

部分自律有限オートマトンの等価性

京産大 理学部 岩間 一雄

京大 工学部 上林 弥彦

京大 工学部 矢島 脩三

1. まえがき 著者らは非同期自律状態遷移を行う可能性のある順序回路（非基本モードハフマン機械等）の記述に適した新オートマトンモデルとして、部分自律有限オートマトン（Partially Autonomous Finite Automaton, PAFA）を導入し、その能力を中心とする基本的性質について論じた。⁽¹⁾ 本報告では、PAFA の等価性判定問題について論じる。

等価性判定問題は状態最小化等の議論の基礎になる基本的問題であるが、PAFA の場合、その一般的なクラスはもちろん、強い制限を与えた単純 PAFA (SPAFA) と名付けた部分クラスでも非可解になることが判明した。SPAFA は、通常の決定性完全指定ミリーモデルの一部の状態に自律遷移を許したモデルであり、 $\wedge$ なし GSM⁽²⁾ よりかなり能力が低く、決定性 GSM と比べても比較不能になる。

最近 Ibarra は 2 入力 1 出力の $\wedge$ なし GSM ((2,1)GSM) の等価性判定問題が非可解になることを示したが⁽²⁾、同様の制限を付した (2,1)SPAF A の等価性判定問題も非可解になることが判明した。(2,1)SPAF A はその計数能力において (2,1)GSM よりかなり能力が低く、Ibarra の証明手法を応用することができない。従って、本結果はその結果自体と証明手法の双方において Ibarra の結果の真の拡張になっている。

2. 定義⁽¹⁾ 部分自律有限オートマトンは、回路に信号が入力されることなく自律遷移が生じたという現象に対し、仮想的に無信号記号という記号入力によって自律遷移が生じたと考えてモデル化される。

入力記号 は 入力信号記号 と 入力無信号記号 に分類される。
入力系列 は入力記号の有限長の列であり、入力信号系列 は入力信号記号の有限列である。部分自律有限オートマトン (PAFA) M は 3 字組 (M, v, w) である。ここで、 $M = (S, \Sigma, P, \delta, \pi, A_0, F)$ は 初期状態 (A_0) と 最終状態集合 (F) の指定された決定性ミリーモデル、 $v \in \Sigma$ ($w \in P$) は入力 (出力) 無信号記号、 $\Sigma - \{v\}$ ($P - \{w\}$) は入力 (出力) 信号記号の集合である。 $\delta: D_\delta \subseteq S \times \Sigma \rightarrow S$, $\pi: D_\pi \subseteq S \times \Sigma \rightarrow P$ はそれぞれ状態遷移関数、出力関数である (通常の方法で系列へ拡張される)。 M の現在の状態 s の次状態 s' は δ で各入力記

号に対して指定されている状態のいずれか一つであるが、 $\delta' = \delta(\lambda, x)$ ($x \neq v$) の場合は長さ 1 の入力信号系列 x が入力されたことを意味し、 $\delta' = \delta(\lambda, v)$ の場合は長さ 0 の入力信号系列が入力されたと解釈する。

本報告では v, w として共に同じ記号 ε を常に使用し、また $D_\delta = D_\lambda$ を満足する PAFA のみを議論の対象にする。 $\delta(\lambda_0, p) \in F$ である $p' \in \Sigma^*$ が存在するとき、 $p = f_\varepsilon(p')$ を M の受理信号系列、 $q = f_\varepsilon(\lambda(\lambda_0, p'))$ を p に対する可能な出力信号系列 と呼ぶ。ただし、 f_ε は系列に現れるすべての ε に Λ (空系列) を代入する演算子である。このような p と q の対 (p, q) の可能なものの全体を M が限定する関係 といひ、 R_M で表す。 $R_{M_1} = R_{M_2}$ であるとき M_1 と M_2 は 等価 であるという。

PAFA の一つの受理信号系列に対する可能な出力信号系列は一般に複数となり非決定性オートマトンの性質を示すが、以下に述べる基本的性質を有している。

[定理 1]¹¹⁾ PAFA の受理信号系列 p に対する長さ n 以下の可能な出力信号系列数の上限は $2^{|p|+1}$ のオーダーである。

Elgot¹²⁾ によって定義された最も一般化された系列変換器 (EM 機械¹³⁾) ではこのような上限は n の指数関数のオーダーとなり、GSM では n による多項式になる。このように系列変換器として従来知られてゐる EM 機械と GSM の間には大

る能力差があり、PAFAはこの間隙を埋める新しいクラス
のオートマトンモデルであることが判る。

3. 単純PAFAの等価性判定問題 文献(5)に於て
GSMの等価性判定問題が非可解であることが示されており、
PAFAはGSMより真に能力が高いため、PAFAの等価性判
定問題は非可解である。この節では於てGSMより真に能
力が低く、かつ実用的にも興味深い単純PAFAと呼ばれる部
分クラスを導入しその等価性判定問題を考察する。

単純PAFA (Simple PAFA, SPAFA) は以下の条件(i)~(iv)
を満たすPAFAである。(i) すべての状態が最終状態である。
(ii) $\forall s \in S, \forall x \in \Sigma - \{\varepsilon\}$ に対し、 $\delta(s, x)$ と $\lambda(s, x)$ が定義さ
れている。(iii) ε を出力することを許さない。(iv) 遷移図上で入
力系列 $\varepsilon^i (i \geq 1)$ によるサイクルが存在しない。

PAFAを非同期回路のモデルという立場からみると、 ε に
よる自律遷移は外部からの入力信号とは無関係に(非同期に)、
内部的要因によって任意の時刻に生じうる状態遷移であると
考えられる。このような観点からみるとSPAFAは以下の性
質を有しており、非常に実用的な部分クラスであるというこ
とができる。

(1) 外部からどのような時刻に信号を加えてもそれが未定
義入力となって回路を壊す恐れがない(条件(ii))。

(2) 状態遷移は自律遷移を含めてその時刻を外部から観測でき(条件(iii)), また回路が発振する恐れがない(条件(iv))。

[定理2] SPAFA は $\wedge$ FL GSM より真に能力が低い。

SPAFA のある状態から一つの入力信号記号に対して出力される可能性のある出力信号系列の長さは, 条件(iii)と(iv)より1以上でかつある自然数であさえられるから, $\wedge$ FL GSM より能力が低いことは明らかであろう。 $\wedge$ FL GSM の図1

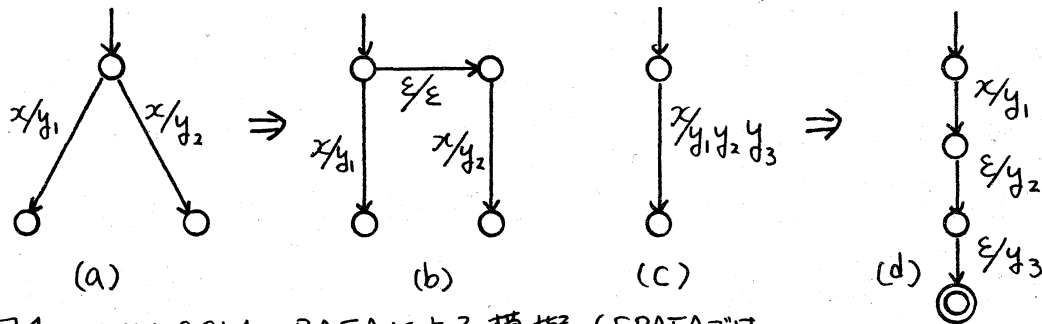


図1 $\wedge$ FL GSM の PAFA による模擬 (SPAFA では模擬できない例)

(a) の様な非決定的状態遷移は PAFA では同図 (b) の様に模擬できる。しかし SPAFA では ϵ 出力が許されていないので模擬できない。また $\wedge$ FL GSM の図1(c) の様な長さ2以上の系列出力は PAFA では同図 (d) (◎は最終状態を示す) の様に模擬できるが, SPAFA では最終状態指定が許されていないのでやはり模擬できない。このように SPAFA の能力は $\wedge$ FL GSM のそれより相当低いと考えられる。

[定理3] SPAFA の等価性判定問題は非可解である。

証明の方針を以下に与える(詳細は(b)参照)。与えられた
 ポストの対応問題 P (記号集合 Z , リスト $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$)⁽²⁾ に対して, 以下に述べる機械 M_1 と M_2 を考える。 M_1 は添字列 $i_1 \dots i_m$ が入力されたとき, 任意の記号列 ($\in Z^*$) を出力する可能性がある。 M_2 は入力列 $i_1 \dots i_m$ に対し, Z^* からリスト A で対応する記号列 $a_{i_1} \dots a_{i_m}$ を除いた集合と Z から記号列 $b_{i_1} \dots b_{i_m}$ を除いた集合の和集合の任意の要素を出力する可能性がある。容易に判るように P が解を持たないための必要十分条件は M_1 と M_2 が等価になることである。

ところがこのような M_1 と M_2 を SPFA で構成しようとするとさきざきの問題が生じる。以下にその代表例と解決法を示し, SPFA における制限がその等価性判定問題に関しては問題の難しさをほとんど軽減していったことを示す。

(1) 一つの添字列に対し任意の記号列を出力させることは定理 1 より一般の PAFA でも不可能である。しかしこのことは, 出力される可能性のある記号列の長さを添字列長以上添字列長の整数 ($|a_1|, \dots, |a_m|, |b_1|, \dots, |b_m|$ の最大値を選ぶ) 倍以下程度に制限することにより解決できる。

(2) M_1, M_2 を構成するに当って必要となる前述の図 1(a) の様な非決定的分岐の問題は以下の様に解決する。一般に関係 $R \subseteq X^* \times Y^*$ (X, Y は有限集合) に対し, a を整数として以下

の規則で関係 $R^{\Delta}(a) \subseteq X^* \times (Y \cup \{\Delta\})^*$ ($\Delta \notin Y$) を以下の規則で構成する。i) $\exists (x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_l) \in R \Leftrightarrow 0 \leq \forall i \leq a$ に対し $(x_1 \dots x_m, \Delta^a y_1 \Delta^a \dots \Delta^a y_l \Delta^i) \in R^{\Delta}(a)$ 。ii) $\exists (x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_{l-1} y_l) \in R$ かつ $(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_{l-1}) \notin R \Leftrightarrow 1 \leq \forall i \leq a$ に対し $(x_1 \dots x_m, \Delta^a y_1 \Delta^a \dots \Delta^a y_{l-1} \Delta^i) \in R^{\Delta}(a)$ かつ $(x_1 \dots x_m, \Delta^a y_1 \Delta^a \dots \Delta^a y_{l-1}) \notin R^{\Delta}(a)$ 。

[補題1] $R_1, R_2 \subseteq X^* \times Y^*$, a を整数としたとき, $R_1 = R_2$ であるための必要十分条件は $R_1^{\Delta}(a) = R_2^{\Delta}(a)$ である。

図1(a)の様な非決定的分岐のある機械が限定する関係 R に対し, 整数 a を適当に選ぶことにより, $R^{\Delta}(a)$ を限定するすべての状態が最終状態でかつ ε 出力のない PAFA を構成することができる。例えば図2(a)の様な遷移は, $a=3$ として, 同図(b)の様に実現できる。容易に判るように a の値は一つの状態から非決定的に分岐する遷移枝の最大値以上を選ぶ必要

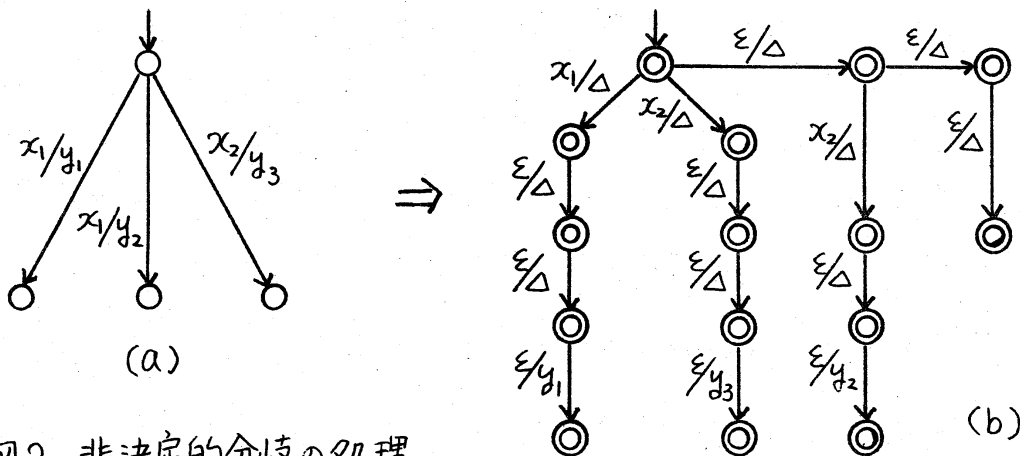


図2 非決定的分岐の処理

がある。このことと補題1より、図2(a)の様な分岐の必要な機械の等価性判定問題が ε 出力と最終状態指定を許さないPAFAの等価性判定問題に帰着できることが判る。

(3) 他にもSPAFAでは ε 入力を除いて不完全指定を許さないこと等の問題があるが、いずれも容易に解決できる。

4. (2,1)SPAFAの等価性判定問題 Ibarraは最近 ε 入力 $\mid$ 出力の $\wedge$ なしGSM((2,1)GSM)の等価性判定問題が非可解になることを示したが、⁽³⁾同様の結果がSPAFAについても成立する。即ち、二つの入力信号記号と一つの出力信号記号しか許さないSPAFA((2,1)SPAFA)の等価性判定問題は非可解である。本稿では紙数の都合で、本結果とIbarraの結果の違いを考察するとどめ、その証明は結果の他の判定問題への応用と合わせ別稿に譲る⁽⁷⁾。

Hartmanisは文献(8)で、種々の判定問題を非可解にする本質的要因はその機械が有する"計数能力"であることを指摘している。この観点からみると(2,1)GSMは非決定性1計数器機械(1 reversal-boundedでも等価性判定問題は非可解になる⁽⁹⁾)とほぼ同等の計数能力をえなえている。このことは、言語 $L \equiv \{w_0 w' \mid w, w' \in \{0, 1\}^*\text{ かつ }|w| = |w'| \}$ の処理を考えると判りやすい。非決定性1計数器(1 reversal-bounded)機械が L を受理できることは容易に判るが、(2,1)

GSM も Σ を以下の様に扱うことができる。即ち、はじめは 1 入力記号につき 1 個の記号を出力し、0 が入力されるたびに、そのままの動作を続けるか、又はその 0 に対して 2 記号を出力し以後は 1 入力記号につき 3 個の記号を出力するような動作に転じるかを非決定的に選択する (2,1)GSM を構成すればよい。この機械は Σ に属する語が入力された場合に限って、ちょうどその語長の 2 倍の長さの記号列を出力する可能性がある。Ibarra の証明は基本的には (2,1)GSM のこのような計数能力を利用している。

一方、(2,1)SPAFA の計数能力はより制限されていることが次の補題より判る。

[補題 2] $\Sigma = \{0, 1, \varepsilon\}$, $\Gamma = \{1, \varepsilon\}$ である (2,1)SPAFA M を考える。このとき、 $\forall p \in \{0, 1\}^*$, $\forall r > |p|$ に対し、もし $(p, 1^r) \in R_M$ なる $(p, 1^{r-1}) \in R_M$ である。

即ち、(2,1)SPAFA の場合、さまざまの非決定的選択に対し、最も長い記号列を出力する場合のみが意味を持ち、他の選択はすべて“埋もれてしまう”ことになる。この制限はかなり重大であり、例えば前述の言語 Σ に対し、(2,1)GSM の場合と同様に (2,1)SPAFA を構成するなら、与えられた入力語の前半部でオニの動作に移ってしまう“へたな”選択の結果のなかに、語のまん中でオニの動作に移る“うまい”選択

の結果が埋もれてしまう。結局どのような(2.1)SPAFAを構成しても、語のまん中でうまい選択をした結果を出カに反映させること(つまり最も長い記号列を出カさせること)は不可能であり、言語 L を(2.1)GSMのように適当に処理することができない。従ってIbarraの証明手法を(2.1)SPAFAの場合に適用することもできない。

[定理4] (2.1)SPAFAは(2.1)GSMより真に能力が低い。

[定理5] (2.1)SPAFAの等価性判定問題は非可解である。

以上の考察より定理5がIbarraの結果を実質的の意味で拡張しているといつてよいであろう。証明は1レジスタ機械⁽¹⁰⁾の停止問題に帰着させることによって可能である。

文献 (1) 岩間, 上林, 矢島, 信学技報, AL78-72, 1979年1月。

(2) J.E. Hopcroft and J.D. Ullman, Addison-Wesley, 1969.

(3) O.H. Ibarra, SIAM J. Comput., 7, 4, 524-532, 1978.

(4) C.C. Elgot and J.E. Mezei, IBM J. Res. Develop., 9, 47-68, 1965.

(5) T.V. Griffiths, JACM, 15, 3, 409-413, 1968

(6) 岩間, 上林, 矢島, 「情報科学の基礎理論と応用」研究集会予稿, 1979年2月。

(7) 岩間, 上林, 矢島, 信学会オートマトンと言語研究会発表申込中, 1979年5月。

(8) J. Hartmanis and J.E. Hopcroft, JCSS, 4, 368-376, 1970.

(9) B.S. Baker and R.V. Book, JCSS, 8, 315-332, 1974.

(10) M.L. Minsky, Prentice-Hall, 1967.