

Asymptotic inclusion と Longo-Rehren の構成について

増田俊彦 (Toshihiko Masuda)
(東大数理)

1 序

Subfactor 理論における最近の話題の一つとして, asymptotic inclusion と呼ばれる物の研究が盛んに行われている. これは, Ocneanu によって考え出された物であるが, 与えられた subfactor から新しい subfactor を作るやり方であり, これは量子群における quantum double の subfactor 版とも思え, topological invariant との関係からも研究されている.

一方[LR]で Longo と Rehren は 全く別の方法で subfactor から新しい subfactor を作るやり方を考えた. さらに彼らは,

- (1) 彼らの方法で asymptotic inclusion が全て作られる事を予想し,
- (2) また asymptotic inclusion とならない様な例がある.

という事の 2 点を[LR]の中で言っている. しかし (1) については彼らは証明はできなかった. また (2) についても彼らは元の subfactor が既約な時しか考えておらず, 実際, 後で述べるように既約でない場合も含めると, 彼らの反例も asymptotic inclusion として得られる事がわかる.

今回の話の目的は, asymptotic inclusion と Longo-Rehren の構成法を比較して, 元の subfactor が既約でない時も含めて, この 2 つが同型な subfactor を与える事を示す事である.

2 Longo-Rehren の構成について

Longo-Rehren 流の構成で基本になるのは次の定理である. この定理はちょうど III 型 subfactor での Longo の canonical endomorphism の特徴付けに相当するものである.

定理 1 ([L, Theorem 5.1], [M, Theorem 2.3]) N を II_1 factor, ${}_N X_N$ を index 有限な N - N bimodule とする. 次の様な coisometric な intertwiner があると仮定する.

$$S(T^* \otimes 1) = S(1 \otimes T^*) = \lambda^{-1/2}, \quad \lambda > 0,$$

$$S(S \otimes 1) = S(1 \otimes S),$$

$$S^* S = (S \otimes 1)(1 \otimes S^*).$$

さらに $\dim \text{Hom}({}_N X_X, {}_N N_N) = 1$, $\dim {}_N X = \dim X_N$ も成り立つとする.

この時 N を含む II_1 factor M で ${}_N M_N \cong {}_N X_N$, $[M : N] = \lambda$ となる物が存在する.

上の定理で M を構成するには, $M_1 := \text{End}({}_A X)^{\text{opp}}$ とおき, $x \in M_1$ に対して $E(x) := S(1 \otimes x)S^*$ と定義して, $M := E(M_1)$ とすれば, これが求める物である. この作り方からわかるように, 実際に M を作るのには T の方はあまり関係なく, 重要なのは S という intertwiner である.

上の結果を使って, Longo-Rehren type の構成を行う. Longo-Rehren の構成は canonical endomorphism の特徴付けを使って行われたが, II_1 型 subfactor の場合でも定理 1 を使えば同様にできる.

$N \subset M$ を index 有限, depth 有限な II_1 型の subfactor とする. Δ という集合を以下のように定める.

$$\Delta := \{ {}_M Z_{iM} \mid \text{既約}, {}_M Z_{iM} \prec \underbrace{{}_M M \otimes_N M \otimes_M \cdots \otimes_N M_M}_{2n}, n \text{ はある自然数} \}$$

とする. ${}_M Z_{0M} := {}_M M_M$ とおく. ${}_M Z_{iM}$ に対して自然に $M^{\text{opp}}\text{-}M^{\text{opp}}$ bimodule ${}_{M^{\text{opp}}} Z_{iM^{\text{opp}}}^{\circ}$ が定まる. そこで $A := M \otimes M^{\text{opp}}$, ${}_A B_{i,iA} := {}_A (Z_i \otimes Z_i^{\circ})_A$ と定義し, ($\otimes$ は通常の Hilbert 空間のテンソル積である) ${}_A X_A := \bigoplus_i {}_A B_{i,iA}$ という A - A bimodule を考える. このとき [LR, Proposition 4.10] と同様の論法で次がわかる.

定理 2 A を含む II_1 factor B で, ${}_A B_A \cong {}_A X_A$ となる物が存在する.

これを示すには, 定理 1 の条件を満たす intertwiner を実際に構成すればよい. そのために $\{V_{ijk}^e\}_{e=1}^{N_{ij}^k}$ を $\text{Hom}({}_M Z_i \otimes_M Z_{jM}, {}_M Z_{kM})$ の正規直交基底として,

$$\tilde{V}_{ijk} := \sqrt{\frac{d(i)d(j)}{d(k)}} \sum_e V_{ijk}^e \otimes J(V_{ijk}^e)$$

とおく. ここで $N_{ij}^k := \dim \text{Hom}({}_M Z_i \otimes_M Z_{jM}, {}_M Z_{kM})$, すなわち既約分解に現れてくる ${}_M Z_{kM}$ の個数であり, $d(i)$ は ${}_M Z_{iM}$ の index の平方根, J は $\text{Hom}({}_M Z_i \otimes_M Z_{jM}, {}_M Z_{kM})$ と $\text{Hom}({}_{M^{\text{opp}}} Z_i^{\circ} \otimes_{M^{\text{opp}}} Z_{jM^{\text{opp}}}^{\circ}, {}_{M^{\text{opp}}} Z_{kM^{\text{opp}}}^{\circ})$ の間の自然な conjugate linear map である.

すると $\tilde{V}_{ijk} \in \text{Hom}({}_A B_{i,i} \otimes_A B_{j,jA}, {}_A B_{k,kA})$ である. ここで $T_i \in \text{Hom}({}_A X_A, {}_A B_{i,iA})$, coisometry を取ってきて,

$$S := \lambda^{-1/2} \sum_{i,j,k} T_k^* \tilde{V}_{ijk} (T_i \otimes 1) (1 \otimes T_j)$$

とおけば, T_0 と S が定理 1 の条件を満たす intertwiner となる事が [LR, Proposition 4.10] の証明と同様の方法で示される. 但し, $\lambda := \sum_i d(i)^2$ である.

3 Asymptotic inclusion との関係

次の定理が今回の話の主要定理である.

定理 3 ([M, Theorem 3.4]) $N \subset M$ を index 有限, depth 有限な AFD II_1 subfactor とする. この時, 定理 2 で構成した subfactor と asymptotic inclusion は同型である.

序でも述べたように [LR] で, Longo と Rehren は, 彼らの方法で asymptotic inclusion が全て作られる事を予想し, また asymptotic inclusion とならない様な例があるという事を主張したが, 彼らは元の subfactor が既約な時しか考えていなかった. しかし asymptotic inclusion や Longo-Rehren の構成を考えるにあたっては, 元の subfactor の既約性は全く仮定する必要はないのである. よって既約でない場合を含めれば, 彼らの反例も実際に asymptotic inclusion を与え, これは Longo-Rehren の予想への肯定的解答となる.

これを証明するには, [O], [EK] における bimodule の graphic expression を使う. つまり $A \subset B$ を定理 2 で構成した物, $A \subset M_\infty$ を asymptotic inclusion とした時, bimodule としての同型 ${}_A B_A \cong {}_A M_{\infty A}$ は明らかであるが, asymptotic inclusion から決まる定理 1 の条件を満たすような $\tilde{S} \in \text{Hom}({}_A M_\infty \otimes_A M_{\infty A}, {}_A M_{\infty A})$ が上の同型で移りあう事を示せばよいのだが, $\tilde{S}$ を具体的に graphic expression で書き表す事により証明をする.

まず, $\tilde{S} \in \text{Hom}({}_A M_\infty \otimes_A M_{\infty A}, {}_A M_{\infty A})$ についてだが, これは $\langle M_\infty, e_A \rangle$ から M_∞ への conditional expectation からきているので,

$$S : x \otimes_A y \rightarrow \lambda^{-1/2} xy$$

とあらわされる. ここで λ は global index である.

そこで, 上の対応を図形で表わすと図 1 の様になる.

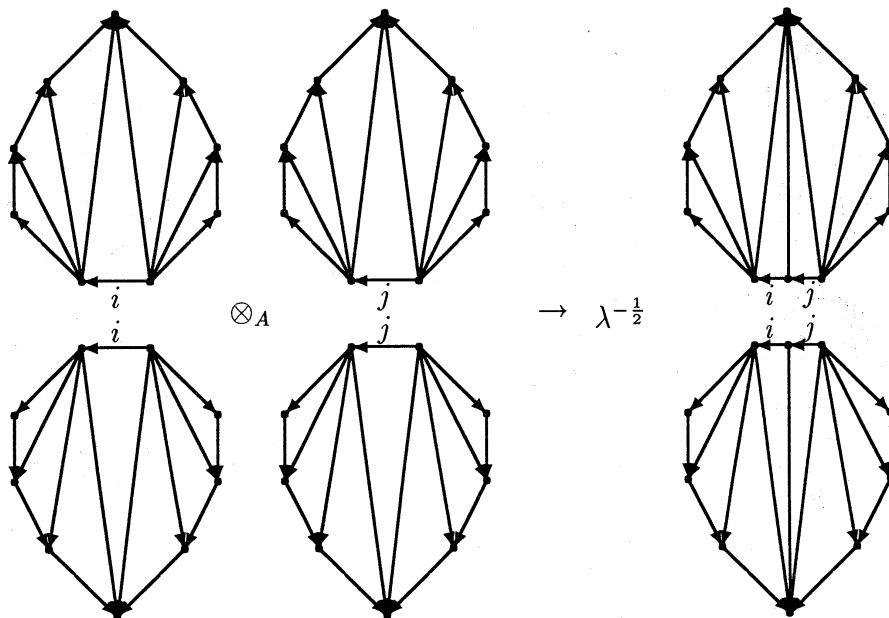


図 1

ここで, 図 1 の右辺の図については, 図 2 の様な式が成り立つ.

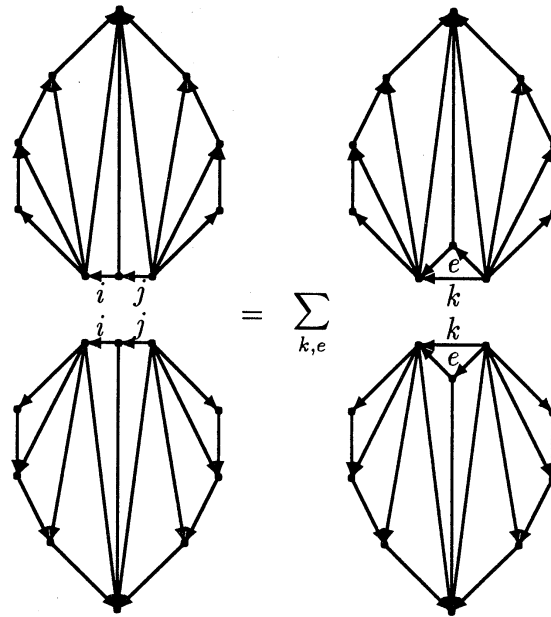


図 2

これらの図と, $\tilde{V}_{ijk}$ の式を比べてみると係数を除いては, 形が似ている. 図の下側が大体 V_{ijk}^e を表し, 上側が $J(V_{ijk}^e)$ を表しているのだが, きちんと計算をしてみると片側は, 本来に coisometry となっているのだが, もう片方は, coisometry となっておらず, $\sqrt{\frac{d(k)}{d(i)d(j)}}$ 倍する事によって coisometry となる事が分かる. 図で書くと図 3 の様になる.

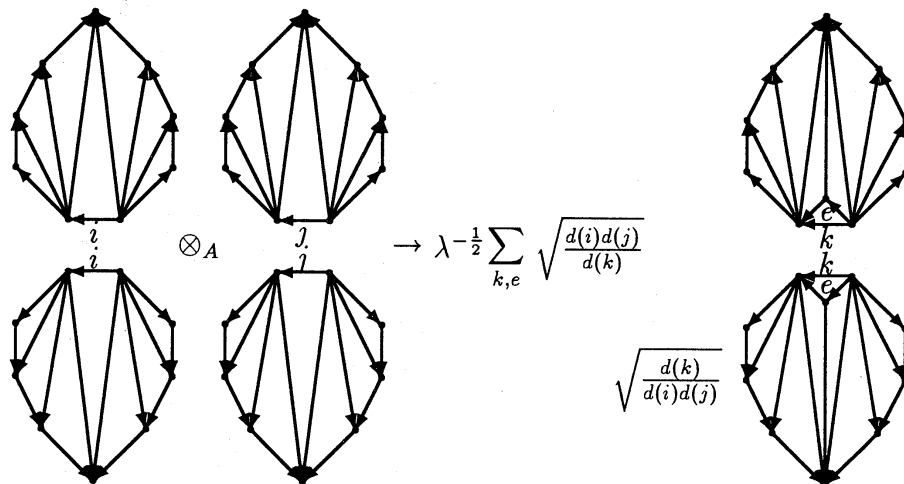


図 3

ここで係数 $\sqrt{\frac{d(k)}{d(i)d(j)}}$ が現れる理由を簡単に述べておく.

$\text{Hom}({}_M Z_i \otimes_M Z_{jM}, {}_M Z_{kM})$ の元 T, T' について, 通常内積は

$$\langle T, T' \rangle = TT'^*$$

として入れるが、もう一つ内積を入れるやり方があるのである。それは $\text{End}({}_M Z_i \otimes_M Z_{jM})$ 上に自然に定まる trace tr を用いて

$$\langle T, T' \rangle' = tr(T'^* T)$$

とするやり方である。この時 2 つの内積には

$$tr(T'^* T) = \frac{d(k)}{d(i)d(j)} T T'^*$$

という関係がある。この違いが、図 3 で係数の調整が必要な原因となるのである。

図 3 で、上側と下側が coisometry となっており、それぞれ $V_{ijk}^e, J(V_{ijk}^e)$ に対応していて、これは $\tilde{V}_{ijk}$ の式と同じである。よって $S, \tilde{S}$ が同じ形をもち、これによって Longo-Rehren の構成が asymptotic inclusion と同型な subfactor を与える事が分かる。□

参考文献

- [EK] Evans, D. E., and Kawahigashi, Y., *On Ocneanu's theory of asymptotic inclusions for subfactors, topological quantum field theories and quantum doubles*, Internat. J. Math. 6 (1995), 205–228.
- [L] Longo, R., *Duality for Hopf algebras and for subfactors*, Comm. Math. Phys. 159 (1994), 133–150.
- [LR] Longo, R., and Rehren, K.-H., *Nets for subfactors*, Rev. Math. Phys. 7 (1995), 567–597.
- [M] Masuda, T., *An analogue of Longo's canonical endomorphism for bimodule theory and its application to asymptotic inclusions*, to appear in Internat. J. Math.
- [O] Ocneanu, A. Seminar talk at University of California, Berkeley, June 1993.
- [Y] Yamagami, S., *A note on Ocneanu's approach to Jones index theory*, Internat. J. Math. 4 (1993), 859–871.