

p 進多重ゼータ値の双対性について

九州大学・数理学府 田中 立志 (Tatsushi Tanaka)
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1 definition

本文中の p はすべて素数とする.

p 進多重ゼータ値の定義は, Coleman の p 進積分論を用いた古庄 [F] の仕事である. 本報告集ではその本質的な部分は省き, 定義に至るまでの話を概説することにする.

$k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$Li_{k_1, \dots, k_n}(z) := \sum_{m_1 > \dots > m_n > 0} \frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}}$$

なる $\mathbb{C}_p$ 上の関数を (重さ $k := k_1 + \dots + k_n$, 深さ n の) p 進多重ポリログ, p MPL という. これは $|z|_p < 1$ で収束している.

この関数を $z = 1$ でも意味あるものにするべく, まずは $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) - \{1, \infty\}$ まで解析接続する. そのために必要な理論が Coleman の p 進積分論である. その解析接続された p MPL をもって改めて p MPL ということにする. すなわち, p 進多重ポリログとは, 次のように帰納的に定まる $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) - \{1, \infty\}$ 上の Coleman 関数である.

$k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}_p$ に対して,

$$Li_{k_1, \dots, k_n}^a(z) = \begin{cases} \int_0^z \frac{1}{t} Li_{k_1-1, k_2, \dots, k_n}^a(t) dt & (k_1 > 1), \\ \int_0^z \frac{1}{1-t} Li_{k_2, \dots, k_n}^a(t) dt & (k_1 = 1). \end{cases}$$

$$Li_1^a(z) = -\log^a(1-z) \left(= \int_0^z \frac{dt}{1-t} \right).$$

$\log^a$ は p 進対数関数であり, a ごとに定まる ($\log^a(p) = a$). p 進多重ポリログはこの $\log^a$ ごとに定まる関数である. この形で帰納的に定義するのは, もとの $|z|_p < 1$ での級数表示から求まる, z に関する微分関係式に由来する. 積分の記号はすべて Coleman の p 進積分である.

そこで, この p MPL を極限值 $\lim'_{z \rightarrow 1}$ をとったものが (収束すればそれが) p 進多重ゼータ値, p MZV である. 重さ, 深さの概念は p MPL のそれと同じである.

$$\zeta_p(k_1, \dots, k_n) := \lim'_{z \rightarrow 1} Li_{k_1, \dots, k_n}^a(z)$$

ここに、 $\mathbb{C}_p$ 上の関数 $f(z)$ に対して、 $\lim_{z \rightarrow 1}' f(z)$ とは、次の 2 条件を満たす任意の数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ が同じ値に収束するときその値を表す。

(i) $z_n \rightarrow \alpha$ in $\mathbb{C}_p$,

(ii) $e(\mathbb{Q}_p(z_1, z_2, \dots)/\mathbb{Q}_p) < \infty$ (i.e. 分岐指数有限の拡大).

$\lim_{z \rightarrow 1}' Li_{k_1, \dots, k_n}^a(z)$ が収束するか否か、及び収束したときの値は a によらないこと、 $k_1 > 1$ ならいつも収束し、 $k_1 = 1$ でも収束することもあること、さらに、 p MZV は値を $\mathbb{Q}_p$ に持つことも知られている。

2 known results and main results

§1 で定義した p MZV の性質として、特殊値、関係式、 p MZV たちが張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の次元予想を見ていくことにする。主結果については証明もつける。

特殊値

(1) [C] によると、深さ 1 の p MZV は久保田-Leopoldt の p 進 L 関数の特殊値に一致する。

$$\zeta_p(k) = \frac{p^k}{p^k - 1} L_p(k, \omega^{1-k}) \quad (k > 1).$$

ω は Teichmüller 指標である。特に、 $\zeta_p(2k) = 0$ や、 $\zeta_p(2k+1) \neq 0$ ($p \nmid (k-1)$ または p は正則素数) が Soulé [S] などにより知られている。

(2) $\zeta_p(2k) = 0$ と、後述の harmonic product formula を用いると、

$$\zeta_p(2k, \dots, 2k) = 0$$

であることが分かる。

Proof. インデックスの深さに関する帰納法。深さ 2 のとき、harmonic product formula より

$$\zeta_p(2k)^2 = 2\zeta_p(2k, 2k) + \zeta_p(4k).$$

従って、 $\zeta_p(2k, 2k) = 0$ が得られる。

深さが $n-1$ まで成り立つとして深さ n のときを考える。やはり harmonic product formula より

$$\zeta_p(2k) \underbrace{\zeta_p(2k, \dots, 2k)}_{n-1} = n \underbrace{\zeta_p(2k, \dots, 2k)}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\zeta_p(2k, \dots, \overset{i}{4k}, \dots, 2k)}_{n-1},$$

$$\zeta_p(4k)\zeta_p(\underbrace{2k, \dots, 2k}_{n-2}) = \sum_{i=1}^{n-1} \zeta_p(\underbrace{2k, \dots, \overset{i}{\downarrow} 4k, \dots, 2k}_{n-1}) + \sum_{j=1}^{n-2} \zeta_p(\underbrace{2k, \dots, \overset{j}{\downarrow} 6k, \dots, 2k}_{n-2}),$$

.....

$$\zeta_p(2kn - 2k)\zeta_p(2k) = \zeta_p(2kn - 2k, 2k) + \zeta_p(2k, 2kn - 2k) + \zeta_p(2kn).$$

辺々交代的に加え, $\zeta_p(2k) = 0$ ($k \in \mathbb{N}$) を用いると $\zeta_p(\underbrace{2k, \dots, 2k}_n) = 0$ が得られる. □

(3) (2) の事実と, 後述の shuffle product formula を用いると,

$$\zeta_p(3, 1, \dots, 3, 1) = 0, \quad \sum_{\mathbf{k} \in I} \zeta_p(\mathbf{k}) = 0$$

であることが分かる. 但し, I はインデックス $(\underbrace{3, 1, \dots, 3, 1}_{2n})$ の間に 2 を 1 つだけ入れた, 深さが $2n + 1$ のインデックス全体. 証明には shuffle 積代数 $\mathfrak{H}_{\text{III}}^0$ ($:= \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$, 後述) における恒等式 [BBBL] を用いる.

Proof. $\mathfrak{H}^0$ で次のような式が成り立つ:

$$\sum_{i=-n}^n \{(xy)^{n-i} \text{III} (xy)^{n+i}\} = 4^n (x^2 y^2)^n.$$

辺々 Z_p を施すと

$$\sum_{i=-n}^n (-1)^i \zeta_p(\underbrace{2, \dots, 2}_{n-i}) \zeta_p(\underbrace{2, \dots, 2}_{n+i}) = 4^n \zeta_p(\underbrace{3, 1, \dots, 3, 1}_{2n}).$$

従って, $\zeta_p(\underbrace{3, 1, \dots, 3, 1}_{2n}) = 0$ が得られる. また, $\mathfrak{H}^0$ で次のような式が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n (-1)^i (2i+1) \{(xy)^{n-i} \text{III} (xy)^{n+1+i}\} \\ &= 4^n \left(\sum_{i=0}^n (x^2 y^2)^i xy (x^2 y^2)^{n-i} + \sum_{i=1}^n (x^2 y^2)^{i-1} x^2 y xy^2 (x^2 y^2)^{n-i} \right). \end{aligned}$$

辺々 Z_p を施すと

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i (2i+1) \zeta_p(\underbrace{2, \dots, 2}_{n-i}) \zeta_p(\underbrace{2, \dots, 2}_{n+1+i}) = 4^n \sum_{\mathbf{k} \in I} \zeta_p(\mathbf{k}).$$

従って, $\sum_{\mathbf{k} \in I} \zeta_p(\mathbf{k}) = 0$ が得られる. □

関係式

まず, 2変数の非可換多項式環 $\mathfrak{h} := \mathbb{Q}\langle x, y \rangle$ 上の shuffle 積 ($\sqcup$) 構造, $\mathfrak{h}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{h}y$ 上の harmonic 積 ($*$) 構造と Z_p なる evaluation map を定義する.

演算 $\sqcup : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ は次で定義される.

- (i) $\mathbb{Q}$ -双線形性
- (ii) 任意の $w \in \mathfrak{h}$ に対し, $w \sqcup 1 = 1 \sqcup w = w$,
- (iii) $u_i = x$ または y ($i = 1, 2$) と任意の words $w_1, w_2 \in \mathfrak{h}$ に対し

$$(u_1 w_1) \sqcup (u_2 w_2) = u_1 (w_1 \sqcup u_2 w_2) + u_2 (u_1 w_1 \sqcup w_2).$$

$\mathfrak{h}$ は積 $\sqcup$ により可換代数となる. これを $\mathfrak{h}_{\sqcup}$ と書く.

演算 $*$: $\mathfrak{h}^1 \times \mathfrak{h}^1 \rightarrow \mathfrak{h}^1$ は次で定義される.

- (i) $\mathbb{Q}$ -双線形性
- (ii) 任意の $w \in \mathfrak{h}^1$ に対し, $w * 1 = 1 * w = w$,
- (iii) 任意の $p, q \in \mathbb{N}$ と任意の words $w_1, w_2 \in \mathfrak{h}^1$ に対し

$$z_p w_1 * z_q w_2 = z_p (w_1 * z_q w_2) + z_q (z_p w_1 * w_2) + z_{p+q} (w_1 * w_2).$$

$\mathfrak{h}^1$ は積 $*$ により可換代数となる. これを $\mathfrak{h}_*^1$ と書く.

$\mathfrak{h}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{h}y$ ($\subset \mathfrak{h}^1 \subset \mathfrak{h}$) とおくと, $\mathfrak{h}^1, \mathfrak{h}^0$ は $\mathfrak{h}_{\sqcup}$ の, $\mathfrak{h}^0$ は $\mathfrak{h}_*^1$ の部分代数となる. これらをそれぞれ $\mathfrak{h}_{\sqcup}^1, \mathfrak{h}_{\sqcup}^0, \mathfrak{h}_*^1$ と書く.

$\mathfrak{h}^0$ の各 word を pMZV に evaluate する $\mathbb{Q}$ -線形写像 $Z_p : \mathfrak{h}^0 \rightarrow \mathbb{Q}_p$ を

$$Z_p(x^{a_1} y^{b_1} \cdots x^{a_s} y^{b_s}) = \zeta_p(a_1 + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{b_1 - 1}, \dots, a_s + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{b_s - 1})$$

$(a_i, b_i \geq 1)$ で定義する. 2つの shuffle relation とは写像 Z_p が $\sqcup$ 積と $*$ 積について $\mathbb{Q}$ -代数準同型になるというものである.

Theorem 2.1. ([BF], [F])

- (1) **shuffle product formula** 任意の $w, w' \in \mathfrak{h}^0$ に対して,

$$Z_p(w \sqcup w') = Z_p(w) Z_p(w').$$

- (2) **harmonic product formula** 任意の $w, w' \in \mathfrak{h}^0$ に対して,

$$Z_p(w * w') = Z_p(w) Z_p(w').$$

特に,

(3) **double shuffle relation** 任意の $w, w' \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$Z_p(w \sqcup w' - w * w') = 0.$$

Main Theorem 2.2. duality 任意の $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$Z_p(w) = Z_p(\tau(w)).$$

ここに, $\tau: \mathfrak{H}^0 \rightarrow \mathfrak{H}^0$ は $x \mapsto y, y \mapsto x$ で定義される反自己同型である.

(1) の shuffle product formula を用いれば, p 進 Drinfel'd associator の 2-cycle relation と p MZV の duality とが equivalent であることが分かる. 両者を結びつけたものは, formal associator の 2-cycle relation (§3 で述べる) であった. このことを本報告集での主結果とする.

Proof. p 進 Drinfel'd associator の 2-cycle relation

$$\Phi_{KZ}^p(X, -Y) = \Phi_{KZ}^{p-1}(-Y, X)$$

は, formal associator を evaluate したものとして,

$$Z_p(\widehat{\Phi}(X, Y)) = Z_p(\widehat{\Phi}^{-1}(-Y, -X))$$

と書ける. formal associator の 2-cycle relation

$$\widehat{\Phi}^{-1}(-Y, -X) = \tau(\widehat{\Phi}(X, Y))$$

を用いて係数比較すると p MZV の duality が出る. 逆を辿れば両者が equivalent であることが分かる. $\square$

また, 古庄氏による以下の証明もある. 従来の p 進 KZ 方程式

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \left(\frac{X}{u} + \frac{Y}{u-1} \right) G(u)$$

を左 p 進 KZ 方程式と呼ぶことにする. これには基本解 $G_0(u), G_1(u)$ で,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_0(\epsilon) \cdot \epsilon^{-X} = 1, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_1(1-\epsilon) \cdot \epsilon^{-Y} = 1$$

をみたすものが一意的に存在する. 同様に, 右 p 進 KZ 方程式

$$\frac{\partial H}{\partial u} = H(u) \left(\frac{X}{u} + \frac{Y}{u-1} \right)$$

には, 基本解 $H_0(u), H_1(u)$ で,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-X} \cdot H_0(\epsilon) = 1, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-Y} \cdot H_1(1 - \epsilon) = 1$$

をみたすものが一意的に存在する. この解たちに,

$$H_0(u) = G_1(-Y, -X; 1 - u)^{-1}$$

$$H_1(u) = G_0(-Y, -X; 1 - u)^{-1}$$

なる関係¹ があるため,

$$\Phi_{KZ}^p(X, Y) = \lim'_{\epsilon \rightarrow 0} H_0(-Y, -X; 1 - \epsilon) \epsilon^{-X}$$

と書ける. この式の両辺の $X^{k_1-1}Y \cdots X^{k_n-1}Y$ ($k_1 > 1$) の係数を比較すれば p MZV の duality が得られる.

その他, p 進でない MZV で成り立つ種々の関係式が p MZV でも成り立つかどうかは open problem である.

次元予想

重さ k の p MZV たちが張る $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間 $\mathcal{Z}_k^p$ を

$$\mathcal{Z}_k^p := \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \mathbb{Q} \cdot \zeta_p(k_1, \dots, k_n)$$

と書くことにする. このとき, 次元予想とは, 数列 $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ が $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$ ($k \geq 3$) をみたすとするとき,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^p \stackrel{?}{=} d_{k-3}$$

というものである. 山下氏により $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^p \leq d_{k-3}$ が示された. (本報告集の山下氏の頁参照.)

3 associator

まず, Le-Murakami [LM] の手法を用いて, 古庄 [F] により定義された p 進 Drinfel'd associator を構成的に定義する.

¹右 p 進 KZ 方程式はその作り方からそもそも G^{-1} の微分方程式になっています. 本集會中早稲田大学の大井氏による御指摘もありました.

$\mathbb{C}_p$ -代数準同型 $g_1 : \mathbb{C}_p\langle\langle X, Y \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}_p[[\xi, \eta]]\langle\langle X, Y \rangle\rangle$ を, $X \mapsto X - \xi$, $Y \mapsto Y - \eta$ で, $\mathbb{C}_p$ -線形写像 $g_2 : \mathbb{C}_p[[\xi, \eta]]\langle\langle X, Y \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}_p\langle\langle X, Y \rangle\rangle$ を, $\eta^p M \xi^q \mapsto Y^p M X^q$ ($M \in \{X, Y\}^*$) で定義する. また, p MZV たちを係数にもつ 2 変数の非可換巾級数 $\varphi^p(X, Y)$ を,

$$\varphi^p(X, Y) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 \geq 2 \\ k_2, \dots, k_n \geq 1}} (-1)^n \zeta_p(k_1, \dots, k_n) X^{k_1-1} Y \dots X^{k_n-1} Y$$

とおく. この $\varphi^p(X, Y)$ に g_1 と g_2 の合成を施したものが p 進 Drinfel'd associator $\Phi_{KZ}^p(X, Y)$ である.

$$\Phi_{KZ}^p(X, Y) = g_2 \circ g_1(\varphi^p(X, Y))$$

さて, formal associator $\widehat{\Phi}(X, Y)$ とは,

$$\widehat{\Phi}(X, Y) := \exp_{\boxplus}(-yY) \cdot \sum_{\substack{w \in \{x, y\}^* \\ W = \text{Cap}(w)}} wW \cdot \exp_{\boxplus}(-xX)$$

で定義される $\mathfrak{h}_{\boxplus}\langle\langle X, Y \rangle\rangle$ の元である. ここに, $\{x, y\}^*$ は x と y の word 全体, $\text{Cap}(w)$ は w の大文字化, $\exp_{\boxplus}(-yY)$ は,

$$\exp_{\boxplus}(-yY) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{\boxplus n} \frac{Y^n}{n!}$$

である. ($y^{\boxplus n}$ は y の n 個の $\boxplus$ 積による積.) $\widehat{\Phi}(X, Y)$ は実は $\mathfrak{h}_{\boxplus}^0\langle\langle X, Y \rangle\rangle$ の元である.

Drinfel'd associator は formal associator $\widehat{\Phi}(X, Y)$ を evaluate することで得られることが [IKZ] (の予稿版) により知られている. それは p 進でも同様である.

$$\Phi_{KZ}^p(X, Y) = Z_p(\widehat{\Phi}(X, -Y)).$$

[T] では $\widehat{\Phi}^{-1}(X, Y)$ を計算し,

$$\widehat{\Phi}^{-1}(X, Y) := \exp_{\boxplus}(xX) \cdot \sum_{\substack{w \in \{x, y\}^* \\ W = \text{Cap}(w)}} S(w)W \cdot \exp_{\boxplus}(yY)$$

であることを導いている. ここに, $S : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ は $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$ で定まる反自己同型. このことから,

$$\widehat{\Phi}(X, Y) \cdot \tau(\widehat{\Phi}(-Y, -X)) = 1$$

であることが分かる. (τ は係数のみにかかるものとする.) これが formal なレベルでの 2-cycle relation である.

参考文献

- [BBBL] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst and P. Lisoněk ; Combinatorial aspects of multiple zeta values, The Electronic J. of Combinatorics, Volume 5(1) (1998), R38.
- [BF] A. Besser and H. Furusho ; The double shuffle relation of p -adic multiple zeta values, preprint, arXiv : math.NT/0310177.
- [C] R. F. Coleman ; Dilogarithms, regulators and p -adic L -functions, Invent. Math. 69 (1982), no. 2, pp. 171-208.
- [F] H. Furusho ; p -adic multiple zeta values I— p -adic multiple polylogarithms and the p -adic KZ equation, Invent. Math. 155 (2004), no. 2, pp. 253-286.
- [IKZ] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier ; Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Max-Planck-Institut für Mathematik preprint series 2004-100.
- [LM] T. Q. T. Le and J. Murakami ; Kontsevich's integral for Kauffman polynomial, Nagoya Math. J. 142 (1996), pp. 39-65.
- [S] C. Soulé ; On higher p -adic regulators, Algebraic K-theory, Evanston 1980, Lecture Notes in Math., 854, Springer, Berlin-New York (1981), pp. 372-401.
- [T] T. Tanaka ; A few applications of shuffle products for p -adic multiple zeta values, Master's thesis, Kyushu University (2004).