

一般化されたワグナー曲面とその単有理性

横浜市大・文理 桂 利行

§1. 結果

k を標数 p の代数的閉体, X を k 上の *non-singular complete* 代数曲面とする。2次元射影空間 P^2 から X への *generically surjective* 有理写像 φ が存在するとき, X は単有理曲面であるという。さらに, φ として次数 p の *purely inseparable* 有理写像がとれるとき, X は *Zariski* 曲面であるという。 X の第2 Bett 数を $B_2(X)$, *Picard* 数を $\rho(X)$ とかく。 $B_2(X) = \rho(X)$ であるとき, X は *supersingular* であるという。 X が有理曲面ならば単有理曲面であり, 単有理曲面ならば *supersingular* になる (Shioda [7] 参照)。これらの逆は一般には成立しない (Zariski [10], Shioda [7] 参照)。 E を k 上定義された楕円曲線とする。 E の p 等分点のなす群を $(E)_p$ とかく。 $(E)_p \cong \{0\}$ となるとき E は *supersingular* 楕円曲線であるという。この条件は $\text{End}^0(E) = \text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}$ が $\mathbb{Q}$ 上の四元数環になることと同値である。 A を 2次元のアーベル多様体 (アーベル曲面) とする。 A が

supersingular 楕円曲線 E の直積 $E \times E$ と isogenous になるとき, A は supersingular なアーベル曲面であるという。 A が代数曲面として supersingular になること (即ち $B_2(A) = p(A) = 6$) と A がアーベル曲面として supersingular になることは同値である。 $p \neq 2$ とし, ι を A の inversion ($\iota: x \mapsto -x, x \in A$) とする。 商曲面 $A/\langle \iota \rangle$ は 16 個の ordinary double point を持つが, その minimal resolution を $K_m(A)$ と書き, これを Kummer 曲面とよぶ。 本稿では, 次の二つの問題を考える。

問題 1 (塩田). $p \geq 3$ とし, E を supersingular 楕円曲線とする。 このとき, $K_m(E \times E)$ は Zariski 曲面になるか。

問題 2 (Artin-塩田). $p \neq 0$ とする。 $K3$ 曲面 X に対し, X が単有理曲面であることと, X が supersingular であることは同値であるか。

問題 1 については, $p=3$ のときには Fermat 曲面に関する結果を用い Shioda [6], [7] から出ることが 塩田先生により注意されている。 問題 1 に関する我々の結果は次のとおりである。

定理 1. $p \geq 3$ とし, E を supersingular 楕円曲線とする。

i) $p \not\equiv 1 \pmod{12}$ ならば $K_m(E \times E)$ は Zariski 曲面である。

ii) $p \equiv 1 \pmod{12}$ のときには $K_m(E \times E)$ の適当な $(p-1)/2$ 次の separable covering をとってやれば Zariski 曲面になる。

問題2については 先にのべたように単有理曲面なら *supersingular* になることは一般的事実として知られている (Shioda [7] 参照)。逆の成立に関して, 次のような2つの興味ある事実が知られている。

定理2 (Rudakov and Shafarevich [5]). $p=2$ とする。このとき, $K3$ 曲面 X が単有理曲面であることと *supersingular* であることは同値である。

定理3 (Shioda [8]). $p \geq 3$ とする。Kummer 曲面 $K_m(A)$ に対しては, $K_m(A)$ が単有理曲面であること, $K_m(A)$ が *supersingular* であること, A が *supersingular* であることの3つの条件は同値である。

我々は この定理3を少し一般にする。 A をアーベル曲面とし, A の代数曲面としての自己同型群を $\text{Aut}(A)$ と書く。 G を $\text{Aut}(A)$ の有限部分群とする。

定義1. 商曲面 A/G の *non-singular model* で $K3$ 曲面になるものがあるとき, その *non-singular minimal model* を $K_m(A, G)$ と書き 一般化された Kummer 曲面 とよぶ。

これに対して, 次の定理をうる。

定理4. $p \geq 7$ とする。一般化された Kummer 曲面 $K_m(A, G)$ に対して 次の3条件は同値である。

i) $K_m(A, G)$ は 単有理曲面である。

ii) $K_m(A, G)$ は supersingular である。

iii) A は supersingular p -ヘル曲面である。

定理4を示すために、一般化された Kummer 曲面が得られるような p -ヘル曲面 A と有限部分群 $G \subset \text{Aut}_p(A)$ の組 (A, G) の分類をおこなう。

補題5. $p \neq 2, 3, 5$ とする。 $K(A, G)$ を一般化された Kummer 曲面とすれば, G の元で fixed point free になるものは A の translation にかぎる。

G の元で fixed point free になるもの全体と単位元からなる集合を N とすれば, 容易にわかるように N は G の正規部分群になる。 (A, G) のかわりに $(A/N, G/N)$ を考えても

$$K_m(A, G) \cong K_m(A/N, G/N)$$

となるから, G に次の条件をつけてよい。

(条件F) G は fixed point free の元を含まない。

定理6. $p \neq 2, 3, 5$ とする。 $K_m(A, G)$ を一般化された Kummer 曲面とし, G は (条件F) をみたすとする。 しかるば, G は次のどれかの群と同型である。

(i) cyclic group $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n=2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$ または 12)。

(ii) binary dihedral group $\langle 2, 2, n \rangle$ ($n=2, 3, 4, 5$ または 6)。

(iii) binary tetrahedral group $\langle 2, 3, 3 \rangle$ 。

(iv) binary octahedral group $\langle 2, 3, 5 \rangle$ 。

(v) binary icosahedral group $\langle 2, 3, 5 \rangle$.

系7. $p=0$ とする。 $K_m(A, G)$ を一般化された Kummer 曲面とすれば, G は次のどれかの群と同型である。

(i) cyclic group $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n=2, 3, 4, 7, 8$).

(ii) binary dihedral group $\langle 2, 2, n \rangle$ ($n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$).

(iii) binary tetrahedral group $\langle 2, 3, 3 \rangle$.

注意1. 系7は Fujiki [1] でも得られている。

注意2. 定理6にあらわれている群は 適当な標数 p を選べば その標数において存在する。系7においてあらわれている群は すべて存在する (Fujiki [1], Katsura [2] 参照).

証明の詳細は Katsura [2] にあるので, ここでは結果の announcement にとどめ, 次の節では 定理3の新しい証明を与え, その系として 定理1 ii)を示すことにする。

§2. 定理3の証明.

以下, 次の定理を自由に用いる。

定理8 (Deligne). E_i ($i=1, 2, \dots, 2n$; $n \geq 2$) を supersingular 楕円曲線とする。このとき, $E_1 \times \dots \times E_n \cong E_{n+1} \times \dots \times E_{2n}$ となる。

証明は Shioda [9] 参照。

まず, Moret-Bailly による principally polarized supersingular アーベル曲面の族の survey から始める。 $p \geq 3$ とする。
 E を supersingular 楕円曲線, $\mathcal{A}_p = \text{Spec } k[\mathcal{E}]/(\mathcal{E}^p)$ を

rank p の local-local group scheme とする。 $A = E \times E$ とおき、 T を A の零点における tangent space, $S = \mathbb{P}(T)$ を T から得られる射影直線とする。

$$K_S = \alpha_p \times \alpha_p \times S, \quad A_S = E \times E \times S$$

とおく。 S の斉次座標を (X, Y) とし, $K_S = \text{Spec } \mathcal{O}_S[\alpha, \beta]/(\alpha^p, \beta^p)$ の $X\alpha - Y\beta = 0$ によって定義される subgroup scheme を H とする。自然な写像 $H \rightarrow S$ によってこれは S 上の group scheme になる。すべての closed fibre は α_p と同型である。 α_p に同型な $E \times E$ の subgroup scheme で $\mathbb{P}(T)$ の点 t の方向に対応するものが一意的に存在するが, $H \rightarrow S$ はそのような $E \times E$ の subgroup scheme を parametrize するものである。

$K_S \hookrightarrow A_S$ による自然な写像によって $\Delta: H \hookrightarrow A_S$ なる injection が induce される。 $\mathcal{X} = A_S/\Delta(H)$ とおく。次のような diagram を得る:

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\Delta} & A_S & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{X} \longrightarrow 1 \quad (\text{exact}). \\ & & & & \swarrow \text{pr}_1 & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \xi \\ & & & & A & & S \cong \mathbb{P}^1 \end{array}$$

ここに, π は canonical projection, pr_1, pr_2 は projections, ξ は pr_2 から自然に induce された写像である。 L を A の inversion とする。 A 上の invertible sheaf L で次のような条件を満たすものを E とする:

(2.2) (i) L は symmetric ($\mathbb{R}p \leq$, $\psi^* L = L$).

(ii) $K(L) \cong \alpha_p \times \alpha_p$.

ただし, $x \in A$ による translation を T_x とし,

$$\begin{array}{ccc} \varphi_L: A & \longrightarrow & P_{\text{ic}}^0(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & T_x^* L \otimes L^{-1} \end{array}$$

によって 準同型 φ_L を定義するとき, $K(L) = \ker \varphi_L$ である。このような L の存在は Moret-Bailly [3] に示されている。 A_S 上の invertible sheaf $\text{pr}_1^*(L)$ を考えれば, 条件 (2.2) から Mumford の descent theory が使えて (Moret-Bailly [3], Mumford [4]) X 上の invertible sheaf M で

$$\text{pr}_1^*(L) = \pi^*(M)$$

となるものが存在する。また, 我々の構成法によって

$$\mathcal{O}_X(D) \cong M \otimes f^* \mathcal{O}_S((P-1)/2)$$

となるような effective な relative divisor D が X 上に存在することがわかる。Moret-Bailly [3] に示されているように, D は non-singular irreducible 曲面で,

$$f|_D: D \longrightarrow S$$

は (かならずしも irreducible でない) 種数 2 の曲線の族になる。 $\pi^{-1}(D) = D'$ とおけば,

$$\mathcal{O}_{A_S}(D') = \text{pr}_1^* L \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_S((P-1)/2)$$

となり, 従って容易にわかるように

$$(2.3) \quad \deg(\text{pr}_1|_{D'}) = (p-1)/2$$

となる。以上の結果について詳しくは Moret-Bailly [3] 参照。

我々は この構成によって 次のような diagram を得る：

$$(2.4) \quad \begin{array}{ccccc} A_S & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{X}_S & \xrightarrow{\pi'} & A_S \\ \text{pr}_1 \downarrow & \nearrow D' & \xrightarrow{g} & D & \nearrow g' \\ & A & \xrightarrow{F} & A & \downarrow \text{pr}_1 \end{array}$$

ここに F は A の Frobenius morphism, $\pi' \circ \pi = F \times \text{id}_S$ (id_S は S の恒等写像), g, g' はそれぞれ π, π' によって induce された写像である。 g は purely inseparable morphism で次数 p , F は purely inseparable morphism で次数 p^2 であるから, $f' = \text{pr}_1 \circ g'$ とおけば, (2.3) (2.4) により,

(2.5) f' の inseparable degree は p で, separable degree は $(p-1)/2$ である。アーベル曲線の inversions と $\pi, \pi', F, \text{pr}_1$ は可換で, かつ 作り方 から D は $\mathcal{X}$ の inversion で不変であるから, $\mathcal{X}$ の inversion $\tilde{\tau}$ は $D \rightarrow S$ の fibre に 種数 2 の曲線の involution として作用する。よって,

$$\begin{array}{ccc} & D/\langle \tilde{\tau} \rangle & \\ h \swarrow & & \searrow f \\ S & & A/\langle \tau \rangle \end{array}$$

なる diagram を得る。ただし, f, h はそれぞれ $f', g|_D$ から induce された写像である。 h の general fibre は $\mathbb{P}^1$ と

なり、 $S \cong \mathbb{P}^1$ であるから $D/\langle \tau \rangle$ は有理曲面と birational になる。従って、 $A/\langle \tau \rangle$ の minimal resolution である $K_m(A)$ は単有理曲面になる。一般の supersingular p -ベル曲面 B に対しては、 $A \rightarrow B$ なる isogeny が存在するから、Shioda [8] のように generically surjective な有理写像 $K_m(A) \rightarrow K_m(B)$ をうる。従って $K_m(B)$ の単有理性は、 $K_m(A)$ の単有理性から従う。逆は Shioda [8] のように、一般の p -ベル曲面 A に対して

$$\rho(A) + 16 = \rho(K_m(A))$$

が成立することをいい、

$K_m(A)$ が単有理曲面 $\Rightarrow K_m(A)$ が supersingular (Shioda [6])

$$\Rightarrow \rho(K_m(A)) = 22$$

$$\Rightarrow \rho(A) = 6$$

$\Rightarrow A$ は supersingular p -ベル曲面

となる。または、次の一般的な補題を用いてもよい。

補題 9. $p \geq 7$ とする。 A を p -ベル曲面、 G を $\text{Aut}_k(A)$ の有限部分群で $K_m(A, G)$ が一般化された Kummer 曲面になるようなものとする。そのとき、 A が supersingular になることと $K_m(A, G)$ が supersingular になることは同値である。

証明には formal Brauer 群の理論を用いる。詳細は

ここでは省略する (Katsura [2] 参照)。

また, (2.5) から

f の inseparable degree p , separable degree $(p-1)/2$ となる。よって $k_m(A)$ の函数体 $k(k_m(A))$ の函数体 $k(D/k)$ における separable closure を函数体にもつような代数曲面を Y とすれば, Y は $k_m(A)$ 上 separable で, その次数は $(p-1)/2$ かつ Y は Zariski 曲面になる。これで定理 1 ii) は示された。とくに $p=3$ のときには $(p-1)/2=1$ であるから $k_m(A)$ 自身が Zariski 曲面になり, このときには定理 1 i) も示されたことになる。

References

- [1] A. Fujiki, On finite automorphism groups of complex tori of dimension 2, to appear.
- [2] T. Katsura, Generalized Kummer surfaces and their unirationality in characteristic p , in preparation.
- [3] L. Moret-Bailly, Familles de courbes et de variétés abéliennes sur $\mathbb{P}^1$, Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux (L. Szpiro, ed.) Soc. Math. France, Astérisque, 86 (1981), Exp. 7, 109-124 and Exp. 8, 125-140.
- [4] D. Mumford, Abelian varieties, Interscience-Wiley, New York, 1959.
- [5] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, Supersingular $K3$

- surfaces over fields of characteristic 2, Math. USSR-Izv., 13 (1979), 147-165.
- [6] T. Shioda, Algebraic cycles on certain K3 surfaces in characteristic p , Proc. Int. Conf. on Manifolds (Tokyo, 1973), (1975), 357-364.
- [7] T. Shioda, An example of unirational surfaces in characteristic p , Math. Ann., 211 (1974), 233-236.
- [8] T. Shioda, Some results on unirationality of algebraic surfaces, Math. Ann., 230 (1977), 153-168.
- [9] T. Shioda, Supersingular K3 surfaces, in Algebraic Geometry, Proc. Copenhagen 1978 (K. Lønsted, ed.), Lecture Notes in Math. 732, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag (1979), 564-591.
- [10] O. Zariski, On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a = P_2 = 0$ of an algebraic surface, Illinois J. Math., 2 (1958), 303-315.