

Some conditions for the strong starlikeness

東北大情報 望月 望 (Nozomu Mochizuki)

この報告では, 主として論文[2]の内容の一部について述べます.

§1. 定義. f が $U = \{ |z| < 1 \}$ 上正則で $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ を満たすとき, $f \in A$ とする. $f \in A$ が U 上 univalent なるとき, $f \in S$ とする. $0 < \alpha \leq 1$ に對し, $f \in A$ が次を満たすとき $f \in S^*(\alpha)$ とする:

$$-\frac{\pi\alpha}{2} < \arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \frac{\pi\alpha}{2} \quad (z \in U).$$

この f を strongly starlike of order α と言い, $\alpha = 1$ のとき starlike と言ふ. $S^*(1) = S^*$ と表す. $S^*(\alpha) \subset S$ である ([1], [7]).

§2. 背景. $P(z) := z^2 f'(z)/f(z)^2$ とおく.

このとき, 次が知られている (Ozaki-Nunokawa [6]):

$$f \in A, |P(z)-1| < 1 \quad (z \in U) \Rightarrow f \in S.$$

これに関連し, Obradović [4] は, $0 < k \leq 1$ に
対し

$$f \in A, |P(z)-1| < k \quad (z \in U) \Rightarrow f \in S^* ?$$

な子問題を考えた. 条件を強めるとき 結果もよくなる
かということがあるが, これについて次を示した.

$$(1) \quad \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} < k \leq 1 \quad \text{のとき, 上は成立しない.}$$

$$(2) \quad Q(z) := z/f(z) \quad \text{とし, } \gamma_k \text{ が成立する:}$$

定理 (Obradović). $f \in A$ が U 上
 $|P(z)-1| < k, \quad |Q(z)-1| < \sqrt{1-k^2}$
 を満たせば $f \in S^*$ である.

$$(1) \quad \text{では, } f(z) = \frac{z}{1 + \frac{i}{2}z + \frac{k}{2}e^{i\theta}z^3} \quad (z \in U)$$

と置く. $z = iz, \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} < k \leq 1, \theta$: 或る値,
 とする. このとき $f \in A, f \notin S^*$ であること
 かわかる.

(2) の証明では, 難しい lemma を使っているが

次のようにおればおぐにわかる。まず,

$$w \in \mathbb{C}, \quad |w-1| < r, \quad 0 < r \leq 1 \quad \text{ならば}$$

$$|\arg w| < \sin^{-1} r$$

である。よって,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{か. 5}$$

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| = |\arg P(z) - \arg Q(z)|$$

$$\leq |\arg P(z)| + |\arg Q(z)|$$

$$< \sin^{-1} k + \sin^{-1} \sqrt{1-k^2} = \frac{\pi}{2}$$

を得る。この観察が出発点となった。

§3. 結果 Obradović の定理を $S^*(\alpha)$ の関数と関連させて考え、次を得た:

定理. $0 < \alpha \leq 1$ とする。

[i] $f \in A$ か 或る k , $0 \leq k \leq 1$, に $\neq$ して次を満たすとする:

$$|P(z)-1| \leq \sin(\alpha \sin^{-1} k) \quad (z \in U),$$

$$|Q(z)-1| \leq \sin(\alpha \cos^{-1} k) \quad (z \in U).$$

このとき, $f \in S^*(\alpha)$ である。

[ii] 上の右辺の値は, 各 k について, *best possible* である. 即ち, 任意の k , $0 < k < 1$, 任意の ε , $0 < \varepsilon < k$, に對し

$$|P(z)-1| < \sin(\alpha \sin^{-1} k) \quad (z \in U),$$

$$|Q(z)-1| < \sin(\alpha \cos^{-1}(k-\varepsilon)) \quad (z \in U)$$

を満たし, かつ

$$f \notin S^*(\alpha)$$

なる $f \in A$ が存在する.

(注1) [ii] は, $|P(z)-1| < \sin(\alpha \sin^{-1}(k+\varepsilon))$,

$|Q(z)-1| < \sin(\alpha \cos^{-1} k)$ で $f \notin S^*(\alpha)$ なる $f \in A$ が存在する, ということも同じである.

(注2) [i] は, 先と同様に

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \alpha \sin^{-1} k + \alpha \cos^{-1} k = \alpha \cdot \frac{\pi}{2}$$

からすぐ出る. そうなるように, 右辺の条件をつくったのである. (しかし, これが *best possible* になっているから, 意味のある条件と言える).

(注3) [ii] で $\alpha=1$ とすると, $0 < k < 1$ に對し $|P(z)-1| < k$ ($z \in U$) で $f \notin S^*$ なる $f \in A$ の存在を示しており, Obradovic [4]

で未解決であった部分が 出来た ことにはなる。

[ii] の証明の概略. Obradović の例では、
分母の次数が 低い ために 精密な結果が得
られなかったものと思う。

$0 < \alpha \leq 1$ とする。 $0 < k < 1$, $0 < \varepsilon < k$ を任意に
とる。

$t := \sin(\alpha \sin^{-1} k)$, $\Delta := \sin(\alpha \cos^{-1}(k - \varepsilon))$
と置く。

$\theta := \cos^{-1}(-\Delta)$, $\lambda := \cos^{-1} t$ と置く。

$n\Delta - t > 0$ なる n に對し, 関数 f_n
を $\mathbb{R}$ で定める:

$$f_n(z) = \frac{z}{1 + \frac{n\Delta - t}{n} e^{-i\theta} z + \frac{t}{n} e^{-i\lambda} z^{n+1}}.$$

f_n は $\bar{U}$ 上正則で $f_n \in A$, 更に

$$|P(z) - 1| < t, \quad |Q(z) - 1| < \Delta \quad (z \in U)$$

なることはすぐわかる。さて, $n \rightarrow \infty$ として

$$\zeta_n := \left. \frac{zf'_n(z)}{f_n(z)} \right|_{z=1} = \frac{f'_n(1)}{f_n(1)} \rightarrow \zeta := \frac{1 - te^{-i\lambda}}{1 + \Delta e^{-i\theta}}$$

である。

$$\xi := 1 - te^{-i\lambda}, \quad \eta := 1 + \Delta e^{-i\theta} \quad \text{と置く,}$$

$0 < \arg \xi < \pi/2, \quad 0 < \arg \eta < \pi/2$ である,

$$\tan(\arg \xi) = \tan(\alpha \sin^{-1} k),$$

$$\tan(\arg \eta) = \tan(\alpha \cos^{-1}(k-\varepsilon)),$$

$\arg \zeta = \arg \xi + \arg \eta$ である. よって,

$$\pi\alpha/2 < \arg \zeta < \pi. \quad \zeta = z \quad N \text{ をとり}$$

$$\pi\alpha/2 < \arg \zeta_N < \pi \quad \text{とすればよいことになる.}$$

即ち, $f_N \notin S^*(\alpha)$ である.

系. $0 < \alpha \leq 1$ とする. $f \in A$ ならばある $k, 0 \leq k \leq 1$,
 なる ε が存在する:

$$|P(z)-1| \leq \alpha k, \quad |Q(z)-1| \leq \alpha \sqrt{1-k^2} \quad (z \in U).$$

このとき, $f \in S^*(\alpha)$ である.

$$(\because) \quad \alpha \sin x \leq \rho \sin \alpha x \quad (0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq x \leq \pi).$$

§ 4. 条件 $|P(z)-1| < 1$ に関する.

これからこの条件で表わされたか, 論文[5]の
 Theorem 1 をよくみると, $\mathcal{R}$ が成り立つことが
 分る: $f \in A, |P(z)-1| < 1 \quad (z \in U)$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}.$$

この形の関数は論文[3] においても考へられていたものである。 f がこの形のものである

$$P(z)-1 = - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) b_n z^n$$

であるから、 $\mathcal{R}$ が言及していることに注意：

$$f \in A, \quad |P(z)-1| < 1 \quad (z \in U)$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{z}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \neq -1$$

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) b_n z^n \right| < 1.$$

References

- [1] D. A. Brannan and W. E. Kirwan, On some classes of bounded univalent functions, *J. London Math. Soc.* (2) 1, (1969), 431-443
- [2] N. Mochizuki and T. Sano, Some

conditions for the strong starlikeness of holomorphic functions, *Interdiscip. Inform. Sci.* 3 (1997), 87-90.

[3] M. O. Reade, H. Silverman, and P. G. Todorov, Classes of rational functions, *Contemp. Math.*, AMS., (1985) (38)

[4] M. Obradović, Starlikeness and certain class of rational functions, *Math. Nachr.* 175 (1959), 263-268.

[5] M. Obradović, N. N. Pasceu, and J. Radomir, A class of univalent functions, *Math. Japonica* 44 (1996), 565-568.

[6] S. Ozaki and M. Nunokawa, The Schwarzian derivative and univalent functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 33 (1972), 392-394.

[7] S. Stankiewicz, Some remarks

concerning starlike functions, Bull.
Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astronom.
Phys. 18 (1970), 143-146.

(UK L)