

多様体上のある3項系 (homogeneous system) について

島根大 文理 吉川通彦

§1. homogeneous systems.

O. Loos [8], [9] によれば, 多様体上に反射積を与えること
によって対称空間を定義することができる。すなわち,
affine 対称空間 G は次のような可微分2項演算 (反射積)
 $S: G \times G \rightarrow G; (x, y) \mapsto S_x y$ をもつ C^∞ 多様体である。

$$(S-1) \quad S_x x = x, \quad (S-2) \quad S_x S_x y = y$$

$$(S-3) \quad S_x S_y z = S_{S_x y} S_x z$$

$$(S-4) \quad \text{各 } a \in G \text{ は次のような近傍 } U_a \text{ をもつ;} \\ x \in U_a, S_a x = x \Rightarrow x = a.$$

このとき S_x は点 x に関する反射 (折り返し) を表している。
ここで特に上の公理のうち (S-1) ~ (S-3) が純代数的な公理
であることに着目してこの3公理をみたす準群 $(G, *)$;
 $x * y := S_x y$ を考え, 更に G の1つの元 $e \in G$ を固定して
もう1つの積演算 $xy := x^{\frac{1}{2}} * y^{\frac{1}{2}}$ を定義すれば, この積によ
って e を単位元とするループ (単位元をもつ準群) が得ら

れる。 $([4, I, II])$ ただし $x^{\frac{1}{2}}$ および x^{-1} はそれぞれ $x^{\frac{1}{2}} * e = x$ および $x^{-1} = e * x$ で定まる元を表す。このとき $x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = x$ であり、また x^{-1} はこのループにおいて x の逆元である。

なお、位数有限の場合について、上の準群 $(G, *)$ は延沢氏他によって [3], [10] で扱われており、また、対応する有限ループは Glauberian [2] などで扱われている。

一般に対称空間 G においては $(G, *)$ は必ずしも準群をなすとは限らないが、 S_x が点 x に関する折返しであることを考慮すれば各点 e において積 $z = xy$ は次の意味で少なくとも局所的には常に定義され局所ループをなす。すなわち、 e の適当な測地的標準近傍において、点 e と点 x を結ぶ測地線 $\overline{ex}$ に沿って他の測地線 $\overline{ey}$ を平行移動して得られる測地線 $\overline{xz}$ の終点 z がこの近傍に属するとき z は $x^{\frac{1}{2}} * y$ で表されるから積 $z = xy$ も定義される。この局所ループにおいては、左移動 $L_x: y \mapsto xy$ は測地線 $\overline{ex}$ に沿う平行移動をあらわしている。

一方、1つのリー群 G の上で不変接続として(-)接続を考えると、1径数部分群はすべて単位元 e を通る測地線であり、その測地線に沿う e から x への平行移動はやはり x による G の左移動 L_x によってひきおこされている。そこで、1つの集合の任意の2元に対して一方を他方へうつすような

‘平行移動’の概念が(抽象的に)与えられるような構造を以下において考察する。

定義 集合 G の二元 x, y の各対に対して G のそれ自身への全単射 $\eta(x, y): G \rightarrow G$ が与えられ, $\eta(x, y)z$ を $\eta(x, y, z)$ であらわすとき η は G 上の3項系 $\eta: G \times G \times G \rightarrow G$ として次の公理をみたすものとする。

$$(H-1) \quad \eta(x, x, y) = \eta(x, y, x) = y,$$

$$(H-2) \quad \eta(y, x, \eta(x, y, z)) = z,$$

$$(H-3) \quad \eta(x, y, \eta(u, v, w))$$

$$= \eta(\eta(x, y, u), \eta(x, y, v), \eta(x, y, w)),$$

$$x, y, z, u, v, w \in G.$$

このとき3項系 (G, η) を G 上の homogeneous system ([6]) とよぶ。

この小論では C^∞ 多様体上の C^∞ homogeneous system に対して標準接続の概念を定義し, このような homog. sys. が1つの reductive な等質空間 ([11]) と見なされることを示し, 更に接代数の概念を導入することによって, 測地線に沿う平行移動がすべて $\eta(x, y)$ の形で表される場合(測地的)には, homog. sys. は局所的にその接代数によって特徴づけられること, および, その接代数は山口氏 [12], [13], [14] の意味の general Lie triple system をなすことを示す。また, 特に対称空間と

なるような hom. sys. についても述べる。

homogeneous system (G, η) において 1 元 $e \in G$ を固定して積演算

$$(L) \quad \mu(x, y) := \eta(e, x, y), \quad x, y \in G$$

を考えると、この積に関する左移動 $L_x = \eta(e, x): y \mapsto xy = \mu(x, y)$ は次の性質をもつ。

$$(L-1) \quad L_e = \text{id}, \quad L_x e = x \quad \text{すなわち } e \text{ は単位元.}$$

$$(L-2) \quad L_{x^{-1}} = (L_x)^{-1}, \quad \text{ただし } x^{-1} := \eta(x, e, e).$$

$$(L-3) \quad L_{x, y}(uv) = (L_{x, y}u)(L_{x, y}v), \quad \text{ただし } L_{x, y} := (L_{xy})^{-1} L_x L_y. \text{ は積 } \mu \text{ に関する左内部写像である.}$$

また、 η はこの積を用いて次のように書かれる。

$$(H) \quad \eta(x, y, z) = x((x^{-1}y)(x^{-1}z)).$$

逆に集合 G 上に 1 つの積演算 $\mu(x, y) = xy$ が与えられてその左移動 L_x が上の (L-1) ~ (L-3) (ただし各 x の逆元 x^{-1} の存在を仮定) をみたすならば (H) によって項系 η を定義すれば η は G 上の 1 つの homogeneous system となり、この関係によって (L-1) ~ (L-3) をみたす積 μ と原点 e をもつ

hom. sys. $(G, \eta; e)$ とは 1 対 1 に対応する。([6] 参照)

例 1 群 G の単位元を e とするときその左移動は明らかに (L-1) ~ (L-3) をみたす。実際 $L_{x, y} = \text{id}, \forall x, y \in G$ が成立っている。このとき (H) $\eta(x, y, z) = yx^{-1}z$ によ

に対応する hom. sys. が得られる。この hom. sys. は次の性質をもつ。

$$(H-4) \quad \eta(y, z) \eta(x, y) = \eta(x, z) \quad , \quad \forall x, y, z \in G.$$

逆に (H-4) をみたす hom. sys. に対して 1 元 e を固定すれば積演算 (L) によって G 上に e を単位元とする群演算が得られる。([6])

注意、上の例 1 において^(ある) ‘平行移動’ $\eta(x, y)$ によって $u, v \in G$ に $u', v' \in G$ がそれぞれ対応するとき $(u, v) // (u', v')$ と定義すれば $//$ は $G \times G$ における同値関係を与える。これは E. Cartan [1] において第 2 種の同値とよばれている。特に加法群 $\mathbb{R}^n$ においては ‘平行移動’ $\eta(x, y)$ は明らかにアフィン空間としての $\mathbb{R}^n$ の通常の平行移動と一致している。

例 2 n 次正定値実対称行列の全体 H_n は積演算

$$\mu(x, y) := x^{\frac{1}{2}} y x^{\frac{1}{2}} \quad (\text{右辺は行列の積})$$

によって閉じているが、この積は単位行列 e に対して (L-1) ~ (L-3) をみたすことが示される。従って H_n 上に 1 つの hom. sys. η が (H) によって定義されるが、この η は (H-4) をみたさない。実際、 $z = \mu(x, y)$ とするとき左内部写像 $L_{x, y} = \eta(z, e) \eta(x, z) \eta(e, x)$ は一般に恒等写像とならない。なお、この積 μ は対称空間 H_n の反射積 $x * y = x y' x$

から得られるもので, (H_n, μ) はループをなす。([5])

注意 上の2つの例では積 $xy = \mu(x, y)$ はいずれも e を単位元とするループをなしているが, 任意の *hom. sys* から (L) で定義される積演算 μ は必ずしもループをなさない。特に (L-1) ~ (L-3) をみたすループを 等質ループ ([5]) とよぶ。以下で述べる結果はすべて連結な C^∞ 多様体上の等質リーマンループに関する [5] の結果を, その左移動の立場から *hom. sys* に関する結果として (拡張的に) 書き直したものである。

§2. 可微分 homogeneous system の標準接続

以下では G を連結な n 次元 C^∞ 多様体とし, η を G 上の C^∞ homogeneous system, すなわち公理 (H-1) ~ (H-3) をみたす C^∞ 写像 $\eta: G \times G \times G \rightarrow G$ とする。次に述べる方法によって G 上に1つの線型接続 ∇ が定義される。

$\pi: P(G) \rightarrow G$ を G 上の標構バンドルとし, $P(G)$ の各元 u_0 を通る切断 $\Sigma_{u_0}: G \rightarrow P(G)$ を次のように定義する。

$$\Sigma_{u_0}(x) := \eta_*(a, x) u_0, \quad x \in G, \quad a = \pi(u_0).$$

ただし $\eta_*(a, x)$ は G 上の微分同型写像 $\eta(a, x)$ によってひきおこされる $\pi^{-1}(a)$ から $\pi^{-1}(x)$ への写像をあらわす。バンドル $P(G)$ の部分多様体 $\Sigma_{u_0}(G)$ の u_0 における接空間を

Q_{u_0} とかくとき, 任意の $g \in GL(n, \mathbb{R})$ に対して $(\sum u_0(x))g = \sum u_0 g(x)$ が成立することに注意すれば, $P(G)$ 上の n 次元 distribution $Q: u_0 \mapsto Q_{u_0}$ を水平成分とするような G 上の線型接続 ∇ が定まる。

定義 上のようにして定義された線型接続 ∇ を $\text{hom. sys. } (G, \eta)$ の標準接続とよぶ。

G のそれ自身への微分同型写像 α が $\alpha \eta(x, y, z) = \eta(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, $\forall x, y, z \in G$ をみたすとき α を (G, η) の自己同型とよべば, 次の命題は標準接続の定義から明らかである。

命題 1 $\text{hom. sys. } (G, \eta)$ の自己同型はすべてその標準接続 ∇ の affine 変換である。

系 (1) 任意の $x, y \in G$ に対して $\eta(x, y)$ は ∇ の affine 変換である。

(2) G の 1 点 e を原点として (L) で与えられる積 μ に関する左内部写像はすべて ∇ の affine 変換である。

η の C^∞ 自己同型群を $\text{Aut}(\eta)$, 点 e における等方部分群を $A_e(\eta)$, e における積 μ の左内部写像群を $\Lambda_e(\eta)$ であらわすとき, (L-3) および (H) から Λ_e は A_e の部分群であることがわかる。また, $\text{Aut}(\eta)$ は標準接続 ∇ の affine 変換群 $\text{Aff}(\eta)$ の閉部分群であり, 従って $\text{Aut}(\eta)$ はリー群である。 $\text{Aut}(\eta)$ の

リー部分群 A_e における Λ_e の閉包を K_e であらわし、直積多様体 $A := G \times K_e$ に次のような積演算を導入する。

$$(M) \quad (x, \alpha)(y, \beta) := (\mu(x, \alpha y), L_{x, \alpha y} \alpha \beta), \\ (x, \alpha), (y, \beta) \in A.$$

このとき直接計算により次のことが示される。

命題 2 $A = G \times K_e$ は積 (M) によつて連結リー群であり、 $K := \{e\} \times K_e$ は K_e と (自然な対応で) 同型な A の閉部分群である。

命題 3 K による A の左剰余類は $\{x\} \times K_e$, $x \in G$, の形で一意に表される。このとき A は等質空間 A/K 上効果的であり、写像 $\varphi: A/K \rightarrow G$; $\varphi(x \times K_e) = x$, は微分同型写像である。

命題 4 G の相異なる原点 e, e' に対応するリー群 $K_e, K_{e'}$ および $A = G \times K_e, A' = G \times K_{e'}$ はそれぞれ次の写像により同型である。

$$K_e \cong K_{e'} ; \quad \alpha \longmapsto \eta(e, e') \alpha \eta(e', e)$$

$$A \cong A' ; \quad (x, \alpha) \longmapsto (\eta(e, e') x, \eta(e, e') \alpha \eta(e', e))$$

例 3 G を 1 つの連結リー群とすると、例 1 によつて G から得られる hom. sys. η に対しては $K_e = \{id\}$, $A \equiv G$ である。このとき η の標準接続 ∇ はリー群 G の (-) 接続と一致する。

定理1 homogeneous system (G, η) の1点 e を原点とするとき積 (L) に関する左内部写像群 Λ_e の閉包 K_e に対してリー群 $A = G \times K_e$ の閉部分群 $K = \{e\} \times K_e$ による等質空間 A/K は reductive な等質空間 ([11]) であり, その(第2種)標準接続に関して微分同型写像 $\varphi: A/K \rightarrow G$ (命題3) は G の標準接続への affine 同型写像を与える。

証明. リー群 A のリー環を $\mathfrak{a}$, K に対応する部分リー環を $\mathfrak{k}$ とするとき, 命題2によつて $\mathfrak{k}$ を K_e のリー環と見なし, $A = G \times K_e$ の単位元 (e, id) における接空間として $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{k}$, $\mathfrak{g} = T_e(G)$ と直和分解するとき, 積演算 (M) の定義から $ad K \cdot (G \times id) = G \times id$, 従つて $ad K \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ を得る。故にこの直和分解に関して A/K は reductive な等質空間である。一般に reductive な等質空間 A/K の標準接続は, 原点における任意の標構 $\tilde{u}_0$ を固定するとき, A が $\tilde{u}_0$ に自然に作用したとき得られる $P(A/K)$ の部分バンドルを A と同一視し, A の各元による左移動で部分空間 $\mathfrak{g}$ を移して得られる $A \equiv \tilde{A}$ 上の distribution を水平成分とする $\tilde{A}$ の無限小接続から定まる A/K 上の A -不変線型接続として得られる。([7]) 一方, 積 (M) によれば $(x, \alpha) \in A$ の A/K への左作用は $(x, \alpha)(y, K_e) = (L_x \alpha y, K_e)$ と表されるから微分同型写像 $\varphi: A/K \rightarrow G$ によつてひきおこされるバン

ドル写像を $\varphi_*: P(A/K) \rightarrow P(G)$, $(x, \alpha) \in A$ の $P(A/K)$ への左作用を $\tau(x, \alpha)$ で表すとき, $\varphi_* \tau(x, \alpha) = \eta_*(e, x) \alpha_* \varphi_*$ が成立つ。命題1の系により $\eta(e, x)$ および α は G の標準接続の affine 変換であり, また, $\varphi_* \tau(G, id) \tilde{u}_0 = \eta_*(e, G) u_0 = \sum u_0(G)$, $u_0 = \varphi_*(\tilde{u}_0)$, であることから φ_* は $P(A/K)$ の水平部分空間を $P(G)$ の水平部分空間に移すことがわかる。

証了。

定理1と命題4によれば任意の $hom. s. (G, \eta)$ に対して1つの reductive な等質空間 A/K が同型を除いて一意に定まり, 微分同型写像 $\varphi: A/K \rightarrow G$ によつて G と A/K を同一視することができる。このとき η の標準接続は A/K の標準接続と見なされる。

$hom. s. (G, \eta)$ の1点 e を原点として G を reductive な等質空間として $G = A/K$, $A = G \times K_e$, $K = e \times K_e$ と表す。 A のリー環の標準分解は $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{k}$, $\mathfrak{g} = T_e(G)$ である。 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X によつて生成される A の1径数部分群を $\exp tX = (x(t), \alpha(t))$, $x(t) \in G$, $\alpha(t) \in K_e$, $t \in \mathbb{R}$ と表すとき, 標準接続に関して $x(t)$ は $G = A/K$ 上の原点 $e = x(0)$ を通る測地線である。([11])

定義 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\exp tX = (x(t), id)$ となるとき, すなわち, $\exp \mathfrak{g} \subset G \times id \subset A$ となるとき $hom. s.$

(G, η) は測地的であるという。命題4によつてこの定義は原点 e の選び方によらない。

定理2 homogeneous system (G, η) が測地的であるための必要十分条件は、 G の任意の測地線 C 上の任意の2点 x, y に対して、 $\eta(x, y)$ が C に沿う x から y への接空間の平行移動をひきおこすことである。

証明. reductive な等質空間の標準接続(第2種)の定義から、任意の $X \in \mathfrak{g}$ によつて生成される A の1径数部分群 $\exp tX = (x(t), \alpha(t))$ の G への作用は $e = x(0)$ を通る測地線 $C: x(t)$ に沿う接空間の平行移動 $T_e(G) \rightarrow T_{x(t)}(G)$ をひきおこす。 (G, η) が測地的ならば $\exp tX = (x(t), id)$ で、その G への作用は $\eta(e, x(t))$ と一致するから原点 e を通る任意の測地線 $C: x(t)$ に沿って e から $x(t)$ への接空間の平行移動は $\eta(e, x(t))$ からひきおこされる。命題1の系によれば、 G の任意の点 a に対して $\eta(e, a)$ は標準接続の affine 変換であるから点 a を通る任意の測地線に対して同様のことが成立つ。逆に、任意の測地線 C 上の任意の2点 x, y に対して $\eta(x, y)$ が C に沿う平行移動をひきおこすとすれば、特に原点 e を通る測地線 $x(t)$ に対して $\exp tX = (x(t), \alpha(t))$ の G への作用 $\eta(e, x(t))\alpha(t)$ と $\eta(e, x(t))$ とが $T_e(G)$ から $T_{x(t)}(G)$ への同一の線型同型写像をひきおこすことになつて

$T_e(G)$ 上で $\alpha(t)_* = \text{id}$ となる。 $\alpha(t)$ は affine 変換で G は連結であるから $\alpha(t)$ は G 上恒等写像に等しい。すなわち、 (G, η) は測地的である。

証了

例4 連結リー群 G から得られる hom. s. (例3) は測地的である。

注意 連結 C^∞ hom. s. がすべて測地的であるかどうかわかっていない。

§3. homogeneous system の接代数

n 次元 C^∞ hom. s. (G, η) を原点 e に関する reductive な等質空間 A/K であらわす。 A のリー環の標準分解 $\alpha = \alpha' + \alpha''$ において $\alpha' = T_e(G)$ の2元 X, Y に対して G 上の2つのベクトル場 $X^*(x) := L_x X, Y^*(x) := L_x Y, x \in G$, を用いて双一次写像を $\mu_*: \alpha' \times \alpha' \rightarrow \alpha'; \mu_*(X, Y) := [X^*, Y^*](e)$ と定義する。 e のまわりの局所座標系であらわすと $\mu_*(X, Y)^i = (X^i Y^j - X^j Y^i) \frac{\partial^2 \mu^i}{\partial x^j \partial y^k}(e, e)$ である。ただし、積 $\mu(x, y)$ の座標を $(\mu^i(x, y))$, X および Y の成分を $(X^i), (Y^i)$ とする。

一方 $A = G \times K_e$ の2元 (x, id) と (y, id) の積は $(\mu(x, y), L_{x, y})$ に等しいから、 C^∞ 写像 $L: G \times G \rightarrow K; L(x, y) = L_{x, y}$ の (e, e) における2次の無限小を求めると、 $L_{x, e} = L_{e, x} =$

id が成立することから 双一次写像 $L^*: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{R}$ が得られる。すなわち、写像 L を (e, e) のまわりの局所座標系とリー群 K の単位元のまわりの局所座標系を用いて (K が trivial でないとき) $L_{x,y} = (L^\lambda(x,y))_{\lambda=1,2,\dots,\dim K}$ と表すとき、 $L^*(X,Y)^\lambda = X^i Y^k \frac{\partial^2 L^\lambda}{\partial x^i \partial y^k}(e,e)$ で与えられる。 $\mathfrak{g}$ における 3 項積を $[X,Y,Z] := [L^*(X,Y) - L^*(Y,X), Z]$, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, と定義すれば $[\mathcal{R}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ よりこの 3 項積は $\mathfrak{g}$ で閉じている。

定義 $\text{hom. s. } (G, \eta)$ の原点 e において $\mathfrak{g} = T_e(G)$ に 2 項積 $X Y := \mu_*(X, Y)$ および 3 項積 $[X, Y, Z]$ を導入したとき $\mathfrak{g}$ を (G, η) の e における 接代数 とよぶ。

例 5 (G, η) がリー群 G の hom. s. のとき、単位元 e における接代数は $\mathfrak{g} \equiv \mathcal{L}$, $\mathcal{R} \equiv 0$ より 2 項積 $X Y$ は $\mathfrak{g}$ のリー環における積 $[X, Y]$ と一致し、3 項積は $[X, Y, Z] \equiv 0$ となっている。

定理 3 測地的な $\text{hom. s. } (G, \eta)$ の原点 e における接代数 $\{\mathfrak{g}; X Y, [X, Y, Z]\}$ は山口 [12], [13], [14] の意味の general Lie triple system をなす。このとき G の標準接続の捩率テンソルを S , 曲率テンソルを R (ただし、通常の定義と反対符号とする) で表すとき、 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して $X Y = S_e(X, Y)$, $[X, Y, Z] = R_e(X, Y)Z$ が成立つ。

証明. (G, η) が測地的であるから $X, Y \in \mathfrak{g}$ で生成される A の 1 径数部分群はそれぞれ $\exp tX = (x(t), id)$, $\exp tY = (y(t), id)$ の形に表される。従って (M) から次式が成立つ。

$$\begin{aligned} ad(\exp tX) \cdot \exp sY &= (x(t), id)(y(s), id)(x(t)^{-1}, id) \\ &= (x(t)(y(s)x(-t)), L_{x(t), y(s)} L_{x(t), y(-s)x(-t)}^{-1}) \end{aligned}$$

この式から リー環 $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{k}$ において $[X, Y]$ の $\mathfrak{g}$ 成分および $\mathfrak{k}$ 成分を求めると

$$[X, Y]_{\mathfrak{g}} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \Big|_{(0,0)} \mu(x(t), \mu(y(s), x(-t))) = \mu_*(X, Y).$$

$$\begin{aligned} [X, Y]_{\mathfrak{k}} &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \Big|_{(0,0)} (L_{x(t), y(s)} L_{x(t), y(-s)x(-t)}^{-1}) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \Big|_{(0,0)} (L_{x(t), y(s)} L_{(y(-s)x(-t))^{-1}, x(-t)}) \\ &= L^*(X, Y) + L^*(Y, -X). \end{aligned}$$

故に $[X, Y]_{\mathfrak{g}} = XY$, $[X, Y, Z] = ad[X, Y]_{\mathfrak{k}} Z$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ を得る。

reductive な等質空間 A/K の標準接続(すなわち G の標準接続)の換率テンソル S および曲率テンソル R はいづれも平行場であり, 原点 e においては $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $[X, Y]_{\mathfrak{g}} = Se(X, Y)$ および $ad[X, Y]_{\mathfrak{k}} = Re(X, Y)$ で表される。([11], ただし S, R はいづれも符号が反対) 従って S と R についての関係式は上に示したことから原点においては (G, η) の接代数における関係式を導くことがわかる。特に次の等式が S, R の定義および Bianchi の第 1, 第 2 公式, Ricci の公式などから導かれる。

$$XY + YX = 0$$

$$[X, Y, Z] + [Y, X, Z] = 0$$

$$\mathfrak{S}\{[X, Y, Z] + (XY)Z\} = 0$$

$$\mathfrak{S}\{[XY, Z, U]\} = 0$$

$$[U, V, XY] = [U, V, X]Y + X[U, V, Y]$$

$$[U, V, [X, Y, Z]] = [[U, V, X], Y, Z] \\ + [X, [U, V, Y], Z] + [X, Y, [U, V, Z]],$$

$$\forall X, Y, Z, U, V \in \mathfrak{g}.$$

ただし $\mathfrak{S}$ は X, Y, Z に関する巡回和を表す。上の6公理をみたす algebra $\{\mathfrak{g}; XY, [X, Y, Z]\}$ は山口氏 ([12], [13], [14]) によって general Lie triple system とよばれている。

証了

2つの hom. s. $(G, \eta), (G', \eta')$ の原点 e, e' に対して、 e の近傍 U から e' の近傍 U' の上への微分同型写像 $f: U \rightarrow U'$ が $x, y, z, \eta(x, y, z) \in U \Rightarrow f \eta(x, y, z) = \eta'(fx, fy, fz)$ をみたすとき f を $(G, \eta), (G', \eta')$ の e から e' への 局所同型 とよぶ。

定理 4 測地的な2つの homogeneous systems $(G, \eta), (G', \eta')$ の原点 e から原点 e' への局所同型が存在するための必要十分条件は e, e' における接代数 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ が同型なことである。

証明 $f: U \rightarrow U'$ が e から e' への局所同型であるとすれば、

f は G と G' の標準接続に関する affine 局所同型となる。従ってそれらの接率 S, S' および曲率 R, R' は f によって対応する。特に原点において線型同型 $f_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ は $f_* S_e(X, Y) = S_{e'}(f_* X, f_* Y)$, $f_* R_e(X, Y)Z = R_{e'}(f_* X, f_* Y)f_* Z$, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, をみたし、定理 3 から f_* は接代数の間の同型写像を与えることがわかる。

逆に接代数の同型写像 $F: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ が与えられると F は e における接率 S および曲率 R を e' における接率 S' および曲率 R' へそれぞれ対応させる。これらのテンソル場はすべて平行場であるから e のある近傍 U から e' のある近傍 U' への局所 affine 同型 $f: U \rightarrow U'$ で、 e において $f_* \equiv F$ となるものが存在する。 γ および γ' はいづれも測地的であるから定理 2 によって 2 点 x, y (x', y') を結ぶ測地線に沿う平行移動は $\gamma(x, y)$ ($\gamma'(x', y')$) で与えられる。 $\gamma(x, y)$ および $\gamma'(x', y')$ は affine 変換であるから任意の測地線を測地線へ移す。従って U, U' を標準接続に関する適当な標準近傍に選べば、 f によって e から e' への hom. s. の局所同型が得られる。

証了

系 hom. s. (G, γ) の各点における接代数はすべて同型である。

§4. 対称 homogeneous systems

C^∞ hom. s. (G, η) の各点 x に対して G の変換 S_x を

$$S_x y := \eta(y, x, x), \quad y \in G$$

と定義する。このとき (S-1) $S_x x = x$ および (S-2)

$S_x S_x = \text{id}$ が成立つから S_x は x を不動点とする G のそれ自身への微分同型写像である。任意の点 e に対して, e

を原点とする積 $(L) \mu(x, y) = \eta(e, x, y)$ に関する x の逆元

は $x^{-1} = S_e x$ で与えられるから S_e は e における接空間上で線型変換 $(S_e)_* = -\text{id}$ をひきおこす。従って e の近傍 U

を適当に選ぶと $x \in U, S_e x = x \Rightarrow x = e$ が成立つ。故に

公理 (S-4) も成立ち次の命題が得られる。

命題5. hom. s. (G, η) において変換 $S_x, x \in G$ がすべて η の自己同型ならば G は $S_x, x \in G$ を反射積とする対称空間 (§1) である。

定義 hom. s. (G, η) が上の命題の条件をみたすとき, 対称であるという。

命題6. (G, η) が対称であるための必要十分条件は, ある原点 e における積 $xy = \mu(x, y)$ に関して

$$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}, \quad x, y \in G$$

が成立つことである。

証明 等式 $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ は $S_e \eta(e, x, y) = \eta(S_e e, S_e x, S_e y)$

と書かれる。従って η が対称ならばこの等式が成立することは明らかである。

逆にこの等式が成立するとき $\eta(x, e, y) = u$ とおくと $y = \eta(e, x, u)$ より $S_e \eta(x, e, y) = \eta(S_e x, e, S_e y)$ を得る。

$$\eta(x, y, z) = \eta(e, x) \eta(e, \eta(x, e, y), \eta(x, e, z))$$

と書き直して S_e を行くと $S_e \eta(x, y, z) = \eta(S_e x, S_e y, S_e z)$ が導かれる。任意の $a \in G$ に対して $\eta(e, a)$ は原点 e における積から原点 a における積への同型写像であるから、 S_a も η の自己同型でなければならない。

証了

定理5 測地的かつ対称な $\text{hom. s. } (G, \eta)$ を任意の原点 e に関して reductive な等質空間 A/K として表すとき、 $G = A/K$ は各点 a に関する測地線の折返しが S_a で表されるような affine 対称空間であり、 e における接代数 $\mathfrak{g}$ は trivial な 2 項積をもつ Lie triple system である。

証明 (G, η) が測地的ならば e を通る任意の測地線 $x(t)$, $x(0) = e$ に対して $S_e x(t) = x(t)^{-1} = x(-t)$ となり、 S_e は e に関する測地線の折返しである。 (G, η) が対称ならば S_e は η の自己同型、従って標準接続の affine 同型 (命題1) である。また、任意の $a \in G$ に対し

$$S_a = \eta(e, a) S_e \eta(a, e)$$

が成立つから S_a は a に関する測地線の折返しである。

一方 $(x, \alpha) \in \Gamma = G \times K_e$ に対して $\sigma(x, \alpha) := (x^{-1}, \alpha)$ で定義される写像 $\sigma: A \rightarrow A$ は $K = e \times K_e$ の各元を固定するよ
うなリー群 A の自己同型を与える。([5] Theorem 6.1 参照)
これは明らかに $G = A/K$ 上 S_e をひきおこすから、折返し S_a
 $a \in G$ で定義される affine 対称空間は対称等質空間 $(A, K; \sigma)$ と見なされる。このとき G の標準接続は $S \equiv 0$,
 $DR \equiv 0$ をみたすから接代数 $\mathfrak{g}$ は 3 項積 $[X, Y, Z] =$
 $\text{Re}(X, Y)Z$ に関して Lie triple system となる。

証了

注意 定理 5 は (G, η) が測地的であるという仮定をはずしても成立する。([5] 参照)

REFERENCES

- [1] E. Cartan, La géométrie des groupes de transformations, J. Math. pures appl., 6(1927) 1-119.
- [2] G. Glauberman, On loops of odd order I, II, J. of Alg., 1(1964) 374-396, 8(1968) 393-414.
- [3] M. Kano, H. Nagao, N. Nobusawa, On finite homogeneous symmetric sets, Osaka J. Math., 13(1976) 399-406.
- [4] M. Kikkawa, On some quasigroups of algebraic models of symmetric spaces I, II, III, Mem. Fac. Lit. Sci., Shimane Univ., Nat. Sci., 6(1973) 9-13, 7(1974) 29-35, 9(1975) 7-12.
- [5] ———, Geometry of homogeneous Lie loops, Hiroshima Math. J., 5(1975) 141-179.
- [6] ———, On the left translations of homogeneous loops, Mem. Fac. Lit. Sci., Shimane Univ., Nat. Sci., 10(1976) 19-25.
- [7] A. Lichnérovicz, Géométrie des Groupes de Transformations, Dunod 1958.
- [8] O. Loos, Spiegelungsräume und homogene symmetrische Räume, Math. Zeitschr., 99(1967) 141-170.
- [9] ———, Symmetric Spaces I, Benjamin 1969.
- [10] N. Nobusawa, On symmetric structure of a finite set, Osaka J. Math., 11(1974) 569-575.
- [11] K. Nomizu, Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer. J. Math., 76(1954) 33-65.
- [12] K. Yamaguti, On the Lie triple system and its generalization, J. Sci. Hiroshima Univ. A 21(1958) 155-160.
- [13] ———, On the theory of Malcev algebras, Kumamoto J. Sci., A 6(1963) 9-45.
- [14] ———, On cohomology groups of general Lie triple systems, Kumamoto J. Sci., A 8(1969) 135-146.