  $m$  を  $\frac{k+l}{2} \leq m \leq k-1$  をみたすような整数とする. このとき, 任意の自然数  $n$  に対して

$$\sum_{f \in \mathcal{B}_k} \frac{a_n(f) L(m, f \otimes g)}{\Xi(m) \langle f, f \rangle} = \mathcal{V}_n^{(1)}(m; g) - \frac{k a_0(g) \sigma_{k-1}(n) B_{k-l}}{(k-l)! B_k} \cdot \delta(m=k-1)$$

が成り立つ.

#### 4.2 臨界値の数論的な明示公式と整性

定理 4.1, 4.2 は Rankin–Selberg  $L$ -関数の臨界値に関する連立方程式だと考えられる. これを解き, 臨界値の明示公式を示す.

$d = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  とおく.  $\mathcal{B}_k = \{f_1, \dots, f_d\}$  を  $\mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  の任意の基底とする. このとき,  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_k)$  を次のようにフーリエ係数によって定義される  $(d \times d)$ -行列とする:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}_k) = \begin{pmatrix} a_1(f_1) & a_1(f_2) & \cdots & a_1(f_d) \\ a_2(f_1) & a_2(f_2) & \cdots & a_2(f_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_d(f_1) & a_d(f_2) & \cdots & a_d(f_d) \end{pmatrix}.$$

**命題 4.3.**  $\mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  の任意の基底  $\mathcal{B}_k$  に対して, 行列  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_k)$  は正則である.

後述の補題 4.4 により,  $\mathcal{A}(\{F_j\}_{j=1}^d) = I_d$  となるような  $\mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  の基底  $\{F_j\}_{j=1}^d$  が存在する. このとき, 任意の基底  $\mathcal{B}_k$  に対して, 行列  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_k)$  は  $\{F_j\}_{j=1}^d$  から  $\mathcal{B}_k$  への基底の取り換え行列である. 特に  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_k)$  は正則である.

**補題 4.4.**  $\mathcal{A}(\{F_j\}_{j=1}^d) = I_d$  となるような  $\mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  の基底  $\{F_j\}_{j=1}^d$  が存在する.

証明.  $G_n$  を  $SL_2(\mathbb{Z})$  に関する重さ  $n$  の正則アイゼンシュタイン級数とする.  $a_0(G_n) = 1$  となるように正規化しておく.  $\Delta$  を Ramanujan のデルタ関数とする. こちらも  $a_1(\Delta) = 1$  となるように正規化しておく.

非負整数  $a, b$  を  $k \bmod 12$  に応じて次の表のように選ぶ:

| $k \bmod 12$ | 0      | 2      | 4      | 6      | 8      | 10     |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $(a, b)$     | (0, 0) | (2, 1) | (1, 0) | (0, 1) | (2, 0) | (1, 1) |

各  $j = 1, \dots, d$  に対して, モジュラー形式  $h_j$  を  $h_j = \Delta^j G_4^a G_6^{2(d-j)+b}$  と定める. 次元公式

$$d = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor & (\text{if } k \not\equiv 2 \pmod{12}), \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor - 1 & (\text{if } k \equiv 2 \pmod{12}), \end{cases}$$

により,  $h_j \in \mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  であることがわかる. すぐに確認できるように  $a_i(h_i) = 1$  であり,  $i < j$  ならば  $a_i(h_j) = 0$  である. 特に  $\{h_j\}_{j=1}^d$  は  $\mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  の基底である. このとき, ガウスの消去法によって  $\{h_j\}_{j=1}^d$  から所望の基底  $\{F_j\}_{j=1}^d$  を構成することができる.  $\square$

定理 4.2 と命題 4.3 により, Rankin–Selberg  $L$ -関数の臨界値の明示公式が得られる. ここで  $[x_j]_{j=1}^d$  は縦ベクトル  ${}^t(x_1, \dots, x_d)$  を表す.

**定理 4.5** (Gejima [7], 2022).  $k, l$  を  $k-l \geq 2$  をみたすような正の偶数とする.  $g \in \mathcal{M}_l(SL_2(\mathbb{Z}))$  とし,  $\mathcal{B}_k$  を  $\mathcal{S}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  の任意の直交基底とする. また,  $m$  を  $\frac{k+l}{2} \leq m \leq k-1$  をみたすような整数とする. このとき

$$\left[ \frac{L(m, f_j \otimes g)}{\Xi(m) \langle f_j, f_j \rangle} \right]_{j=1}^d = \mathcal{A}(\mathcal{B}_k)^{-1} \left[ \mathcal{V}_j^{(1)}(m; g) - \frac{ka_0(g)\sigma_{k-1}(j)B_{k-l}}{(k-l)!B_k} \cdot \delta(m=k-1) \right]_{j=1}^d$$

が成り立つ.

定理 4.5 から単純な議論により, 臨界値の整性 (系 1.2) が得られる.

$\Gamma_1(N)$  に関するカスプ形式に対する定理 4.5 の類似について説明する. そのために, いくつか記号を導入する.  $\mathcal{S}_k(N, \chi)$  のニューフォームのなす部分空間を  $\mathcal{S}_k^{\text{new}}(N, \chi)$  と表す.\*7

$d = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_k(N, \chi)$  とおき,  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$  を自然数のベクトルとする. このとき,  $\mathcal{S}_k(N, \chi)$  の任意の基底  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k(N, \chi) = \{f_1, \dots, f_d\}$  に対して,  $(d \times d)$ -行列  $\mathcal{A}_{\mathbf{n}}(\mathcal{B})$  を次のように定める:

$$\mathcal{A}_{\mathbf{n}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a_{n_1}(f_1) & a_{n_1}(f_2) & \cdots & a_{n_1}(f_d) \\ a_{n_2}(f_1) & a_{n_2}(f_2) & \cdots & a_{n_2}(f_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_d}(f_1) & a_{n_d}(f_2) & \cdots & a_{n_d}(f_d) \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

このとき次が成り立つ.

**定理 4.6.**  $k, l$  を  $k-l \geq 2$  をみたすような正の整数とする.  $g \in \mathcal{S}_l(N, \psi)$  とし,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k(N, \chi) = \{f_1, \dots, f_d\}$  を  $\mathcal{S}_k(N, \chi)$  の任意の直交基底とする. また,  $m$  を  $\frac{k+l}{2} \leq m \leq k-1$  をみたすような整数とする.  $S$  を  $N$  を割る素数をすべて含むような素数の有限集合とする. さらに  $N$  は平方因子を持たないとし,  $\mathcal{S}_k^{\text{new}}(N, \chi) = \mathcal{S}_k(N, \chi)$  が成り立つと仮定する. このとき, 各  $j$  に対して  $p_j \notin S$  となるような素数のベクトル  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)$  で次をみたすようなものが存在する:

\*7 ニューフォームの定義については [9, p.174] を見よ.

(1)  $\mathcal{A}_p(\mathcal{B})$  は正則である.

$$(2) \left[ \frac{D(m, f_j \otimes g)}{\Xi(m) \mathbf{g}((\overline{\chi}\psi)_0) \langle f_j, f_j \rangle} \right]_{j=1}^d = \mathcal{A}_p(\mathcal{B})^{-1} \left[ \mathcal{V}_{p_j}^{(\overline{\chi}\psi)}(m; g) \right]_{j=1}^d.$$

定理 4.6 (2) は定理 4.5 とほぼ同様に示される. 一方, (1) については命題 4.3 ほど易しくはない. (1) の証明は [7] の付録を見てもらいたい.\*8

**注意 4.7.** もし  $\chi$  が原始的ならば  $S_k^{new}(N, \chi) = S_k(N, \chi)$  が成り立つ (例えば [12, Lemma 4.6.9 (1)] を見よ).

### 4.3 臨界値によるカスプ形式の特徴づけ

ここでは臨界値によるカスプ形式の特徴づけの証明について述べたい. 以下,  $S_k(N, \chi) \neq 0$  とする.

**定理 4.8** (Gejima [7], 2022).  $k, l_i, i = 1, 2$  を  $k - l_i \geq 2$  をみたすような整数とする.  $g_i \in \mathcal{S}_{l_i}(N, \psi)$  を  $a_1(g_1)/a_1(g_2) \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$  となるようにとり,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k(N, \chi)$  を  $S_k(N, \chi)$  の直交基底とする. また,  $m$  を  $\max(\frac{k+l_1}{2}, \frac{k+l_2}{2}) \leq m \leq k-1$  をみたすような整数とする. さらに  $\max(\frac{k+l_1}{2}, \frac{k+l_2}{2}) < m \leq k-1$  または  $\chi \neq \psi$  が成り立つと仮定する. このとき, もし任意の  $f \in \mathcal{B}$  に対して  $L(m, f \otimes g_1) = L(m, f \otimes g_2)$  が成り立つならば  $l_1 = l_2$  かつ  $g_1 = g_2$  である.

証明.  $m$  を  $\max(\frac{k+l_1}{2}, \frac{k+l_2}{2}) \leq m \leq k-1$  をみたすような整数とする.  $\max(\frac{k+l_1}{2}, \frac{k+l_2}{2}) < m \leq k-1$  または  $\chi \neq \psi$  が成り立つと仮定する. 任意の  $f \in \mathcal{B}$  に対して  $L(m, f \otimes g_1) = L(m, f \otimes g_2)$  が成り立つと仮定する. このとき, 命題 2.4 と

$$\sum_{f \in \mathcal{B}} \frac{L(m, f \otimes g_1)}{\langle f, f \rangle} f = \sum_{f \in \mathcal{B}} \frac{L(m, f \otimes g_2)}{\langle f, f \rangle} f$$

から  $H_m^{(l_1)}(g_1) = H_m^{(l_2)}(g_2)$  がわかる. 特に  $A_1^{(\overline{\chi}\psi)}(m - k + 1; g_1) = A_1^{(\overline{\chi}\psi)}(m - k + 1; g_2)$  が成り立つ. つまり

$$a_1(g_1)L(2m - k - l_1 + 2, \overline{\chi}\psi) = a_1(g_2)L(2m - k - l_2 + 2, \overline{\chi}\psi) \quad (4.2)$$

が成り立つ. このとき, ディリクレ  $L$ -関数の整数点における特殊値の代数性\*9 と (4.2) によって

$$\frac{(2\pi i)^{2m-k-l_1+2}}{(2\pi i)^{2m-k-l_2+2}} = \frac{a_1(g_1)}{a_1(g_2)} \frac{L(2m - k - l_1 + 2, \overline{\chi}\psi)}{(2\pi i)^{2m-k-l_1+2} \mathbf{g}((\overline{\chi}\psi)_0)} \frac{(2\pi i)^{2m-k-l_2+2} \mathbf{g}((\overline{\chi}\psi)_0)}{L(2m - k - l_2 + 2, \overline{\chi}\psi)} \in \overline{\mathbb{Q}}$$

が成り立つ. この等式から  $l_1$  と  $l_2$  は等しくなければならない. したがって  $H_m^{(l_1)}(g_1) = H_m^{(l_2)}(g_2)$  であり, 命題 3.4 から  $g_1 = g_2$  がわかる.  $\square$

定理 4.8 と同様にして, 次が証明される.

**定理 4.9** (Gejima [7], 2022).  $k, l_i, i = 1, 2$  を  $k \equiv l_1 \equiv l_2 \pmod{2}$ ,  $k - l_1 \geq 2$ ,  $l_1 \geq l_2$  をみたすような整数とする.  $g_i \in \mathcal{S}_{l_i}(N, \chi)$  を  $a_1(g_1)/a_1(g_2) \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$  となるようにとり,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k(N, \chi)$  を  $S_k(N, \chi)$

\*8 命題 4.3 ではフーリエ係数の行列が正則になるようにフーリエ係数の番号を具体的に指定することができた. 一方, 定理 4.6 (1) ではフーリエ係数の行列 (4.1) が正則となるようなフーリエ係数の番号の組が存在することしかわからない. このようなフーリエ係数の行列の性質について, 何かご存じの方や興味のある方がいらっしゃれば教えていただけると幸いです.

\*9 ディリクレ  $L$ -関数の特殊値の代数性については多くの文献がある (例えば [7, Lemma 2.3.5] を見よ).

の正規直交基底とする. さらに  $\lambda = \lambda(k, l_1, N) \notin 24\mathbb{Z}$  または  $\lambda > 2l_1N^2 \prod_{p|N} (1 - p^{-2})$  が成り立つと仮定する. このとき, もし任意の  $f \in \mathcal{B}$  に対して  $L(\frac{k+l_1}{2}, f \otimes g_1) = L(\frac{k+l_1}{2}, f \otimes g_2)$  が成り立つならば  $l_1 = l_2$  かつ  $g_1 = g_2$  である.

## 参考文献

- [1] K. Buzzard, *Computing weight one modular forms over  $\mathbf{C}$  and  $\overline{\mathbf{F}}_p$* , arXiv:1205.5077, (2018).
- [2] K. Buzzard, A. Lauder, *A computation of modular forms of weight one and small level*, webpage, <http://people.maths.ox.ac.uk/lauder/weight1>.
- [3] P. Deligne, *La conjecture de Weil. I*, Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. **43**, (1974), 273–307.
- [4] P. Deligne, *Valeurs de fonctions  $L$  et périodes d'intégrales*, AMS Proc. Symp. Pure Math. **33**, (1979), 313–346.
- [5] S. Ganguly, J. Hoffstein, J. Sengupta, *Determining modular forms on  $SL_2(\mathbb{Z})$  by central values of convolution  $L$ -functions*, Math. Ann. **345** (4), (2009), 843–857.
- [6] K. Gejima, *An average of special values of Dirichlet series of Rankin–Selberg type*, Ramanujan J. **52**(3), (2020), 459–489.
- [7] K. Gejima, “Some remarks on the critical values of Rankin–Selberg  $L$ -series”, J. Number Theory **238** (2022), 676–709.
- [8] L. J. P. Kilford, *Modular Forms. A Classical and Computational Introduction*, Imperial College Press, London (2008).
- [9] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, Graduate Texts in Mathematics **97**, Springer-Verlag, second edition, (1993).
- [10] D. Lanphier, *Determining cuspforms from critical values of convolution  $L$ -functions and Rankin–Cohen brackets*, Int. J. Number Theory **15** (2019), 1403–1412.
- [11] W. Luo, *Special values of Rankin–Selberg convolutions*, Math. Ann. **314** (3), (1999), 591–600.
- [12] T. Miyake, *Modular Forms*, Springer-Verlag, (1989).
- [13] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), 783–804.
- [14] G. Shimura, *Elementary Dirichlet Series and Modular Forms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, (2007).
- [15] G. Shimura, *Modular Forms: Basics and Beyond*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, (2012).
- [16] W. Stein, *Dimensions of spaces of cusp forms, with character*, webpage, <https://wstein.org/Tables/dimensions-all.html>.
- [17] J. Sturm, *On the congruence of modular forms*, Number theory (New York, 1984–1985), Lecture Notes in Math. **1240**, (Springer, Berlin, 1987), 275–280.
- [18] Y. Zhang, *Determining modular forms of general level by central values of convolution  $L$ -functions*, Acta Arith. **150**, (2011), 93–103.