

Cayley tree 上のスピングラスとスピנקリスタル

東北大学 宇田 徹

配位数3の Cayley tree 上の Ising model の中心部分 (Bethe lattice) と調べる。相互作用は最近接格子点のみとし、他は $+J$ (>0) と $-J$ ととり、外縁は h_{ex} が加わっているとする。1では規則系、2ではランダム系を論ずる。

1. 規則系

各スピンの相互作用は、その最近接スピンのうちの2つと $+J$ 、他の1つと $-J$ であるとする。図1で実線は $+J$ と破線は $-J$ を表わす。

この系の表面から $S-1$ 番目の shell 上のスピンから S 番目の shell 上のスピンへの有効場を、それらと相互作用が $+J$ か $-J$ かに従って $h_S^{(+)}$, $h_S^{(-)}$ とする。 $h_S^{(\pm)}$ は漸化式

$$h_S^{(\pm)} = f \{ \pm J, h_{S-1}^{(+)} + h_{S-1}^{(\mp)} \} \quad (1)$$

をみたす。初期値は $h_{S=0}^{(\pm)} = 0$ である。 $n=2$ 。

$f\{J, z\}$ は、外縁 h_{ex} 、温度 $T = 1/k_B \beta$ のとき

$$f\{J, z\} = \beta^{-1} \tanh^{-1} [\tanh(\beta J) \tanh(\beta h_{ex} + \beta z)] \quad (2)$$

である。(1)は唯一つの固定点 $h_{\infty}^{(\pm)}$ をもつ。 $h_{\infty}^{(\pm)}$ は、図2の P の範囲の h_{ex} 、 T のとき存在であり、 $h_{S=0}^{(\pm)} = 0$ から出発した(1)の iteration は、このとき $h_{\infty}^{(\pm)}$ に近づくことがわかった。図2の P 以外の領域では $h_S^{(\pm)}$ は固定点に近付かず、周期的に同じ値をとりつづける。図2の SG は周期がないことを、数字6, 7, 11, 52は周期を表わす。

図3は10000 shells の Cayley tree の中心の15 shells における磁化のゆらぎ

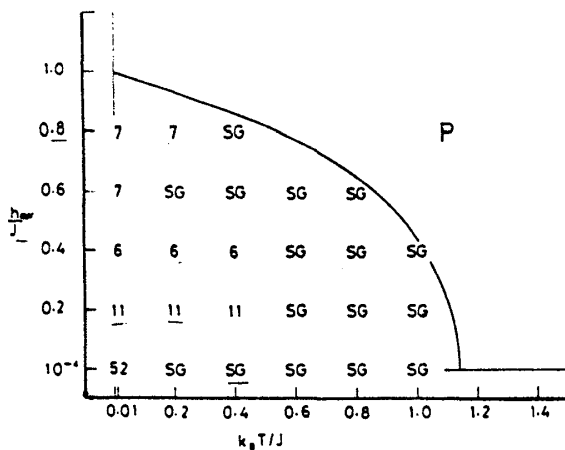


図2

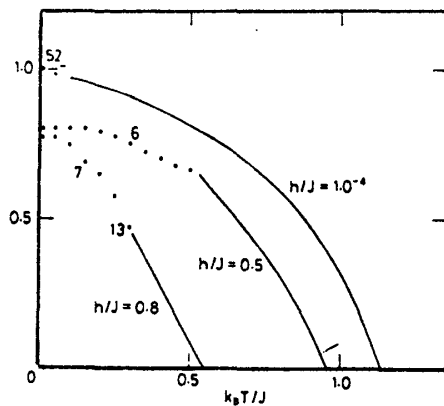


図3. h/J は h_{ex}/J と表わす。

$\sum_i [\langle \sigma_i \rangle^2 - (\sum_j \langle \sigma_j \rangle / \sum_j 1)^2] / \sum_i 1$ は温度の函数として大いなるものである。
 初期化の値 $\langle \sigma_i \rangle$ の分布は, SG相(同期がある相)では連続的であるのに対し, SC相(同期のある相, スピニングリスタに相)ではいくつかの中心の周りに集中している。
 以上の内容は Phys. Lett. A (1983) に掲載予定である。

2. ランダム系

配位数3の Cayley tree 上の $\pm J$ ランダムボンド Ising model を考える。相
 転移作用は磁率 $P_+ \equiv p$ で $+J (>0)$, 磁率 $P_- \equiv 1-p$ で $-J$ とするものとする。表面は $S-1$ 番目の shell 上のスピンの S 番目の shell 上のスピンの有効場の分布函数を
 $p_S(h)$ とすると, それは漸化式

$$p_S(h) = \sum_{\alpha=\pm} P_{\alpha} \iint \delta(h - f(\alpha J, h_1 + h_2)) p_{S-1}(h_1) p_{S-1}(h_2) dh_1 dh_2 \quad (3)$$

をみたす。初期値は $p_{S=0}(h) = \delta(h)$ である。競合範囲 $[-J, J]$ を D 区間 ($D=32 \sim 1024$)
 に分け, 競合を和で近似し, (3) の iteration を $p_S(h)$ を求める。 $p_S(h)$ は $S \rightarrow \infty$ で常
 に収束する。 $h_{\max} \approx 2J/D$ の系の性能は $p_S(h)$ の極限 $p(h)$ を用いて計算する。 $h_{\max} = 0$
 の系の性能の計算では, $h_{\max} \approx 2J/D$ で求めた極限 $p(h)$ を初期値 $p_{S=0}(h)$ とし (3) の
 iteration を行い, 得られた極限を用いる。

磁場 $h_{\max} \neq 0$ では相転移は認められぬ。 $h_{\max} = 0$ のとき, $p_S(h)$ の極限 $p(h)$ は
 3種類に分類される。すなわち, 常磁性 (P) 相に対応する $\delta(h)$, スピニングラス (SG)
 相に対応する, 0 である幅をもった h の偶函数, 磁性性 (F) 相に対応する, 以上以外の
 もの。 SG 相での $p(h)$ は $+J$ の磁率 p に依存し得る。図4の SG 相と F 相の境界は,
 $p(h)$ のみたす方程式 (3) を $p_S(h)$ と $p_{S-1}(h)$ を
 $p(h)$ とした式) のスピニングラス相の解の予安定性の
 条件から定められた。 $T=0$ での境界は $p_c = 0.8694$
 である。 SG 相と F 相の境界の帯磁率は $\mu_0 p$ であ
 る。

スピニングラス相で得られた $p(h)$ を用いて計算し
 た Bethe 近似の自由エネルギーは, 単調減少, concave
 で, エントロピー, 比熱とも常に正である。

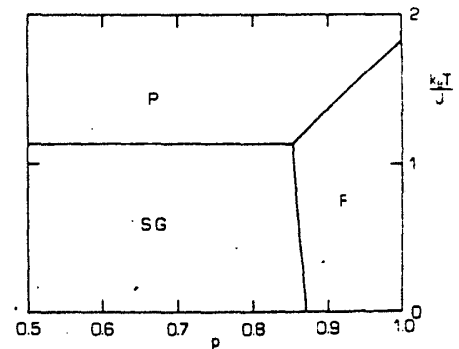


図 4.