

正規定常過程のマルコフ性と超函数

阪大理 岡部靖憲

§1. 序

函数 $\Delta(a)$ が与えられたとき、それを基本解にもつ微分作用素；

$$(1.1) \quad Q \Delta = \delta$$

を見つけることが、確率論、特に正規定常過程論、において重要な位置を占めることをお話ししたいと思います。

その研究過程において、 Q の半分の作用素；

$$(1.2) \quad Q = P^* P$$

なる P をつけることが *key point* であることがお分りいただけたと思います。

そして、その P を 探ることと、その確率論的意味を、微分方程式論的に解明するためには、どうしても佐藤幹夫氏の超函数論が必要であることもお分りいただけたと思います。

§2. 正規定常過程

$\Delta(a)$ を $\mathbb{R}'$ 上の偶函数で、正で $L^1(\mathbb{R}')$ に属する non-trivial な函数とする。

そのとき、

$$(2.1) \quad k(t) \equiv \int_{\mathbb{R}'} e^{-it a} \Delta(a) da$$

が連続な正定符号函数になるので、ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上で定義された実正規定常過程 $X = (X(t), t \in \mathbb{R}')$ で、平均が 0 で、

$$(2.2) \quad E(X(t)X(s)) = k(t-s)$$

を満たすものが一意に定まります。

X が正規定常過程とは、

任意の $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ に對して、

(2.3) 有限次元分布 $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ ($\in \mathbb{R}^n$) が正規分布に従い.

(2.4) $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ と $(X(t_1+h), \dots, X(t_n+h))$ の分布が等しい ($\forall h \in \mathbb{R}$)

ときをいいます。

なお、(2.2) の左辺の意味は、 $X(t)$ と $X(s)$ の $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ における内積のことです。

§3. 正規定常過程の表現

正規定常過程 $X = (X(t), t \in \mathbb{R}')$ に対し、次の Borel field ($\subset \mathcal{B}$) を定義する。

$$(3.1) \quad \begin{cases} \mathcal{B}^{-\infty, t} \equiv \{X(s); s \leq t\} \text{ を可測にする最小の } \sigma\text{-algebra} \equiv \sigma(X(s); s \leq t) \\ \mathcal{B}^{t, \infty} \equiv \sigma(X(s); s \geq t) \quad (t \in \mathbb{R}')$$

X の構造を調べる際に、 X が purely - non deterministic, BPS

$$(3.2) \quad \bigcap_{t \in \mathbb{R}'} \mathcal{B}^{(-\infty, t)} = \text{trivial field}$$

が成り立つ場合を調べる ことが重要であり、prediction の観点からは これで十分である。そのとき、 $\Delta(a)$ が Hardy weight, RPT.

$$(3.3) \quad \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\log \Delta(a)}{1+a^2} da > -\infty$$

が成り立ち、さらに、

$$(3.4) \quad \Delta(a) = |h(a)|^2, \quad h \in H^{2+}$$

なる $h(a) (\in \mathbb{C})$ が存在する

ことが知られている。

ここで、 H^{2+} とは

$$(3.5) \quad H^{2+} = \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^+) ; \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(a+iy)|^2 da < \infty \right\}$$

のことである。

一方、定常過程論においては、

$$(3.6) \quad X(t) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{-ita} dW(a)$$

と $\Delta(a)da$ に従う直交測度 $dW(a)$ によって表わされる

ことは知られている。

$dW(a)$ とは、 $\{W(E, \omega); \int_E \Delta(a) da < \infty\}$ なる
正規確率過程で、

$$(3.7) \quad E(W(E, \omega)^2) = \int_E \Delta(a) da$$

(3.8) $(E_j; j=1, \dots, n)$ disjoint $\Rightarrow (W(E_j); 1 \leq j \leq n)$ 独立
をみたすものからなる random measure の 2 つで
す。従って、(2.8) をみたす任意の h を
ひきこめて、

$$(3.9) \quad \hat{B}(E, \omega) \equiv \int_E \frac{1}{h(a)} dW(a, \omega), \quad |E| < \infty$$

と変換する 2 つにより、 da に従う正規
random measure ($\equiv$ Brown motion よりなる
random measure) $d\hat{B}(a)$ が得られ、(2.10) より

$$(3.10) \quad X(t) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{-ita} h(a) d\hat{B}(a)$$

と表わされるが、さらに、Plancherel の定理に
よって、

$$(3.11) \quad E(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^1} e^{-ita} h(a) da \equiv \hat{h}(t)$$

$$(3.12) \quad B(da) \equiv \int_{\mathbb{R}^1} \left(\int_{d\lambda} e^{+i\lambda a} d\lambda \right) d\hat{B}(a)$$

と おくことにし、 da は 従う 正規 random measure $d B(a)$ により、

$$(3.13) \quad X(t) = \int_{\mathbb{R}^1} E(t-u) d B(u)$$

と 表現 される ことが 分る。

h が H^{2+} の 元 で ある こと、

$$(3.14) \quad E(t) = 0 \quad (t < 0)$$

が 成り立つ ので、 表現 (2.17) より、 $\forall t \in \mathbb{R}^1$ に対し、

$$(3.15) \quad \sigma(X(s); s \leq t) \subset \sigma(B(du); du \subset (-\infty, t])$$

が 成り立つ が、 逆の 包含 関係 が 成り立つ ためには、 (2.8) に おける h は いかなる もの で なければ なる ない かは、 Karhunen により 次の 様に 解かれた。

定理 (Karhunen) (3.15) に おける 等号 が 成り立つ ための 必要 十分 条件 は、

$$(3.16) \quad h \text{ が outer で ある こと、 即ち}$$

$$h(z) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{1+az}{a-z} \frac{\log \Delta(a)}{1+a^2} da \right] \quad (z \in \mathbb{C}^+)$$

、絶対値1の定数倍である。

§4. 正規定常過程のマルコフ性

マルコフ過程のマルコフ性とは、過去と未来とが 現在で条件をつけたとき 独立、即ち

$$(4.1) \quad B^{-\infty} \perp_{\mathcal{G}(X_0)} B^{+\infty}$$

のことで、必ずしも 現在だけでなく、

いわば “現在の germ” で条件を付けたとき に独立ということであり、正規定常過程のマルコフ性を定義することにします。

詳しくいうと、

$$(4.2) \quad B^{+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} B(X(t); |t| < \varepsilon)$$

でもって、原点の germ field を定義し、

正規定常過程 $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ が

マルコフ性をもつとは

$$(4.3) \quad B^{-\infty} \perp_{B^{+}} B^{+\infty}$$

が成り立つときをいうことにします。

そのとき、Karhunenの結果をふまえて、

$\Delta(a)$ の outer part $h(a)$ の条件により、
 X のマルコフ性の特徴付けを与えたのが
 Levinson-Mckeanであり、それは次の様に述べられる。

定理 (Levinson-Mckean) X がマルコフ性をもつための必要十分条件は、次の条件 (4.4)~(4.5)をみたす infra-exponential type の entire function $P(z)$ が存在することである：

$$(4.4) \quad P(ix) \neq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^1)$$

$$(4.5) \quad h(x) = \frac{1}{P(-ix)} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^1).$$

§5 正規定常過程と超函数

我々の目標は次のことである。

X がマルコフ性をもつとき、(3.16)における h が (4.4), (4.5)をみたすことが必要十分であると Levinson-Mckean が示しましたが、それを微分方程式論的に取り扱って、(4.4), (4.5)を

みたすとき、 X が マルコフ性 を もつ こと を 示
したい と思います。

証明の粗筋

(3.4), (3.5), (4.4) と (4.5) により、

$$(5.1) \quad P\left(\frac{d}{dx}\right)E(x) = \delta \quad \text{in } R(D'),$$

但し、 $R(D')$ は $D' = [-\infty, \infty]$ 上の Fourier 超函数、
が成り立ち、このことより、(3.13) は、

$$(5.2)' \quad P\left(\frac{d}{dx}\right)X(x) = B'(x) \quad \text{in } R(D')$$

と、hyperfunction の世界において成り立つ。

そのとき、我々が示す目標は、(5.2)の
解である $X(x)$ が 何故、(4.3)の意味で
マルコフ性 を もつ こと になる か を 示す こと である。

$$(5.3) \quad B^{+/-} \equiv \sigma (E(X(t) | B^{-\infty 0}) ; t > 0)$$

と おく とき、

$$(5.4) \quad B^{+/-} \subset B^- \equiv B^{-\infty 0}$$

$$(5.5) \quad B^- \perp_{B^{+/-}} B^+ \equiv B^{0\infty}$$

$$(5.6) \quad B^{0+} \subset B^{+/-}$$

が一般に成り立つことに注意すれば、(4.3)を示すためには、 $\forall t > 0$ に対して、

$$(5.7) \quad E(X(t) | \mathcal{B}^-) \text{ が } \mathcal{B}^{0+}\text{-可測である}$$

ことを示せばよい。Karhunenの定理によて、

$$(5.8) \quad E(X(t) | \mathcal{B}^-) = \int_{-\infty}^0 E(t-u) dB(u)$$

が成り立つことに注意して、

$Y(x) \in \mathcal{B}((0, \infty))$ を $\int_{-\infty}^0 E(t-u) dB(u)$ の定める hyperfunction とし、hyperfunction の flabbiness によて、

$$Z(x) = \begin{cases} Y(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

なる hyperfunction $Z(x)$ を考えると、 P が local operator であること、(5.1)と Z の定義より、 $P(\frac{d}{dx})Z$ は 原点に support をもつ hyperfunction になること、そのような hyperfunction の構造定理によて、ある infra-exponential type の entire function Q が存在して、

$$(5.9) \quad P(\frac{d}{dx})Z = Q(\frac{d}{dx})\delta$$

が成り立つ。

従って、(5.1) より、

$$(5.10) \quad Z = (Q\delta) * E$$

が成り立つ。次に、

$$(5.11) \quad Q\delta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\omega) \delta^{(n)}$$

とすると、 $Y(x)$, $Z(x)$ の定義と (5.10) より、 $\forall t > 0$ に對して、

$$\begin{aligned} (5.12) \quad E(X(t) | \mathcal{B}^{-\infty}) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (Y(t+\varepsilon) - Y(t-\varepsilon)) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (Z(t+\varepsilon) - Z(t-\varepsilon)) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\omega) (E^{(n)}(t+\varepsilon) - E^{(n)}(t-\varepsilon)) \right) \end{aligned}$$

が成り立つが、 $C_n(\omega)$ は、 Y , Z の定義と

(5.9) より、Lévy 展開の一意性によつて、

$$(5.13) \quad C_n(\omega) \text{ は } \mathcal{B}(Y(t); 0 < t < \varepsilon) \text{ } (\forall \varepsilon > 0) \text{ - 可測である}$$

ことが従う。一た、

$$(5.14) \quad \mathcal{B}^{0+} \subset \mathcal{B}^- \cap \mathcal{B}^+ \subset \mathcal{B}^-$$

に注意して、

$$(5.15) \quad \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{B}(Y(t); 0 < t < \varepsilon) \subset \mathcal{B}^{0+}$$

が成り立つので、(5.12), (5.13), (5.15) より、

$E(X(t) | \mathcal{B}^{-\infty})$ が $\mathcal{B}^{0+}$ - 可測であることが成り立つ。

即ち (5.7) が成り立ち、 X がマルコフ性をもつことが示された。Q.E.D

§6. $\hat{\Delta}(a)$ を基本解とする微分作用素

§1 において述べたことに言及したいと思います。話は、§4 において述べたマルコフ性をもつ正規定常過程に限ります。一般のときは、pseudo-differential operator の理論の中におさまると思いますが、別の機会にしたいと思います。

(3.4) と (3.11) より、

$$(6.1) \quad k = E * \check{E}$$

$$\text{但し、} \quad \check{E}(t) \equiv E(-t)$$

が成り立ち、従って、(5.1) より、

$$(6.2) \quad Q \equiv P^* P$$

と local operator を定義するとき、

$$(6.3) \quad Q k = \delta$$

が hyperfunction の世界で成り立つ。

(6.2) よりして、 Q は

$$(6.4) \quad Q = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{d^{2l}}{dt^{2l}}$$

$$(6.5) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} {}^{2l}\sqrt{(2l)! |C_l|} = 0$$

を示す。

なお、多変数の場合の考察は別の機会に報告したいと思ひます。

参考文献

- [1] K. Karhunen, Über die struktur stationären zufälliger funktionen, Ark. Mat., 1 (141-160), 1950
- [2] N. Levinson - H.P. McKean, Jr., Weighted trigonometrical approximation on R^1 with application to the germ field of a stationary Gaussian noise, Acta. Math., 112 (99-143), 1964
- [3] M. Sato, Theory of hyperfunctions, I, J. of the Faculty of Science, Univ. of Tokyo, 8 (139-193), 1959