

Lobachevsky空間の discrete group について
— Vinberg の一連の論文の紹介 (I) —

東大理学部 植野義明

§ 1. Introduction

よく知られているように、ユークリッド空間 E^n における鏡映で生成された discrete group は、非負対称行列 $A = (a_{ij})$ 但し、 $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = -\cos \pi/m_{ij}$ ($i \neq j$), $m_{ij} = 2, 3, \dots, \infty$, によって特徴付けることができる。この条件を満たす行列は Coxeter [1] で完全に数え上げられている。

そこで次に、定曲率の単連結空間、すなわち、ユークリッド空間 E^n , 球面 S^n , および Lobachevsky 空間 Λ^n における鏡映で生成される群を考えるのは自然である。まず、Vinberg は次の事実に着目する：

定曲率の単連結空間 X^n はすべてベクトル空間 V^{n+1} の中に超曲面として "埋め込む", すなわち, X^n の運動がすべて V^{n+1} の中の線型変換として V^{n+1} に拡張されるという状況におくことができる。座標を適当にとると, その超曲面を記述する方

程式は

$$S^n \text{ については } x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

$$E^n \text{ については } x_0 = 1$$

$$A^n \text{ については } x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1, x_0 > 0$$

となる。この埋め込みの下では、 X^n の k 次元平面とは、 V^{n+1} の $(k+1)$ 次元部分空間と X^n との交わりに他ならず、超平面 H を境界とする X^n の半空間は自然に超平面 U を境界とする V^{n+1} の半空間に対応する。

さて、 P を X^n の凸多面体、すなわち、 X^n の有限個の半空間の共通部分とすると、 P に対応して V^{n+1} の中の多面錐 K が定まる。(対応する V^{n+1} の半空間の共通部分として定義する)。そして、凸多面体 P の面に関する鏡映で生成される X^n の discrete な運動群 Γ に対し、 Γ の作用を V^{n+1} まで延長することによって、 K の面に関する鏡映によって生成される線型群を得る。実は、この群は次に定義する“線型 Coxeter 群”になることが分る(定理 1)。かくして我々は、線型 Coxeter 群を特徴づけるものは何かと尋ねる道へ導かれる。

以下、本稿では Vinberg [6] に沿って Lobachevsky 空間における discrete reflection group の理論の解説を試みる。

§2. 線型 Coxeter 群の構造

定義 V は $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間とする。線型写像

$R: V \rightarrow V$ が reflection であるとは, $v \in V$ と $\alpha \in V^*$ であって $\alpha(v) = 2$ なるものによって, $Rv = v - \alpha(v)v$ と書かれること。

$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V^*$ に対し, 凸多面錐 K は

$$K = \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geq 0, i=1, \dots, m\} \text{ (無駄のない表示)}$$

と書かれているとする。各 α_i に対し, $\alpha_i(h_i) = 2$ を充す $h_i \in V$

をとって, R_i を $R_i v = v - \alpha_i(v)h_i$ で定義する。(凸多面錐の面に関する鏡映)

$$\Gamma = \langle R_i \mid i=1, \dots, m \rangle \subset GL(V)$$

とおく。

定義 Γ が線型 Coxeter 群であるとは, K, Γ が条件

$$\Gamma \ni \gamma \neq 1 \Rightarrow \gamma K^\circ \cap K^\circ = \emptyset$$

を充すこと, 但し $K^\circ = K$ の interior。このとき, K を Γ の基本部屋という。(Γ, K) が線型 Coxeter 群であるともいう。

さて, Γ を上述のような線型 Coxeter 群とする。 $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ の部分集合 S に対し,

$$K(S) := \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geq 0 \text{ for } i \in S\}$$

とおくと, $K(S)$ は K を含む凸多面錐である。また, K の (closed) face の全体を $\text{face } K$, それ S のうちで $(n-1)$ 次元の face を $K_1, \dots, K_m$ とする。このとき, $L \in \text{face } K$ に対し $\sigma(L) = \{i \mid K_i \supset L\}$ によって $\sigma: \text{face } K \rightarrow 2^{I_m}$ を定義する。 $\Gamma(S) = \langle R_i \mid i \in S \rangle$ と

おく。このとき、明らかに

命題 $S \in \sigma(K)$ ならば、 $\Gamma(S)$ は $K(S)$ を基本部屋とする線型 Coxeter 群である。

逆に、次の定理が成立つ (2) $\Rightarrow$ 1) の部分)

定理 1 Γ : 凸多面錐 K の面に関する鏡映 $R_1, \dots, R_m$ で生成された線型群 $\subset GL(V)$ とする。このとき、1) $\Leftrightarrow$ 2)

- 1) (Γ, K) は 線型 Coxeter 群
- 2) 隣接する 2 つの面 K_i と K_j のすべての組に対して、 $\Gamma_{ij} = \Gamma(\{i, j\})$ は $K_{ij} = K(\{i, j\})$ を基本部屋とする線型 Coxeter 群

2) $\Rightarrow$ 1) の証明は定理 2 と並行して進められる。この定理によって、とくに 2 つの生成元をもつ線型 Coxeter 群を考えることの重要性が分る。ところで、

命題 (Criterion) 2 面錐 K が、 $\Gamma = \langle R_1, R_2 \rangle$ の基本部屋である、すなわち、 (Γ, K) が線型 Coxeter 群

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{1} & \alpha_1(r_2), \alpha_2(r_1) \text{ は共に負あるいは共に } 0 \\ \textcircled{2} & \alpha_1(r_2)\alpha_2(r_1) \geq 4 \quad \text{または} \\ & = 4 \cos^2 \frac{\pi}{k} \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 2 \end{cases}$$

この命題の証明では、 Γ の作用で無駄なところは考えなくてよいので $n=2$ としてよい。すると簡単な平面幾何によって Γ の作用する様子が 3 つの type に分れることが分るので、感

じをつかむためにそれを表にして示すと：

$\alpha_1(p_2)\alpha_2(p_1)$ の値	R_1R_2	R_1R_2 の位数	$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Gamma$
$4 \cos^2 \frac{\pi}{k}$	$\frac{\pi}{k}$ の回転	k	V
4	unipotent	∞	半空間
4より大	双曲的回転	∞	2面錐

定理2 Γ は凸多面錐 K の面に関する鏡映 $R_1, \dots, R_m$ で生成

された線型Coxeter群とする。 K に含まれる点 x に対して,

$\Gamma_x := \langle R_i \mid x \in K_i \rangle$ とおく。また, $K^f = \{x \in K \mid |\Gamma_x| < \infty\}$

とおく。このとき以下が成り立つ：

- 1) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$ は凸錐
- 2) Γ は $C := (\Gamma K)^\circ$ にdiscreteに作用する
- 3) $C \cap K = K^f$
- 4) $K^f \rightarrow C/\Gamma$ (canonical) は homeo.
- 5) $K \ni x$ に対し, Γ_x は x の Γ 中のstabilizer
- 6) K_i と K_j が隣接する面であるとき, $R_i R_j$ の位数を m_{ij} ($\leq \infty$) とかけば, $R_i^2 = 1$, $(R_i R_j)^{m_{ij}} = 1$ が Γ の基本関係である。すなわち, Γ は(抽象)Coxeter群である。

定理1, 2の証明には, まず上の基本関係6)をもつ(抽象)Coxeter群 $\bar{\Gamma}$ に対して, その"universal space" U を構成する。そして, $\bar{\Gamma}$ の U への作用を調べ, 一方 U から $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$ の上への1対1の対応 ψ が存在することによって, K が Γ の基

本部屋であること (定理1) と, 準同型 $\bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ が同型であること (定理2, 6)) が分る。他の主張も ψ と ψ を調べることによつて分る。定理1, 2 の特殊な場合についてすでに Tits が同じ結果を得ているが, Vinberg の証明は Tits の証明に反して抽象 Coxeter 群に関する代数的な準備には因っていない。

§2. characteristic, Cartan 行列

線型 Coxeter 群 Γ に対して, 行列 $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \alpha_i(\bar{v}_j)$ をその Cartan 行列という。定理1 及びその直後に掲げた命題により, Γ の Cartan 行列 A は次の条件 (C1) (C2) :

$$(C1) \quad i \neq j \Rightarrow a_{ij} \leq 0 ; \quad \text{かつ} \quad a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 0$$

$$(C2) \quad a_{ii} = 2 ; \quad a_{ij}a_{ji} \geq 4 \text{ または } 4\cos^2 \pi/m_{ij} , \quad m_{ij} \in \mathbb{Z}$$

(ここで, m_{ij} は定理2, 6) における指数と同じものである。)

を充し, かつ逆に勝手な $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V^*$ に対して同様に def される行列 A が (C1) (C2) を充つならば, それらが def する多面錐の面に関する鏡映で生成される線型群は線型 Coxeter 群になることが分る。

さて, 一般に (C1) を充つ indecomposable な行列 A に対して, 非負行列論から A は実固有値をもつことが分るから, A の最小の実固有値 α の符号によつて, $\alpha > 0$ のとき A を (P) 型, $\alpha = 0$ のとき (E) 型, $\alpha < 0$ のとき (N) 型と呼ぶことにする。とくに

$\forall a_{ii}=2$ のとき, A が (Z) 型であるとは, $2I-A$ の固有値半径 $=2$ と同値である。

一般に, 行列 A に対し, A の行ベクトル $a_1, \dots, a_m$ の間の 1 次関係の全体 $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0\}$ を $L_r(A)$ とかく。(r は row の頭文字) $L_r(A)$ の中の凸錐 $L_r^+(A)$ を $L_r^+(A) = L_r(A) \cap (\mathbb{R}^+)^m$ で def する。

A が (C1) を充す行列のとき, A の (P) 型の component たちすべとの直和を A^+ , (Z) 型の component たちの直和を A^0 , (N) 型の component たちの直和を A^- , $A = A^+ + A^0 + A^-$ とする。すると明らかに, $L_r^+(A) = L_r^+(A^0)$

$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V^* - \{0\}$, $\theta_1, \dots, \theta_m \in V$ に対し, 行列 $A = (a_{ij})$ を $a_{ij} = \alpha_i(\theta_j)$ で定め, $L_r(A)$ の部分空間 L_α を $L_\alpha = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mid \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m = 0\}$ によって def する。また, $K := \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geq 0, i=1, \dots, m\}$ とおく。

$S \subset I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ に対し, $S^+, S^0, S^- \subset S$ を $A_{S^+} = (A_S)^+$, $A_{S^0} = (A_S)^0$, $A_{S^-} = (A_S)^-$ によって def する。但し $A_S = (a_{ij})_{i,j \in S}$ etc. また, $Z(S) = \{i \in I_m \mid a_{ij} = 0, \forall j \in S\}$ とかく。

命題 上の記号のもとで, A が (C1) を充すならば

$$K^\circ \neq \emptyset \iff L_\alpha \cap L_r^+(A^0) = \{0\}$$

そしてこのとき, $\forall a_{ii} > 0$ ならば, $\alpha_i \geq 0 \ i=1, \dots, m$ は K の

無駄のない表示を与える, i.e. K は m -sided cone である。

定理3 上の記号のもとで, A が (C1) を充し, $K \neq \emptyset$ とする。このとき, $S \subset I_m$ が次の2つのうち1つを充す:

$$1) \quad S^0 \cup S^- \in \sigma(\mathcal{F}K)$$

$$2) \quad S = S^0 \text{ か } Z(S)^0 = \emptyset$$

ならば, $S \in \sigma(\mathcal{F}K)$ である。

条件 1) は $S = S^+$ なら自動的に充されることに注意しておく。

さて, $V \ni \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m, V^* \ni \alpha_1, \dots, \alpha_m$ が与えられた時, これらの定める invariant として次の4つが考えられる。

$$1) \quad \text{Cartan 行列 } A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \alpha_i(\bar{r}_j)$$

$$2) \quad L_{\bar{r}} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_1 \bar{r}_1 + \dots + \lambda_m \bar{r}_m = 0\}$$

$$3) \quad L_{\alpha} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m = 0\}$$

$$4) \quad \text{"defect"} \quad d = \dim \left(\text{Ann} \langle \alpha \rangle / \bigcap_{i=1}^m \text{Ann} \langle \alpha \rangle \right)$$

$$\text{ここに, } \text{Ann} \langle \alpha \rangle = \{x \in V \mid \alpha_i(x) = 0, i=1, \dots, m\}$$

1) ~ 4) の組を, 系 $\bar{r}_j, \alpha_i$ の characteristic とする。 $L_{\alpha} \subset L_r(A)$, $L_{\bar{r}} \subset L_c(A) = \text{"A の列ベクトル } \alpha \text{ 間の線型関係の全体" (}\alpha \text{ は column の頭文字)}$ 。 $d_{\bar{r}} = \text{codim}_{L_c(A)} L_{\bar{r}}$, $d_{\alpha} = \text{codim}_{L_r(A)} L_{\alpha}$ とおく。

命題 $m \times m$ 行列 A , $L_c(A)$ の部分空間 $L_{\bar{r}}$, $L_r(A)$ の部分空間 L_{α} , $d \in \mathbb{Z}, d \geq 0$ を任意に与えた時, $\{A, L_{\bar{r}}, L_{\alpha}, d\}$ を characteristic にもつよる系 $\{\bar{r}_i \in V, \alpha_i \in V^*, i=1, \dots, m\}$ が

同型を除いて unique に存在する。しかも, $\dim V = \text{rank } A + d_{\alpha} + d_{\beta} + d$

証明には, $V = \mathbb{R}^{\text{rank } A} \oplus (L_{\alpha}(A)/L_{\alpha}) \oplus (L_{\beta}(A)/L_{\beta})^* \oplus \mathbb{R}^d$ とおけばよい。

定義 $A \sim B \Leftrightarrow \exists D$: 対角行列, 対角成分 > 0 ; $A = DBD^{-1}$

定義 $i_1, \dots, i_k$ が相異なる文字 $\in \text{Im}$ のとき, $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1}$ を A の cyclic product とする。

命題 A, B が (C1) を満たす行列ならば, $A \sim B \Leftrightarrow$ すべての cyclic product が一致する。

定理 4 $A: (C1)(C2)$ を満たす行列, $L_{\alpha} \subset L_{\alpha}(A)$, $L_{\beta} \subset L_{\beta}(A)$, $d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 0$ が任意に与えられていて, $L_{\alpha} \cap L_{\beta}^+(A^0) = 0$ をみたすとする。このとき, $\{A, L_{\alpha}, L_{\beta}, d\}$ を characteristic に基づく線型 Coxeter 群 Γ が同型 (線型群としての作用をこめた意味) を除き unique に存在する。

この定理は与えられた Coxeter 群の線型 Coxeter 群としての表現をすべて求める方法を示す。Corollary として, 任意の Coxeter 群はある線型 Coxeter 群と同型である。実際, $\text{index } \{\text{Cos } \Gamma, L_{\alpha}(\text{Cos } \Gamma), 0, 0\}$ を characteristic に持つ線型 Coxeter 群を上定理により作ればよい。但し, ここに $\text{Cos } \Gamma = (a_{ij})$, $a_{ij} = -2 \cos \pi / m_{ij}$ ($m_{ij} \neq \infty$); $a_{ij} = -2$ ($m_{ij} = \infty$)。上の構成は Coxeter により注意され, Tits が実際に線型 Coxeter

ter群であることを証明した“標準的表現”といわれるものであるが、ここにおいては、 $d = d_R = 0$ となっており表現に無駄がない。一般に $d = d_R = 0$ の時、 Γ は reduced であると言う。これは、 K が strictly convex といってもよいし、或いは $\langle \alpha \rangle = V^*$ といっても同値である。とくに、このとき $\dim V = \text{rank } A + d_\alpha$, $\dim \langle R \rangle = \text{rank } A$ となる。また、任意の線型 Coxeter 群 $\Gamma \subset GL(V)$ に対して、 Γ の作用を $V^{\text{red}} = V / \text{Ann} \langle \alpha \rangle$ へおとせば、reduced な線型 Coxeter 群 Γ^{red} を得る。

最後に、山口氏の報告中で必要な定義を追加しておく：

定義 $S \subset I_m$ が A を reduce する $\Leftrightarrow i \notin S, j \in S$ ならば,
 $a_{ij} = 0$

命題 $W \subset V$ (部分空間) が Γ -不変である
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists S \subset I_m ; S \text{ は } A \text{ を reduce する} \\ \text{A.t. } \langle R \rangle_S \subset W \subset \text{Ann} \langle \alpha \rangle_{I_m - S} \end{cases}$
 但し, $\langle R \rangle_S := \langle R_i \rangle_{i \in S}$ etc.

系 群 Γ が irreducible $\Leftrightarrow A$ が indecomposable かつ $d_R = d = 0$

尚、文献は村上氏の報告の最終頁を参照されたい。