

Oscillator 群の Paley-Wiener 型定理

京大 理 野村隆昭

H を 3次元の Heisenberg 群, $\mathfrak{f}$ を H の Lie algebra とし,
 $\{P, Q, E\}$ を $\mathfrak{f}$ の basis で $[P, Q] = E$ なるものとする.
 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対し, $h(x, y, z) = xP + yQ + zE$
 とおく. 以下では, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおいて, $h(x, y, z)$ を
 $h(u, z)$ と書くこともある. 今, 指数写像 $\exp$ で H と $\mathfrak{f}$ の
 underlying manifold を同一視すると, H の群演算は

$$h(x, y, z)h(x', y', z') = h(x + x', y + y', z + z' + (xy' - x'y)/2)$$

となる. $Z(H)$ で H の中心を表すことにすると

$$Z(H) = \{h(0, 0, z) ; z \in \mathbb{R}\}$$

である. $0 \neq \forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$$\pi_\lambda(h)f(t) = [\exp -i\lambda(z + tx - \frac{xy}{2})] f(-y + t) \quad (f \in L^2(\mathbb{R}))$$

$$h = h(x, y, z)$$

とおくと, $\{\pi_\lambda, L^2(\mathbb{R})\}$ は H の既約ユニタリ表現で, $Z(H)$
 に制限したとき, $h(0, 0, z) \mapsto e^{-i\lambda z} \cdot \text{Id}$ となる unique
 な (up to unitary equivalence) ものである.

$$K = SO(2) = \left\{ k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} ; 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

は, H に $\text{Aut } H$ の元として, $k \cdot h(u, z) = h(k \cdot u, z)$ で作用する. この作用を使って, 半直積 $G = H \rtimes K$ を作る.

今, $\forall k \in K$ に対して, $\pi_\lambda^k(h) = \pi_\lambda(k^{-1} \cdot h)$ とおくと, π_λ と π_λ^k はユニタリ同値である. 従って

$$W(k, \lambda)^{-1} \pi_\lambda(h) W(k, \lambda) = \pi_\lambda^k(h)$$

をみたす $L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリ作用素 $W(k, \lambda)$ が存在する.

この $W(k, \lambda)$ は次の様にして求めることができる.

通常の Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を定義域とする常微分作用素

$$\Delta_0 = -(d/dt)^2 + t^2 - 1$$

を考える. Δ_0 は $L^2(\mathbb{R})$ で本質的自己共役であり, その閉包を Δ とすると, Δ は自己共役. そして, $W_1(\theta) = \exp(i\frac{\theta}{2} \Delta)$ とおくと,

$$W_1(\theta) \pi_1(u, z) W_1(\theta)^{-1} = \pi_1(k(\theta) \cdot u, z)$$

となる. $L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素 $S(r)$ ($r > 0$), σ を

$$S(r)f(t) = r^{-1/4} f(r^{-1/2}t), \quad \sigma f(t) = \overline{f(t)}$$

を定義し,

$$W(\theta, \lambda) = \begin{cases} S(\lambda)^{-1} W_1(\theta) S(\lambda) & (\lambda > 0) \\ \sigma S(|\lambda|)^{-1} W_1(\theta) S(|\lambda|) \sigma & (\lambda < 0) \end{cases}$$

とおくと

$$W(\theta, \lambda) \pi_\lambda(u, z) W(\theta, \lambda)^{-1} = \pi_\lambda(k(\theta) \cdot u, z)$$

そこで,

$$U(g; \ell, \lambda) = e^{-i\ell\theta} \pi_\lambda(h) W(\theta, \lambda) \quad (g = hk(\theta))$$

$$(\ell \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\})$$

とおくと, $\{U(\cdot; \ell, \lambda), L^2(\mathbb{R})\}$ は G の既約ユニタリ表現

で, $U(\cdot; \ell, \lambda)$ の H への制限は π_λ である.

ϕ_n を n -th Hermite 函数

$$\phi_n(t) = \frac{(-1)^n}{(2^n \cdot n! \cdot \pi^{1/2})^{1/2}} e^{t^2/2} (d/dt)^n e^{-t^2} \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

とすると, $\{\phi_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の CONS をなす. 上

で定義した $S(r)$ を使って, $\phi_n^\lambda = S(|\lambda|)^{-1} \phi_n$ とおく. 各

$\lambda \neq 0$ に対して, $S(|\lambda|)$ はユニタリであるから, $\{\phi_n^\lambda;$

$n \in \mathbb{Z}_+\}$ も $L^2(\mathbb{R})$ の CONS である. 行列要素

$$u_{mn}(g; \ell, \lambda) = (U(g; \ell, \lambda) \phi_n^\lambda, \phi_m^\lambda)$$

は次の様に書ける. $L_n^\alpha(x)$ を Laguerre の多項式

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} (d/dx)^n (e^{-x} x^{n+\alpha})$$

とし

$$L_n^\alpha(x) = \left[\frac{n!}{\Gamma(n+1+\alpha)} \right]^{1/2} e^{-x/2} x^{\alpha/2} L_n^\alpha(x)$$

とおくと

$$u_{mn}(g; \ell, \lambda) =$$

$$= (-1)^{\varepsilon(n,m)} e^{i(n \operatorname{sgn} \lambda - \ell)\theta} e^{i(n-m)\phi} e^{-i\lambda z} L_{\operatorname{Min}(m,n)}^{|m-n|}(|\lambda| r^2/2)$$

$$\left(\begin{array}{l} g = h(x, y, z)k(\theta), \quad y + ix = re^{i\phi} \\ \varepsilon(n, m) = \frac{n - m + |n - m|}{2} \end{array} \right)$$

各 $\rho > 0$ と $\alpha \geq 0$ に対して

$$L_{n,\rho}^{\alpha}(x) = (\rho/2)^{1/2} L_n^{\alpha}(\rho x/2) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

とおく. $\{L_{n,\rho}^{\alpha}; n \in \mathbb{Z}_+\}$ は $L^2(0, \infty)$ において CONS
となる. $f \in L^2(0, \infty)$ に対して, $\{L_{n,\rho}^{\alpha}; n \in \mathbb{Z}_+\}$ に関す
るその Fourier 係数を $\{a_n^{\alpha}(f; \rho); n \in \mathbb{Z}_+\}$ とおく. す
なわち

$$a_n^{\alpha}(f; \rho) = \int_0^{\infty} f(t) L_{n,\rho}^{\alpha}(t) dt$$

対応 $f \mapsto \{a_n^{\alpha}(f; \rho); n \in \mathbb{Z}_+\}$ を Fourier-Laguerre
変換と呼ぶことにする. 各 $T > 0$ に対して

$$L_T^2(0, \infty) = \{f \in L^2(0, \infty); f(t) = 0 \text{ a.e. } t > T\}$$

とおき, $\ell_T^2(\rho; \alpha)$ ($\rho > 0, \alpha \geq 0$) を, 次の条件をみたす,
 $\mathbb{Z}_+$ で定義された数列 $\{a_n\} \in \ell^2 \equiv \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ の全体とする.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left[\frac{k!}{\Gamma(k+1+\alpha)} \right]^{1/2} a_k \right|^{1/n} \leq \frac{\rho T}{2}$$

$L_T^2(\rho, \alpha)$ が L^2 の線型部分空間であることを容易に示す。

定理 1. $\rho > 0$, $\alpha \geq 0$ を固定する. このとき, Fourier-Laguerre 変換 $f \mapsto \{a_n^\alpha(f; \rho)\}$ は $L_T^2(0, \infty)$ から $L_T^2(\rho; \alpha)$ の上への線型同型写像である.

この定理に, 古典的な Riesz-Fischer の定理を援用すると, $L_T^2(\rho; \alpha)$ は L^2 に閉じていることがわかる. また, $L_{n, \rho}^\alpha$ は $L_T^2(0, \infty)$ に属さないのて, n 番目だけが 1, 他は全て 0 という数列は, $L_T^2(\rho, \alpha)$ に属さないことに注意する.

定理 1 の証明は [1] を参照されたい. 手段としては, 通常の Laplace 変換が, $L^2(0, \infty)$ を右半面に Hardy 空間 $\mathcal{H}$ に写すこと, $\Omega_{n, \rho}^\alpha$ を $L_{n, \rho}^\alpha$ の Laplace 変換とすると

$$f = \sum a_n L_{n, \rho}^\alpha \quad \text{in } L^2(0, \infty)$$

$$\Leftrightarrow F(s) = \sum a_n \Omega_{n, \rho}^\alpha \quad \left(\begin{array}{l} \text{Re } s > 0 \text{ で絶対} \\ (F \text{ は } f \text{ の Laplace 変換)} \quad \text{Re } s \geq \delta > 0 \text{ で一様} \end{array} \right)$$

が成立すること, 及び指数型整函数の Taylor 展開における係数の評価を用いる.

$$Q_T = \{ h(x, y, z)k ; |x|^2 + |y|^2 \leq T, |z| \leq T, k \in K \}$$

とし, $L_T^2(G)$ でいて, $f \in L^2(G)$ で $\text{supp } f \subset Q_T$ なるも

の全体, $L^2(\mathcal{G}) \ni f$ を

$$f(k(\phi)h(o, r, z)k(\psi)) = e^{-ip\phi} f[r, z] e^{-iq\psi}$$

for some measurable function such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |f[r, z]|^2 r \, dr \, dz < \infty$$

となるものの全体を L_{pq}^2 , $L_{pq,T}^2 = L_{pq}^2 \cap L_T^2(\mathcal{G})$ とおく. 以下, $f[\cdot] = Rf$ と書く. このとき,

$f \in L_{pq,T}^2 \Rightarrow Rf[r, z] = 0$ a.e. for $r > T^{1/2}$ or $|z| \geq T$ に注意する. 更に, $f \in L_{pq,T}^2$ のとき

$$\Phi f[r, \lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} Rf[r, z] e^{-i\lambda z} \, dz$$

とおき, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $H_{pq,T}(n)$ をもって

$$\Phi f[r, m\pi/T] = 0 \quad \text{a.e. } r > 0 \quad \text{and any } m \neq n \quad (m \in \mathbb{Z})$$

を共にす $f \in L_{pq,T}^2$ の全体とする.

$$\psi_{n,T}(z) = \begin{cases} (2T)^{-1/2} e^{in\pi z/T} & |z| \leq T \\ 0 & |z| > T \end{cases}$$

$$F_f(r; n) = (2T)^{-1/2} \Phi f[r, n\pi/T]$$

とおくと

$$f \in H_{pq,T}(n) \Rightarrow Rf[r, z] = F_f(r; n) \psi_{n,T}(z)$$

従って, $f \in H_{pq,T}(n)$ のとき,

$$\int_G f(g) u_{mn}(g; \ell, \lambda) dg = \delta_{m \operatorname{sgn} \lambda, p+\ell} \delta_{n \operatorname{sgn} \lambda, q+\ell} (-1)^{\varepsilon_\lambda(p, q)} |\lambda|^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{-T}^T \psi_{n, T}(z) e^{-i\lambda z} dz \int_0^\infty F_f(r^{1/2}; n) L_{M_\lambda(p+\ell, q+\ell), |\lambda|}(r) dr$$

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon_\lambda(p, q) = [(q-p) \operatorname{sgn} \lambda + |q-p|] \\ M_\lambda(p, q) = \operatorname{Min}(p \operatorname{sgn} \lambda, q \operatorname{sgn} \lambda) \end{array} \right)$$

$$\varphi_T(\lambda) = (2T^{-1})^{1/2} (\sin T\lambda)/\lambda \quad \text{とし, 各 } n \in \mathbb{Z} \text{ に対し}$$

$$\varphi_{n, T}(\lambda) = \varphi_T(\lambda - \frac{n\pi}{T})$$

とおく. $\mathcal{A}_\alpha$ ($\alpha \geq 0$) を次の性質を持つ写像 $a: \mathbb{R}_+^x \rightarrow \ell^2$ の全体とする.

$$(i) \quad \exists \rho_0 > 0 \quad \text{such that} \quad a(\rho_0) \in \ell_T^2(\rho_0, \alpha)$$

$$(ii) \quad c_{mn}^\alpha(\rho_1, \rho_2) = \int_0^\infty L_{n, \rho_2}^\alpha(t) L_{m, \rho_1}^\alpha(t) dt \quad \text{とおき,}$$

$C^\alpha(\rho_1, \rho_2)$ を無限行列 $(C_{mn}^\alpha(\rho_1, \rho_2))$ の定める ℓ^2 上のユニタリ作用素とすると,

$$a(\rho_1) = C^\alpha(\rho_1, \rho_2) a(\rho_2)$$

ここで, (i), (ii) より, $\forall \rho > 0$ に対して, $a(\rho) \in \ell_T^2(\rho, \alpha)$ となることに注意しておく.

$\mathcal{H}_{\rho_0, T}(n)$ を次の形に書ける函数 f on $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^x$ の全体とする.

$$F(\ell, \lambda) = \begin{cases} (-1)^{\varepsilon_\lambda(p, q)} |\lambda|^{-1/2} a_{M_\lambda(p+\ell, q+\ell)} (|\lambda|) \varphi_{n, T}(\lambda) & \text{for } M_\lambda(p+\ell, q+\ell) \geq 0 \\ 0 & \text{for } M_\lambda(p+\ell, q+\ell) < 0 \end{cases}$$

for some $a \in A_{|p-q|}$

$F \in \mathcal{H}_{p, T}(n)$ のとき,

$$\|F\|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\ell, \lambda)|^2 |\lambda| d\lambda < \infty$$

であり, このノルムで $\mathcal{H}_{p, T}(n)$ は Hilbert 空間になっている.

G 上の Haar 測度を, K 上の正規化された Haar 測度 dk と $\mathbb{R}^3$ の通常の Lebesgue 測度を用いて

$$\int f(g) dg = \int_K dk \int_{\mathbb{R}^3} f(h(x, y, z)k) dx dy dz$$

と正規化しておく.

定理 2 $\mathcal{F}_{p, T} : f \mapsto \int f(g) \chi_{(p+\ell, q+\ell)}(g; \ell, \lambda) dg$ は $H_{p, T}(n)$ から $\mathcal{H}_{p, T}(n)$ への unitary な写像である.

$L^2_{p, T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oplus H_{p, T}(n)$ であるから, $\mathcal{H}_{p, T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_{p, T}(n)$ とすると, $\mathcal{F}_{p, T}$ は $L^2_{p, T}$ から $\mathcal{H}_{p, T}$ への unitary な写像であることがわかる. 更に, $F \in \mathcal{H}_{p, T}$, $F = \sum F_n$ ($F_n \in \mathcal{H}_{p, T}(n)$) とすると

定理3 $F(l, \lambda) = \sum F_n(l, \lambda)$ は, $l \in \mathbb{Z}$ と $\lambda \in \mathbb{R}^x$ に関して一様収束する.

定理3と $\varphi \in \mathbb{Z}$, $\eta \in \mathbb{Z}$ に渡って加えれば, $L_T^2(G)$ の像が特徴付けられるが, 本稿では述べない. 詳しくは [1] と参照されたい.

なお, 急減少函数の特徴付けに関しては [2] と参照されたい.

文 献

- [1] T. Nomura, The Paley-Wiener type theorem for the oscillator group, Preprint, 1980.
- [2] D. Geller, Fourier analysis on the Heisenberg group I. Schwartz space, J. Funct. Anal., 36(1980), 205-254.