

乱流の準正規分布理論 と長時間展開法

京大理 髙友正・木田重雄

§ 1. 序論

一般に乱流の各次の相関あるいはスペクトルを支配する方程式は無限の連鎖を形成し、この連鎖を閉じさせるためには何らかの閉鎖仮説を必要とすることは良く知られている。このような仮説の一つとして準正規分布近似、あるいは $O(4)$ 次キュムラント近似¹⁾ が提唱されて以来、この近似理論の得失がいろいろな角度から論じられてきた。²⁾ その中でも、この近似の最も致命的な欠陥といえるものは、この近似を用いてスペクトル方程式を解いた場合、Reynolds 数の小さな値を除いては、スペクトルに負のエネルギー帯が現れるというところである。このような事情のため、準正規分布理論の有効範囲は、Reynolds 数の比較的小さい値に限られるものと一般に受け取られてきた。

しかしに最近、Malfliet³⁾ が統計力学における Bogó-

Linbow の多時間展開の手法を適用することによって、準正規分布近似においてもエネルギーが保存しない結果が得られることを、Burgers 創流モデルについて示した。もし、このことがある初期値問題のみに関する偶然解の結果ではなく、物理的に根拠をもつものであるならば、準正規分布近似は、創流の一つの解析的理論としてこれを認める以上、その有効範囲を主張しうることはする。この点に関して若干の考察を試みるのが本論文の目的である。

本論文では、まず (2.1), Burgers 創流モデルについて、多時間展開の意味と他の近似と比較しつつ検討し、ついで (2.3), 3次元の Navier-Stokes 創流について、その展開によるスペクトルの漸近形を予測し、最後に (2.4), Reynolds 数無限大の極限におけるスペクトルの漸近形を求め、それとの比較のもとに多時間展開の有効性を調べてみたいと思う。

2. Burgers 創流

1次元創流の Fourier 分解の波数 k , 創流のエネルギー・スペクトルを $E(k, t)$, ただし t は時間, とすると、準正規分布近似によるスペクトル方程式は、つぎのようになる⁴⁾：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) E(k, t) = k \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(k, k', k''; t) dk'', \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \nu(k^2 + k'^2 + k''^2) \right\} \mathcal{I}(k, k', k''; t) \\ &= k E(k', t) E(k'', t) + k' E(k'', t) E(k, t) \\ & \quad + k'' E(k, t) E(k', t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{ただし, } k + k' + k'' = 0.$$

連立方程式 (1), (2) を初期条件

$$E(k, 0) = E_0(k), \quad \mathcal{I}(k, k', k''; 0) = 0 \quad (3)$$

のもとに数値的に解くことは Jeng⁵⁾ によって試みられ、その際、初期条件 $E_0(k) = A e^{-\alpha k^2}$ (A, α は定数) に對しては、負のエネルギー帯が現れることが示された。また後に、打ち切りの改訂を上げ、0-5 次元ユウエト打ち切りを行つても、 $k \approx 0$ 近傍でのスペクトルの振舞いは改善されるものの、負エネルギー帯を回避できないことが Kawahara⁶⁾ によって示された。

一方、以上の近似理論とは別に、乱れの場合の Wiener 展開を用いた打ち切り近似が、Meehan および Siegel⁷⁾ によって試みられたが、この近似のもとでは、(2) 式の右辺に右辺式

$$\begin{aligned} \Pi(k, k', k''; t) = & k E(k', t) E(k'', t) \\ & + k' E(k'', t) E(k, t) + k'' E(k, t) E(k', t) \end{aligned} \quad (4)$$

が導かれている。 (4) 式を方程式 (1) と連立させて解いた場合には、負エネルギーの発散は起らず、またスペクトルの漸近形は、

$$k \rightarrow \infty \text{ のとき, } E(k, t) \propto k^{-2} \quad (5)$$

となることが示される。

この結果は、後に示すように、Burgers 乱流の Reynolds 数無限大における漸近挙動を正しく反映しており、好ましい結果であると言える。ところが、ここから一つ問題が起って、それは (4) 式は Wiener 展開の打ち切り近似の必然的な帰結ではなく、その帰結は正しくは (2) 式と全く同じものであるべきではないといふことである。このことは厚論文¹⁾を点検すれば明らかである。言い換えるならば、(4) 式は Wiener 展開とは関係なく、全く別の一つの近似として提案されて然るべきもののなのである。しかし、(4) 式はそれ自体合理的根拠を乏しくおぼれず、また検証時には正しい形をしていない。このため、結果がたとえ優れているからといって、(4) 式を直ちに一つの近似として採用することは躊躇せよ。

ところが、ここより後に Malfliet³⁾ は連立方程式 (1),

(2) ε , 多くの時間的尺度を導入して解くことにすると, 負エネルギー帯が発生しないような結果を得た。この節節はあらまし次のようである。まず, 変換

$$\left. \begin{aligned} F(k, t) &= E(k, t) e^{2\nu k^2 t}, \\ D(k, k', k''; t) &= \mathcal{D}(k, k', k''; t) e^{\nu(k^2 + k'^2 + k''^2)t} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を行う。新しい従属変数に於て方程式 (1), (2) はそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial t} F(k, t) = k \int_{-\infty}^{\infty} D(k, k', k''; t) e^{2\nu k' k'' t} dk' \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D(k, k', k''; t) &= k F(k', t) F(k'', t) e^{2\nu k' k'' t} \\ &+ k' F(k'', t) F(k, t) e^{2\nu k'' k t} + k'' F(k, t) F(k', t) e^{2\nu k k t} \end{aligned} \quad (8)$$

と書ける。

多時間展開は, F, D をそれぞれ 1 つの時間 t の関数とみず代りに, 多くの時間 $t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \dots$ (ε は小パラメータ) の関数と考へて, 方程式の ε について同じべきを等置して解き, 最後 $\varepsilon = 1$ とおく手法であるが, この ε の近似においては, 案作つたのよ様な近似操作と同等である。

まず, (7) 式の右辺を無視して,

$$\frac{\partial}{\partial t} F(k, t) = 0.$$

この解 $F = F(k)$ を (7) 式の右辺に代入して, (7) 式を積分すると,

$$\begin{aligned} U(k, k', k''; t) = & \frac{1}{2v} \left\{ \frac{k}{k'k''} F(k') F(k'') e^{2vk'k''t} \right. \\ & \left. + \frac{k'}{k''k} F(k'') F(k) e^{2vk''kt} + \frac{k''}{kk'} F(k) F(k') e^{2vkk't} \right\}. \end{aligned}$$

これを (7) 式の右辺に代入し, しばらく後に F の時間依存性を回復させて, (6) 式を用いて $F(k, t)$ を $E(k, t)$ に戻すと, 方程式,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2vk^2 \right) E(k, t) = & \frac{k}{2v} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{k}{k'k''} E(k', t) E(k'', t) \right. \\ & \left. + \frac{k'}{k''k} E(k'', t) E(k, t) + \frac{k''}{kk'} E(k, t) E(k', t) \right\} dk' \quad (9) \end{aligned}$$

を得る. この方程式は元の連立方程式 (1), (2) とは違っており, $E(k, t)$ に對する 1 階方程式であるため, 初期条件は $E_0(k)$ だけを決めなければならない. Malfliet は $E_0(k) = k^2 e^{-\alpha k^2}$ とおいて (9) 式を数値積分したが, 結果のスペクトルには高エネルギー帯は発生しなかった. $k \rightarrow \infty$ に対する漸近形としては, (5) 式の右辺の一定のべきの値は定まらないことがわかった.

$$k \rightarrow \infty \text{ のとき, } E(k, t) \propto k^{-1} \sim k^{-3} \quad (10)$$

の向を連続的に変化する」という結果を得ている。この結果は、
(4) 式とは違って物理的意味をもつ仮設が正定符号のスペクトルを導いたという点で、興味ある触れあひの結果であると言えよう。

§ 3. 3次元乱流

§ 2 で Burgers 乱流の場合に用いた多時間展開の手法を、Navier-Stokes 方程式に従う 3 次元乱流に適用してみよう。どうなるであろうか。

準正規分布理論によるスペクトル方程式は、代表時間消数 k_0 、初期平均二乗速度 $u_0^2 = \langle |u|^2 \rangle_{t=0}$ を用いて無次元化した表数、

$$\left. \begin{aligned} \text{消数: } s &= k/k_0, \quad \text{時間: } \tau = \nu k_0^2 t, \\ \text{Reynolds 数: } R &= u_0 / \nu k_0, \\ \text{スペクトル関数:} \\ \phi(s, \tau) &= (8\pi k_0 / u_0^2) \Phi(k, t) \\ &= (2k_0^3 / u_0^2 k^2) E(k, t) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

を用いて、つぎの式に表わすこと:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + 2s^2 \right) \phi(s, \tau) = \frac{R}{2} \int_0^\infty ds' \int_{-1}^1 \Psi(s, s', s'': \tau) \cdot \mathcal{A}(s, s', s'') \cdot s s'^3 d\mu. \quad (12)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} + (s^2 + s'^2 + s''^2) \right\} \psi(s, s', s''; \tau) \\ = R \{ \phi(s', \tau) - \phi(s, \tau) \} \phi(s'', \tau) \quad (13)$$

ただし, $s''^2 = s^2 + s'^2 + 2\mu ss'$,

$$\textcircled{H}(s, s', s'') = \left(\frac{ss'}{s''^2} + \mu \right) (1 - \mu^2).$$

連立方程式 (12), (13) を初期条件,

$$\phi(s, 0) = \phi_0(s), \quad \psi(s, s', s''; 0) = 0 \quad (14)$$

のもとに繰返時に解くことは Ogura²⁾ によって実行され、
負エネルギー帯をという結果が得られたことは既に述べた。

そこで、§2におけると同様の多時相展開の手法を (12),
(13) 式に施してみたら、どのような結果が得られるであろうか。

まず、(6) 式と同様の変換、

$$F(s, \tau) = \phi(s, \tau) e^{2s^2\tau}, \\ D(s, s', s''; \tau) = \psi(s, s', s''; \tau) e^{(s^2 + s'^2 + s''^2)\tau} \quad (15)$$

を行えば、方程式 (12), (13) は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F(s, \tau) = \frac{R}{2} \int_0^\infty s s'^3 ds' \int_{-1}^1 D(s, s', s'', \tau) \cdot e^{(s^2 - s'^2 - s''^2)\tau} \textcircled{H}(s, s', s'') d\mu \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U(s, s', s''; \tau) = R \left\{ F(s', \tau) e^{(s^2 - s'^2 - s''^2)\tau} - F(s, \tau) e^{(s'^2 - s^2 - s''^2)\tau} \right\} F(s'', \tau) \quad (17)$$

と書ける.

昇降関係の近似は、つぎのよう近似操作と同等である.

(16) 式の右辺を再現して,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F(s, \tau) = 0.$$

この解を (17) 式の右辺に代入して, (17) 式を整理すると,

$$U(s, s', s''; \tau) = R \left\{ F(s', \tau) \frac{e^{(s^2 - s'^2 - s''^2)\tau}}{s^2 - s'^2 - s''^2} - F(s, \tau) \frac{e^{(s'^2 - s^2 - s''^2)\tau}}{s'^2 - s^2 - s''^2} \right\} F(s'', \tau).$$

これを (16) 式の右辺に代入して, F の τ 依存性を回復し,

(15) にあてて $F(s, \tau)$ と $\phi(s, \tau)$ に戻すと, 方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + 2s^2 \right) \phi(s, \tau) = \frac{R^2}{2} \int_0^\infty s s'^3 ds' \cdot \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\phi(s', \tau)}{s^2 - s'^2 - s''^2} - \frac{\phi(s, \tau)}{s'^2 - s^2 - s''^2} \right\} \phi(s'', \tau) \cdot (H)(s, s', s'') d\mu. \quad (18)$$

を得る.

方程式 (18) はスベクトル $\phi(s, \tau)$ に関する 1 階方程式だから, (9) 式と同様, 初期スベクトル $\phi_0(s)$ だけを与えれば解くことが出来る. そのまゝの数値計算は是非試す価値があるまゝに思われるから, 二つはそれぞれ, (18) 式の解の定常時挙動を調べる一つの試みとして, $R \rightarrow \infty$ における解の漸近形を求めてみよう.

$R \rightarrow \infty$ の極限では, (18) 式は, $\text{右辺} = 0$ という方程式に帰着する. 二つで, 解をべき関数,

$$\phi(s, \tau) = A s^{-\ell}$$

の形に仮定すれば, 方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} R^2 A^2 s \int_0^\infty s'^3 ds' \int_{-1}^1 \left(\frac{s'^{-\ell}}{s^2 - s'^2 - s''^2} - \frac{s^{-\ell}}{s'^2 - s^2 - s''^2} \right) \cdot \textcircled{A} \cdot d\mu \\ &= \frac{1}{2} R^2 A^2 s^{3-2\ell} \int_0^1 \theta^{2-\ell/2} (1 - \theta^{2\ell-6}) d\theta \cdot \\ &\quad \cdot \int_{-1}^1 \left(\frac{\theta^{-\ell}}{1 - \theta^2 - \theta'^2} - \frac{1}{\theta^2 - 1 - \theta'^2} \right) \left(\frac{\theta'^2}{\theta} \right)^{-\frac{\ell}{2}} \cdot \textcircled{A} \cdot d\mu, \end{aligned}$$

ただし, $\theta'^2 = 1 + \theta^2 + 2\mu\theta,$

となる. この方程式の 1 つの解は明らか, $\ell = 3$ だけ知られる. したがって,

$$\phi(s, \tau) = A s^{-3},$$

すなわち,

$$E(k, t) \sim k^{-1} \quad (19)$$

が、 $R \rightarrow \infty$ の極限における (18) 式の漸近解を与える。

§ 4. $R \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$ の極限におけるスペクトルの漸近形

準正規分布近似は元来、 R の小さい値に対する近似の性格をもっており、それが長時間発展の手法を適用するこゝとによつて、 R の大きい値に対する連続的な結果を与えるこゝとが出来るといつても、その結果が果して R の大きい値に対する“正しい”結果になっているかどうかは吟味を要する問題である。

一方、 $R \rightarrow \infty$ の極限における乱流の場合は、空間的に狭い領域を占める特異面や特異線と、それ以外の滑かな変化を占める領域とに断絶を齎すこととは、良く知られた事実である。非圧縮粘性流体においては、前者は渦層、渦糸であり、後者は渦糸（ポテンシャル）領域である。エネルギー・スペクトルは、低波数領域ではこれらの特異面・線の間隔や強度の分布によつて異なり、高波数領域では特異性の種類のみには依り、その種類を指定することによつて決つてしまう。

Burgers 乱流。又或る、あるいは Navier-Stokes 乱流の 3つの場合につき、 $R \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$ に対するスペクトルの漸近形を、途中の計算を抜きにして、結

果だけ別挙おればつぎのまうに与る.

4.1 Burgers流

乱れの場合: 不規則な強さと同隔をもつ渦面 (あるいは渦
環流) の集団であると考えると, スペクトルは,

$$k \rightarrow \infty \text{ で, } E(k) \propto k^{-2}. \quad (20)$$

この結果は, (5) とは完全に一致し, (10) とはよく一致す
る。 (10) の結果はしかし, 数値計算から導かれた
もので, Reynolds 数の値によりまだまだ変り可能性があ
るものと考へられる。 Mal'pict の計算よりさらに大ま
か R の値に対して計算を行うことにより, (20) とよく一
致するよう結果が得られることを期待したい。

4.2 2次元乱流

この場合, 乱れの特性性としては渦面と渦糸との2通りが
考へられ, 一般に有限の Reynolds 数の場合は両者は混
在しているものと考へられる。 しかし, ここでは簡単のため
に, 乱れの場合は両者のどちらか一方の種類だけから構成され
ている場合を考へる。

乱流を不規則な強さ, 方向, 同隔をもつ渦面の集団と見な
すとき, スペクトルは,

$$k \rightarrow \infty \text{ で, } E(k) \propto k^{-2}. \quad (21)$$

また, 乱流を同様な渦糸の集団と見なすとき,

$$k \rightarrow \infty \text{ で, } E(k) \sim k^{-1}. \quad (22)$$

これらの結果と比較すべき基準理論による計算結果は、残念ながらまだ得られていない。

4.3 三次元流

4.2 と同様、この場合にも特異性は渦面と渦糸の2通りがある。

乱れの場合を不規則な強さ、方向、渦渦をもつ渦面の集団と考えるとき、スペクトルは、

$$k \rightarrow \infty \text{ で, } E(k) \sim k^{-2}. \quad (23)$$

また、乱れを同様な渦糸の集団と見なすとき、

$$k \rightarrow \infty \text{ で, } E(k) \sim k^{-1}. \quad (24)$$

さきの(19)の結果はまさに(24)と一致しており、乱れの場合の渦糸集団としての極限に訴えている。極限の Reynolds 数においては、乱れの場合は渦面と渦糸という2種の特異性の混合を考慮するのが自然であろうか (Saffman²⁾ 参照)、 $R \rightarrow \infty$ の極限では、渦面の不安定性と渦糸の安定性から見て、乱れの場合は渦糸だけから構成されていると考えられる。もしこの推測が正しいならば、準正規分布・零時間展開による近似理論は $R \rightarrow \infty$ の極限においても“正しい”結果を与えるということになり、理論の構築に期待を抱かせるに足る。しかし、そのことを確かめるには、まだまだ多くの解析的・数

値的考察が必要であるように思われる。

引用文献

- 1) I. Proudman and W. H. Reid: Trans. Roy. Soc. A 247, 163 (1954).
T. Tatsumi: Proc. Roy. Soc. A 239 16 (1957).
- 2) Y. Ogura: J. Fluid Mech. 16, 33 (1963).
P. G. Saffman: Topics in Nonlinear Physics, ed. N. J. Zabusky, (Springer Verlag) 485 (1968).
- 3) W. P. M. Malfliet: Physica 42, 257 (1969).
- 4) W. H. Reid: Appl. Sci. Res. A 6, 86 (1956).
- 5) D. T. Jeng, K. Förster, S. Haaland and W. C. Meecham: Phys. Fluids, 9, 2114 (1966).
- 6) T. Kawahara: J. Phys. Soc. Japan, 25, 892 (1968).
- 7) W. C. Meecham and A. Siegel: Phys. Fluids, 7, 1178 (1964).
- 8) T. Tatsumi: Rev. Mod. Phys. 32, 807 (1960).