

非等方媒質中における電磁場の特異モード

九州大学 大学院数理学研究院 福本 康秀 (Yasuhide Fukumoto)
Faculty of Mathematics, Kyushu University

Moscow State Inst. Radioeng. Alexander B. Samokhin
Moscow State Institute of Radioengineering,
Electronics and Automation (MIREA)

1 はじめに

流体運動の線形安定性の問題は研究され尽くしたと思われる向きもあるかも知れないが、本当に大事な問題は未解明のまま残されている。しばしば使われる手は、安定性問題が解けるように基本流を単純化なものにとる。たとえば、渦の安定性に対しては一様渦度を仮定する。ところが、いったん渦度が非一様に分布すると、たちどころに線形安定性の計算ができなくなる。非エルミート作用素のスペクトルという難問が立ちはだかる。一様渦度に対しては、離散的に分布していた固有値が連続スペクトルに移行する。安定性を知るためには、これらのスペクトルが複雑に織りなす縮退状況を解明しなければならない [5, 6]。

連続スペクトルとそれに対応する (特異) 固有関数が具体的に書き下せれば便利である。Vlasov 方程式に対してはこれが可能で、(特異) 固有関数は比較的簡単な形をとる [8, 3]。最近、物体による長波長の電磁波の散乱問題に対して、連続スペクトルが陽に書くだされ [1]、しかも、特異固有関数もきれいに求められた [2]。しかし、この結果は等方媒質に限定される。本研究ではこれを非等方媒質に拡張する。以下では、結果のみを記す。

2 電磁場の散乱に対する特異積分方程式

真空中におかれたコンパクトな物体 (誘電体) D による電磁波の散乱を考えよう。電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{H}$ は Maxwell 方程式にしたがう：

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \hat{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}^0, \\ \operatorname{div} \hat{\varepsilon} \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで、 $\mathbf{J}^0$ は入射電磁場がもつ (変位) 電流密度、 μ_0 は真空の透磁率、 $\hat{\varepsilon}$ は誘電率テンソルである：

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(\mathbf{x}) & \varepsilon_{12}(\mathbf{x}) & \varepsilon_{13}(\mathbf{x}) \\ \varepsilon_{21}(\mathbf{x}) & \varepsilon_{22}(\mathbf{x}) & \varepsilon_{23}(\mathbf{x}) \\ \varepsilon_{31}(\mathbf{x}) & \varepsilon_{32}(\mathbf{x}) & \varepsilon_{33}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) + i\sigma_{ij}(\mathbf{x})/\omega (\in \mathbb{C}). \quad (2.2)$$

虚部 σ_{ij} は電気伝導度テンソルである。誘電率テンソルは物体中では場所のよって変わるが、物体外部では一様等方である $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \hat{I}$ ($\hat{I}$ は単位行列) であるとする。関数 $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ は、物質の境界も含めて Hölder 連続であると仮定する。

電磁波 3 次元散乱問題の数値計算を Maxwell 方程式 (2.1) によって行うのは、計算量が膨大で効率が悪い。一見複雑な手続きに見えるが、これから述べる積分方程式に変換した方がはるかに計算効率がよい。

周波数 $\omega (\in \mathbb{R})$ をつ単色波が物体 D に入射すると仮定すると、場の時間依存性は $\mathbf{E}, \mathbf{H} \propto e^{-i\omega t}$ のようになる。このとき、ヘルムホルツ方程式のグリーン関数は

$$G(R) := \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R}; \quad R := |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad k_0 := \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (2.3)$$

で与えられる。さて、真空の誘電率で規格化した誘電率テンソルを

$$\hat{\varepsilon}_r(\mathbf{x}) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x})/\varepsilon_0 \quad (2.4)$$

とおこう。このとき、Maxwell 方程式 (2.1) は次の形の積分方程式に変換される [7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{1}{3} \left(\hat{\varepsilon}_r(\mathbf{x}) - \hat{I} \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}) - \text{p.v.} \int_D \left[\left(\hat{\varepsilon}_r(\mathbf{y}) - \hat{I} \right) \mathbf{E}(\mathbf{y}) \cdot \nabla \right] \nabla G(R) d\mathbf{y} \\ - k_0^2 \int_D \left(\hat{\varepsilon}_r(\mathbf{y}) - \hat{I} \right) \mathbf{E}(\mathbf{y}) G(R) d\mathbf{y} = \mathbf{E}^0(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in D). \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで、 $\text{p.v.} \int_D$ は特異体積積分の主値をあらわす。次節ではこの積分方程式のスペクトルを論ずるが、(2.5) には数値計算の効率を格段に上げるという実用上の利点も大きいことを繰り返しておく [7]。

3 連続スペクトルと特異固有関数

主値積分をとる作用素を $\hat{S}$, (2.5) の左辺全体におよぶ作用素を $\hat{A}$ とおくと、(2.5) は全体としてシンボリックに

$$\hat{A}\mathbf{E} = \mathbf{E} - \hat{S} \left((\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\mathbf{E} \right) = \mathbf{E}^0 \quad (3.1)$$

とかける。電気伝導度 $\sigma_{ij} \neq 0$ の場合、あるいは、行列 $\hat{\varepsilon}$ が特別な対称性をもたない場合には、 $\hat{A}$ は非エルミート作用素となる。作用素 $\hat{A}$ のスペクトル $\lambda (\in \mathbb{C})$ は $\hat{A} - \lambda \hat{I}$ が

ヒルベルト空間上いたるところで逆をもたない、ことによって定義される。さらに、複素数 λ が $\hat{A}$ の連続スペクトルかどうかは、 $\hat{A} - \lambda \hat{I}$ が Noether 作用素ではないことによって判定できる。この条件から、連続スペクトルは

$$\lambda = \beta^T \hat{\varepsilon}_r(\mathbf{x}) \beta = \frac{1}{\varepsilon_0} \varepsilon_{lm}(\mathbf{x}) \beta_l \beta_m \quad (\mathbf{x} \in D) \quad (3.2)$$

と定まる。ここで β は任意の単位ベクトルである。等方物質 $\hat{\varepsilon}_r = \varepsilon_r(\mathbf{x}) \hat{I}$ に対しては、(3.2) は $\lambda = \varepsilon_r(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x})/\varepsilon_0$ となり、以前に得られた結果 [1] を回復する。等方物質では、連続スペクトルは場所 $\mathbf{x}$ のみの ($= \beta$ によらない) 関数で、特異固有関数の振幅も $\mathbf{x}$ に局在している [2]。

スペクトル λ の分布がすべて決定されると、特異積分方程式 (2.5) の解が存在するか否かを証明できる。さらに、解が存在する場合には、逐次近似解法の収束を加速する手立てが見つかる [1, 7]。単位ベクトル β の始点を原点に固定すると、 β の終点は単位球面上にある。非等方物質 D に対しては、 β が球面全体を掃くとき、スペクトル (3.2) は様々な値をとることになり、等方媒質とは状況が一変する。

Weyl によるスペクトルの定義がある；もし、完備ヒルベルト空間 X に属する収束する関数列 $\{\psi_n \in X\}$ で

$$\|\psi_n\| = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{A}\psi_n - \lambda\psi_n\| = 0 \quad (3.3)$$

をみたすものが存在すれば、 $\lambda (\in \mathbb{C})$ は $\hat{A}$ はのスペクトルである [4]。電磁場の特異積分方程式 (2.5)、同じことであるが、(3.1) に対しては、(3.3) の意味では固有関数といえるが、収束する部分列をもたない関数列、すなわち、特異関数列 $\{\psi_n \in X\}$ が存在する。この極限として特異固有関数が構成できる。

スペクトル λ に対して、

$$\hat{\varepsilon}'(\mathbf{x}) := \frac{\hat{\varepsilon}_r(\mathbf{x}) - \lambda}{1 - \lambda} \quad (3.4)$$

とおく。単位球面上で、

$$\varepsilon'_{lm}(0) q_l^0 q_m^0 = 0 \quad (3.5)$$

をみたす点 $\mathbf{q}_0$ ($|\mathbf{q}_0| = 1$) のごく近傍

$$S(\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi}{4\alpha^2 \|\hat{\varepsilon}'(0)\|^2}, & \alpha \gg \frac{1}{\|\hat{\varepsilon}'(0)\|} \quad (\text{if } \|\hat{\varepsilon}'(0)\| \neq 0) \\ 0 & (\text{if } \|\hat{\varepsilon}'(0)\| = 0) \end{cases} \quad (3.6)$$

を取り出す。下段は等方物質に対応できるように設けた。単位球面上の点 $\mathbf{q}$ ($|\mathbf{q}| = 1$) が $S(\alpha)$ に入るかどうかを識別する関数を導入する：

$$\varphi(\mathbf{q}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{q} \in S(\alpha)) \\ 0 & (\mathbf{q} \notin S(\alpha)). \end{cases} \quad (3.7)$$

フーリエ空間に移ると、特異固有関数はコンパクトに書き表わされる。通常の3次元フーリエ変換

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\psi(\mathbf{x})] = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (3.8)$$

を定義する。フーリエ空間で、次の形の電場を導入する：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) &= \gamma \mathbf{k} \tilde{\psi}(\mathbf{k}), \\ \tilde{\psi}(\mathbf{k}) &= \exp \left(-\frac{\varphi(\mathbf{q})|\mathbf{k}|^2}{\alpha} - \frac{(1 - \varphi(\mathbf{q}))|\mathbf{k}|^2}{\beta} \right); \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

係数 $\gamma (\in \mathbb{R})$ は、電場が規格化条件

$$\|\mathbf{E}(\mathbf{x})\|_{\tilde{L}_2(E_3)} = 1 \quad (3.10)$$

をみたすように決める。結果は

$$\gamma^2 \frac{3\sqrt{\pi}}{32\sqrt{2}} \left[S(\alpha)\alpha^2\sqrt{\alpha} + (4\pi - S(\alpha))\beta^2\sqrt{\beta} \right] = 1 \quad (3.11)$$

である。ここで、たとえば、(3.9) の制限つき極限

$$\alpha = \beta^6, \quad \beta \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

をとると、特異固有関数のフーリエ表現が得られる。

参考文献

- [1] Budko, N.V. and Samokhin, A. B. (2006) Spectrum of the volume integral operator of electromagnetic scattering, *SIAM J. Sci. Comput.* **28**, 682-700.
- [2] Budko, N.V. and Samokhin, A. B. (2007) Singular modes of the electromagnetic field, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 6239-6250.
- [3] Case, K. M. (1959) Singular modes of the electromagnetic field, *Ann. Phys.* **7**, 349-364.
- [4] Hislop, P. D. and Sigal, I. M. (1996) *Introduction to Spectral Theory: With Applications to Schrödinger Operators* (New York: Springer).
- [5] Hirota, M. and Fukumoto, Y. (2008) Energy of hydrodynamic and magnetohydrodynamic waves with point and continuous spectra, *J. Math. Phys.* **49**, 083101.

- [6] Hirota, M. and Fukumoto, Y. (2008) Action-angle variables for the continuous spectrum of ideal magnetohydrodynamics, *Phys. Plasmas* **15**, 122101.
- [7] Samokhin, R. (2009) Volume Integral Equation Method in Problems of Mathematical Physics, COE Lecture Note **16**, Faculty of Mathematics, Kyushu University.
- [8] Van Kampen, N. G. (1955) On the theory of stationary waves in plasmas, *Physica* **21**, 949-963.