

$y(x+1) = y(x) + 1 + \frac{\lambda}{y(x)}$, ($\lambda \neq 0$) の任意の解は
transcendentially transcendental である

東大 理 高野恭一

§ 1. 序

超越関数を F. H. Moore に従^[6]て次の二つの class に分類する。即ち、ある代数的微分方程式をみたすものを algebraically transcendental, そうでないものを transcendentially transcendental と呼ぶ。よく知られているように、ほとんどすべての特殊関数は algebraically transcendental であるが、O. Hölder [3] は、ガンマ関数は、transcendentially transcendental であることを証明した。以後、多くの人によってこの定理はさまざまな関数方程式において拡張された。[15]

大久保謙二郎氏は、Hölder の定理のある意味での逆定理「 $\log x$ はいかにも代数的差分方程式をみたさない」を示した。従って、代数的微分方程式よりかは代数的差分方程式により定義される超越関数は、本質的に異なるものであり、代数的差分方程式の大域的研究の重要性が認められると思う。

。しかしこれに関する研究は線型の場合を除いてほとんどない。

木村俊房氏は [4], 非線型差分方程式において、微分方程式とどう異なる現象があるのかを実験するために、

$$(1.1) \quad y(x+1) = y(x) + 1 + \frac{\lambda}{y(x)}, \quad (\lambda \neq 0)$$

について研究された。そして、そこで構成された有理型関数解 $y_c(x)$ あるいはもっと一般に (1.1) の任意の解は、いかなる代数的微分方程式をもみたさないか、これはいいかという予想をした。この予想が正しいことを示すのが、この小論の目的である。則ち

定理 1. 「(1.1) の任意の解は、 $y(x) \equiv -\lambda$ を除いて、transcendentally transcendental である。」

我々は (1.1) の定数解を除外していいから、逆関数を考えることが出来る。もし (1.1) の解 $y(x)$ が、ある代数的微分方程式をみたせば、もちろんその逆関数 $x(y)$ もそうであり、かつそれは、次の方程式をみたすことが確かである。

$$x(y+1+\frac{\lambda}{y}) = x(y) + 1.$$

従って定理 1 を証明するためには、次の定理を示せば十分。

定理 2 「次の方程式

$$(1.2) \quad y(x+1+\frac{\lambda}{x}) = y(x) + 1$$

の任意の解は、transcendentally transcendental である。」

関数方程式(1.1) あるいは(1.2) において、一般に多価関数
 路を考へるので、路の意味をはっきりさせておくべきである。
 。路としては、まず全平面 $\mathbb{C}$ より分岐点などの特異点を除いた
 T とする。正則な多価関数を考へる。そして $y(x)$ が(1.1) において
 (1.1) の路であるとは、 $y(x)$ の勝手な branch において、 $y(x+1)$
 の branch を適当にとると、(1.1) が成立するということである。
 。もちろんある点 x_0 で $y(x_0)$ と $y(x_0+1)$ の branch のとり方を
 指定すれば、他の点 x における branch のとり方は、^{一意に} 決定され
 ることに注意。方程式(1.2) においても同様である。

定理2の証明は大体次のようにする。(1.2) の勝手な路 $y(x)$
 を1つ定め、 $y(x)$ のみたす代数的微分方程式

$$F(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) = 0$$

に対応する多項式全体を $\mathcal{M}$ とする。あうかいの x の有理関
 数体 $\mathbb{C}(x)$ を係数体とする $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$ の多項式全体のな
 る環 $\mathbb{C}(x)\{y_0, y_1, \dots, y_n, \dots\}$ において、単項式の次数を定め
 しておき(次節で示す)、 $\mathcal{M}$ の中で、最高次数が最小のもの全
 体を $\mathcal{N}$ とする。 $G \in \mathcal{N}$ は最高次数が1のものとする。

(1.3) $G(y(x+1+\frac{1}{x}), y'(x+1+\frac{1}{x}), \dots, y^{(n)}(x+1+\frac{1}{x}), x+1+\frac{1}{x}) = 0$
 と(1.2)を用いて、 $\mathcal{N}$ の元 $\hat{G}$ が def. される。この $\hat{G}$ において
 $\hat{G} - G$ を詳しくくくれば $G = y_1$ i.e. $\frac{dy}{dx} = 0$
 が導かれる系に到達する。

次節で定理2の証明をかんたんに示すが、そこで用いられる補題を以下に並列する。

補題1 「 $a(x+1+\frac{\lambda}{x}) = a(x) + c$; c : 定数

は $c=0$ のときのみ有理関数であることをもちえ、それは定数項にかき"る。」

補題2 「 $(\frac{x^2-\lambda}{x^2})^h a(x+1+\frac{\lambda}{x}) = a(x)$, $h > 0$ integer ,
の有理関数は $\equiv 0$ にかき"る。」

補題3 「 $q(x)$ を non zero 有理関数, 極は $x=0$ のみで"位数は3以上, $x=\infty$ は零点で"位数は1以上とする。このとき

$$(\frac{x^2-\lambda}{x^2}) a(x+1+\frac{\lambda}{x}) + q(x) = a(x)$$

は有理関数をもたはう。」

§ 2. 定理2の証明

$a(x) y_0^{k_0} y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m}$, $b(x) y_0^{l_0} y_1^{l_1} \dots y_m^{l_m} \in \mathbb{C}(x) \{ y_1, y_2, \dots \}$
におして,

$(k_1, \dots, k_n) = k'$, $(l_1, \dots, l_m) = l'$, $(k_0, k') = k$, $(l_0, l') = l$
と略す。

$$|k'| = k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n, \quad |l'| = l_1 + 2l_2 + \dots + ml_m$$

とする。 k, l の順序を次の process に従って定める。

(1). $|k'| > |l'| \Rightarrow k > l$.

(2). $|k'| = |l'|$ のときは、 $k_p - l_p, k_{p+1} - l_{p+1}, \dots, k_i - l_i$, $p = \max(n, m)$

の列を左からみて最初に 0 でない項が正 $\Rightarrow k > l$

(3) $k' = l'$ のときは $k_0 > l_0 \Rightarrow k > l$.

このようにして次数の大小をきめたとき ≤ 1 で示した G は

$$G(y_0, y_1, \dots, y_n, x) = \sum_{k_0=0}^{\infty} a_{k_0, \delta'}(x) y_0^{k_0} y_1^{\delta_1} \dots y_n^{\delta_n} \\ + \sum_{\substack{(k')=(\delta') \\ |k'|=|\delta'| \\ k_0=0 \\ k < \delta}}^{m(k')} a_{k_0, \delta'}(x) y_0^{k_0} y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} + \sum_{\substack{(k')=(\delta') \\ |k'| < |\delta'| \\ k_0=0}}^{m(k')} a_{k_0, \delta'}(x) y_0^{k_0} y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}$$

となる。但し $a_{\delta_0, \delta'}(x) = 1$,

(1.2) より

$$y(x+1+\frac{\lambda}{x}) = y(x) + 1$$

$$y'(x+1+\frac{\lambda}{x}) = \frac{x^2}{x^2-\lambda} y'(x)$$

...

$$y^{(n)}(x+1+\frac{\lambda}{x}) = \left(\frac{x^2}{x^2-\lambda}\right)^n y^{(n)}(x) + \sum_{l=1}^{n-1} p_{n,l}(x) y^{(l)}(x)$$

, $p_{n,l}(x)$ は x の rational functions, 2 と (1.3) より

$$\hat{G}(y_0, y_1, \dots, y_n, x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{x^2-\lambda}{x^2}\right)^{|W|} G(y_0+1, \frac{x^2}{x^2-\lambda} y_1, \dots, \left(\frac{x^2}{x^2-\lambda}\right)^n y_n + \sum_{l=1}^{n-1} p_{n,l} y_l, \\ x+1+\frac{\lambda}{x})$$

により 2. $\hat{G} \in \mathcal{N}$ かつ $\hat{G}$ の最高次の係数が 1 である

ことが確かめられる。以後 $G = y_1$ を 6 段にわけて示す。

(第 1 段). 多項式 $\hat{G} - G$ の最高次項 $y_0^{\delta_0-1} y_1^{\delta_1} \dots y_n^{\delta_n}$

が $\equiv 0$ でなければならぬ (もし $\neq 0$ ならば $\mathcal{N}$ の最小性に反する.) から

$$a_{\delta_0-1, \delta'}(x+1+\frac{\lambda}{x}) + \delta_0 - a_{\delta_0, \delta'}(x) = 0.$$

補題1 より $\Delta_0 = 0$ であることを示す。

(第2段). $\hat{G} \equiv G$ であることを示す。

(第3段). $|k'| = |k|$ なる k' により $m(k') = 0$.

(i) $m(k') > 0$ とする。

$\hat{G} - G$ の $y_0^{m(k')}, y_1^{k_1}, \dots, y_n^{k_n}$ の係数 $= 0$ であり

$$a_{m(k'), k'}(x+1+\frac{\lambda}{x}) = a_{m(k'), k'}(x).$$

補題1 より $a_{m(k'), k'}(x) = a_k (\neq 0)$ constant.

→ $y_0^{m(k')-1}, y_1^{k_1}, \dots, y_n^{k_n}$ の係数 $= 0$ であり

$$a_{m(k')-1, k'}(x+1+\frac{\lambda}{x}) + m(k')a_k - a_{m(k'), k'}(x) = 0.$$

$m(k')a_k \neq 0$. 補題1 よりこれは矛盾。

(第4段). $|k'| \leq |k|-1$ なる k' により $m(k') = 0$.

(i). $m(k') > 0$ ($|k'| \leq |k|-1$) なる k' の中より最大 a と a を k'

とすると $\hat{G} - G$ の $y_0^{m(k')}, y_1^{k_1}, \dots, y_n^{k_n}$ の係数 $= 0$ であり

$$\left(\frac{x^2-\lambda}{x^2}\right)^{|k'|-|k'|} a_{m(k'), k'}(x+1+\frac{\lambda}{x}) = a_{m(k'), k'}(x).$$

補題2 を用いて $a_{m(k'), k'}(x) \equiv 0$, $\therefore m(k') = 0$.

(第5段). $\Delta_2 = \Delta_3 = \dots = \Delta_n = 0$.

(i) $\Delta_n = \Delta_{n-1} = \dots = \Delta_{r+1} = 0$, $\Delta_r > 0$ なる r とする。

$\hat{G} - G$ の最高次項は $y_1^{\Delta_1} y_2^{\Delta_2} \dots y_{r-2}^{\Delta_{r-2}} y_{r-1}^{\Delta_{r-1}+1} y_r^{\Delta_r-1}$ なる係

数 $= 0$ であり

$$(*) \quad \frac{x^2-\lambda}{x^2} a_{\Delta_r}(x+1+\frac{\lambda}{x}) + \Delta_r a_{\Delta_r-1} = a_{\Delta_r}(x).$$

$$\sigma' = (\delta_1, \dots, \delta_{n-2}, \delta_{n-1}+1, \delta_{n-1}, 0, \dots, 0)$$

$$g_{r,r-1} = -\frac{2r}{x^3} \sum_{\ell=0}^{r-2} \left(\frac{x^2-\lambda}{x^2} \right)^\ell.$$

もし $\gamma > 1$ とおくと $g_{r,r-1}(x)$ は被題3の条件を満たさず、 $(*)$ を満たす有理関数は存在しない。 $\therefore \gamma = 1$.

こゝまで2"の結果をまとめると、

$$G = y_1^{\delta_1} + \sum_{\ell=0}^{\delta_1-1} \sum_{|K|=\ell} a_{K\ell}(x) y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}.$$

(中6段). $\sum_{\ell=0}^{\delta_1-1} \sum_{|K|=\ell} a_{K\ell}(x) y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}$ の non zero 最高次項を $y_1^{h_1} \dots y_n^{h_n}$ とすると、それは $\hat{G} - G$ の最高次項ともなり、その係数 $= 0$ であり

$$\left(\frac{x^2-\lambda}{x^2} \right)^{\delta_1-h_1} a_{K\ell}(x + 1 + \frac{\lambda}{x}) = a_{K\ell}(x),$$

被題2を用いると $a_{K\ell}(x) \equiv 0$. $\therefore G = y_1^{\delta_1}$, G の最小値より $G = y_1$.

こうして、(1.2) の線形代数的微分方程式の解とすると、それは $\frac{dy}{dx} = 0$ を満たしていかねばならない。明かには (1.2) の解とはならない。こうして定理2が証明された。

References

- [1] E. W. Barnes, On functions generated by linear difference equations of the first order, Proc. London Math. Soc. 2 (1904),

.280-292.

[2] F. Hausdorff, Zum Hölderschen Satz über $\Gamma(x)$, Math. Ann.

94 (1925), 244-247.

[3] O. Hölder, "Über die Eigenschaft der Gammafunction
keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen,

Math. Ann. 28 (1887), 1-13.

[4] 木村俊房, 差分方程式 $y(x+1) = y(x) + 1 + \frac{\Delta}{y(x)}$ について, 数理論

講究録 87 (1970), 8-15.

[5] T. E. Mason, Character of the solutions of certain functional
equations, Amer. J. Math. 36 (1914), 419-440.

[6] E. H. Moore, Concerning transcendently transcendental
functions, Math. Ann. 48 (1897), 49-74.

[7] A. Ostrowski, Zum Hölderschen Satz über $\Gamma(x)$, Math.

Ann. 94 (1925), 248-251.