

ある 4 次の Thue 不等式の族について

若 林 功 (Isao Wakabayashi)
(成蹊大学工学部)

序

自然数 a, b をパラメータとする 4 次 Thue 不等式の族

$$|x^4 - a^2x^2y^2 - by^4| \leq k(a, b) \quad (1)$$

を解くことを目標とする。ここに、 $k(a, b) > 0$ は与えられていて、解 x, y を整数の範囲で求める。方法は Padé 近似の方法による。この Padé 近似は、ある種の二つの代数的数に対する同時近似の結果を得るために Rickert [R] が導入したものである。

(1) は第 2 項の係数が平方数になっている点が制限になっているが、パラメータを二つもち、不等式になっている点でかなり一般的である。ただし、 y^4 の係数は負である。 y^4 の係数が正で平方数の場合は同様に扱い得るが、正で非平方数の場合は残念ながら我々の方法では扱えない。

なお、この不等式が解けると何か良いことがあるかということ、実は特に何かがある訳ではない。単独の Thue 方程式、すなわち、2 変数斉次多項式 $= k$ という不定方程式は今では Baker の方法によって解けると言ってもよいが、上のようにパラメータをもつ場合は無限個の方程式を解かなければならず、解けるためには何か良い状況が必要である。(1) を考える理由はこれなら解ける、ということであろう。

10 年程前より、パラメータをもつ Thue 方程式の族が種々考察され解かれてきた。それらのほとんどで用いられている方法は Baker の方法によるものであり、関連する体の基本単数系を求め、対数 1 次式の評価を用いるものである。Baker の方法を用いる場合には右辺が ± 1 であることが、かなり強い要請になる。勿論 Baker の方法によっても Thue 不等式を扱うことは可能で ([M-P-L])、それにはさらに、ノルムの絶対値が右辺以下の代数的整数の代表元を決めておく必要が加わる。Padé 近似を用いて Thue 不等式の族を解いている

ものには、古くは Siegel [S] があり ([B-dW] も参照)，最近では [C-V], [L-P-V] と我々の [W1] がある。Padé 近似を用いる方法は、Baker の方法に比べて、適用できる場合が少ないのが弱点であるが、適用できる場合には、一般に Baker の方法よりかなり良い評価を与え、しかも不等式も容易に扱える。なお、パラメータを二つ以上もつ Thue 方程式で解かれているものには [H], [P-T] 等があるが、未だあまりない。論文 [W1] では Thue 不等式

$$|x^4 - a^2 x^2 y^2 + y^4| \leq k(a)$$

を扱った。この y^2 の係数を $-b$ にしたものが (1) である。

ところで、自然数（平方数でなくてもよい）をパラメータとする Thue 方程式

$$|x^4 - ax^2 y^2 \pm y^4| = 1 \quad (2)$$

については、変形 $|(x^2 - \frac{a}{2} y^2)^2 - (\frac{a^2}{4} \mp 1) y^4| = 1$ によって、

$$|X^2 - dY^4| = 4,$$

ただし

$$d = a^2 \mp 4$$

に帰着でき、後者の解がすべて求まると、その一部として (2) の解がすべて求まる。後者の不定方程式については最近 Nakamura-Pethő [N-P] によって解が完全に決定された。その結果から、(2) は直に分かる自明な解しかもたないことが分かる。したがって、彼らは、我々より一般的な第 2 項の係数が平方数でない場合も含めて (2) を解いた。ちなみに、(2) の非負の解は、 a が非平方数のときは $(1, 0), (0, 1)$ のみとなる。 a が平方数の場合はそれに $(\sqrt{a}, 1)$ が加わり、 a が平方数で y^4 の係数が 1 の場合はさらにそれに $(1, \sqrt{a})$ が加わる。一方で、(1) は (2) と比べて一般的になっている点もある。

ここで、雛形として、上で触れた Siegel の定理を述べておこう。その証明は Padé 近似によっている。また最近の発展は [B-dW] を見られたい。

定理 (Siegel [S]). 自然数 $d \geq 3$, 整数 a, b および正数 k に対して、不定方程式

$$|ax^d - by^d| \leq k$$

を考える。もし $|ab|$ が k に比べて十分大であれば、この不定方程式の正のプリミティブな解（すなわち、 $\gcd(x, y) = 1$ なる解）は高々一つである。

この定理は、一つ解が見つければもうそれ以上はない、という安心感を与える素晴らしい定理である。その例として Siegel は次を与えている。

例. $d = 7, 11, 13$ とする。このとき

$$33x^d - 32y^d = 1$$

の整数解は $(1, 1)$ のみである。

1. 結果

得られた結果を述べよう。

Thue 不等式 (1) に対して、代数方程式

$$f(x) = x^4 - a^2x^2 - b = 0$$

を考える。この方程式は一つの正の解

$$\theta = \sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^4 + 4b}}{2}} = \frac{\sqrt{a^2 + 2\sqrt{-b}} + \sqrt{a^2 - 2\sqrt{-b}}}{2}$$

と、負の解 $-\theta$ と二つの複素数解をもつ。この θ に対し、次の有理近似の結果を示すことができる。

定理 1. 自然数 a, b は $a > \frac{16}{\sqrt[3]{27}}\sqrt{b+1/16}\sqrt[4]{b}$ を満たすと仮定する。このとき、任意の整数 p と $q > 0$ に対して、

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{644a^4b^{11/4}q^{\lambda(a,b)}} \quad (3)$$

が成り立つ。ここで

$$\lambda(a, b) = 2 + \frac{2\log(6\sqrt{3}a^2 + 24\sqrt{b})}{\log(27(a^4 - 4b)/128b^{3/2})} < 4. \quad (4)$$

さらに、 $\lambda(a, b)$ は a の減少関数であり、 a が ∞ になるとき 3 に近づく。

注) a の大きさに関する上の仮定は、応用上本質的に必要な不等式 $\lambda(a, b) < 4$ を得るためのものである。

これを用いると容易に Thue 不等式 (1) の解の上界を得る。

定理 2. 自然数 a, b は $a > \frac{16}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{b+1/16}\sqrt[4]{b}$ を満たすとし, $k(a, b) \geq 1$ とする. このとき, (1) の任意の正の解 (x, y) は

$$y^{4-\lambda(a,b)} < 322ab^{11/4}k(a, b) \quad (5)$$

を満たす. ここで $\lambda(a, b)$ は (4) で与えられる.

例として, $k(a, b) = a^2 + b - 1$ の場合を考えよう. この場合には, a が大のときに (1) のすべてのプリミティブな解を与えることができる.

定理 3. $a \geq 5.3 \times 10^{10}b^{6.22}$ とする. このとき, Thue 不等式

$$|x^4 - a^2x^2y^2 - by^4| \leq a^2 + b - 1 \quad (6)$$

のプリミティブな解は $(x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm a, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)$ のみである. ただし, 複号任意.

これらの解を (6) の自明な解と呼ぼう.

さらに, $b = 1$ または $b = 2$ の場合には (6) のすべての解が求まる.

定理 4. $b = 1$ または $b = 2$ とする. このとき, (6) のプリミティブな解は自明な解のみである.

これらの結果を得る方法は [W1] と同様である. 定理 1 が基本的であり, それには Rickert 積分による二つの 2 項関数に対する Padé 近似を用いる.

Thue 不等式を解く方法の概略は, 定理 4 の $b = 1$ のときの不等式 (6) の場合について述べると, 次のようになる. (x, y) を (6) の非自明な正の解とする.

(i) $a \geq 447000$ のとき. Padé 近似の方法によって, 解 (x, y) の上界が定理 2, (5) のように得られる. 一方, 初等的な方法によって, その下界が得られるが, この場合には, 上界 < 下界 となり, 矛盾. すなわち理論的に非自明な解がないことが分かる.

(ii) $8 \leq a < 447000$ のとき. Padé 近似の方法によって, 解 (x, y) の上界が定理 2, (5) のように得られる. また, (i) と同様に初等的な方法によってその下界が得られるが, この場合には, 下界 < 上界 となり (i) のような逆転は得られない. しかし, 古典的な Legendre の定理により, 非自明な正の解があるとすれば, その比 x/y は, θ の連分数になっているはずなので, 分母がこの上界以下の θ の連分数を計算機により求め, どれも解にはならないことを確認する. この上界は 10^{80} 以下である.

(iii) $1 \leq a < 8$ のとき. Baker の方法による. あるいは整数論の計算ソフトである KANT システム [D-al] を用いても解ける. (注. $b = 1$ の場合は Baker の方法によっても実際に解いたが, $b = 2$ の場合は $1 \leq a < 12$ が残り, それは KANT システムで解いただけである.)

2. Padé 近似

上記の Siegel の例では代数的数

$$\sqrt[d]{\frac{32}{33}} = \sqrt[d]{1 - \frac{1}{33}}$$

の有理近似の評価を得ることが問題になる. この数は 2 項関数 $\sqrt[d]{1-x}$ に $x = 1/33$ を代入したものである. そこでまず関数 $\sqrt[d]{1-x}$ の Padé 近似を考えよう. Padé 近似とは何か, を説明するために補題を一つ述べる.

補題 1. $f_1(x), \dots, f_m(x)$ を原点で正則な m 個の関数で, その Taylor 展開の係数が有理数であるものとする.

$\Rightarrow$ 任意の自然数 n に対して, $m+1$ 個の $\mathbf{Q}$ 係数多項式 $P_{0n}(x), \dots, P_{mn}(x)$ で次数が n 以下のものが存在して,

$$P_{0n}(x) + P_{1n}(x)f_1(x) + \dots + P_{mn}(x)f_m(x) = cx^{(m+1)n+m} + \dots$$

と書ける. すなわち, 左辺の Taylor 展開が少なくとも $(m+1)n+m$ 次の項から始まる.

$\therefore P_{in}(x)$ の係数を未知数と思って, Taylor 展開の始めの方が消える, という条件を書くと, これら未知数に関する連立 1 次方程式になる. 未知数の個数は $(m+1)(n+1)$, 方程式の個数は $(m+1)n+m$ で未知数の個数より少ない. よって非自明な解がある.

注) Padé 近似は応用上, 補題 1 による存在定理だけでは不十分で, 多項式 $P_{in}(x)$ の係数の大きさや係数の分母の振る舞いが分かることが非常に重要である. それ故これらの多項式を具体的に構成できることが大事になる.

例 (Thue-Siegel). 任意の $n \geq 1$ に対して

$$F(-1/d - n, -n, -2n; x) - \sqrt[d]{1-x} F(1/d - n, -n, -2n; x) = c_n x^{2n+1} + \dots$$

となる. ここで F は Gauss の超幾何関数 (この場合は超幾何多項式).

この式に $x = 1/N$ を代入した後, 左辺に出てくる分母を N^n 等を掛けて払うと,

$$p_n - \sqrt[d]{1 - \frac{1}{N}q_n} = c'_n \left(\frac{1}{N}\right)^{n+1} + \dots \quad (7)$$

$$p_n, q_n \in \mathbf{Z}$$

を得る. N が大であれば右辺は小となり, これより $\theta_1 = \sqrt[d]{1 - \frac{1}{N}}$ に対する有理近似の評価を得る. 実際, この θ_1 は d 次の代数的数であるから, その連分数展開は全く求められないのであるが, (7) 式から, 連分数展開ほど良くないかもしれないが, θ_1 をある程度良く近似する有理数の列 $\{p_n/q_n\}$ が兎も角得られているのである. そして θ_1 を近似する一般の有理数 p/q とこの有理数の列 $\{p_n/q_n\}$ とを比較して, θ_1 に対する有理近似の評価をある補題によって得ることができるのである. これが Thue の独創的なアイデアである.

Thue 不等式(1)の場合は

$$\begin{cases} \frac{\theta}{a} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{-b}}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{-b}}{a^2}}}{2}, \\ \frac{\sqrt{-b}}{a\theta} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{-b}}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{-b}}{a^2}}}{2}. \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{-b}}{a^2}} = \frac{\theta}{a} + \frac{\sqrt{-b}}{a\theta}, \\ \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{-b}}{a^2}} = \frac{\theta}{a} - \frac{\sqrt{-b}}{a\theta}. \end{cases} \quad (8)$$

このことより, 二つの 2 項関数 $f_1(x) = \sqrt{1+x}$, $f_2(x) = \sqrt{1-x}$ に対する Padé 近似が求まればよいことになる. そしてこの Padé 近似は Rickert によって与えられた.

補題 2 (Rickert [R]). $n \geq 0$ とし, x を小とし, γ を 3 点 $z = 0, 1, -1$ を囲む閉曲線とし, 積分

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1+xz)^{n+1/2}}{(z(z-1)(z+1))^{n+1}} dz \quad (9)$$

を考える. $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ をそれぞれ $z = 0, 1, -1$ を囲む小さな閉曲線とする. このとき

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_0} \dots + \int_{\gamma_1} \dots + \int_{\gamma_2} \dots \right) \\ &= p_{0n}(x) + p_{1n}(x)\sqrt{1+x} + p_{2n}(x)\sqrt{1-x} = c_n x^{3n+2} + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

なる Padé 近似が得られる.

∴) 留数計算と, 最後の項は $I_n(x)$ の積分の評価による. 試みに $n=0$ として計算すると,

$$-1 + \frac{\sqrt{1+x}}{2} + \frac{\sqrt{1-x}}{2} = \frac{-1}{8}x^2 + \dots$$

を得る.

3. 定理の証明

定理 1 の証明.

Rickert による Padé 近似 (10) による. 即ち, (10) に $x = 2\sqrt{-b}/a^2$ を代入した後, (8) を代入し, それに θ 掛ける (n が奇数のときは $\theta\sqrt{-b}$ を掛ける) と, θ と θ^2 についての有理係数非斉次 1 次形式

$$p_{0n} + p_{1n}\theta + p_{2n}\theta^2 = l_n, \quad p_{in} \in \mathbb{Q} \quad (11)$$

を得る. ここで, Rickert の積分によって, 有理数 p_{in} の大きさ, およびその分母の大きさを上から評価することができ, さらに右辺の l_n も a が大きければ十分小さいことが分かる. 同様のことを, (9) において, 被積分関数を

$$\frac{z(1+xz)^{n+1/2}}{(z(z-1)(z+1))^{n+1}} \quad \text{および} \quad \frac{z^2(1+xz)^{n+1/2}}{(z(z-1)(z+1))^{n+1}}$$

としたものに対しても行い, (11) と同様の 1 次形式を都合三つ作る. この三つの 1 次形式と, よく知られたある補題 ([C, Lemma 3.2], [W2, Lemma 5]) (Siegel の例で触れたものに対応するもの) によって, θ に対する有理近似に関する結果, すなわち定理 1 を得る.

定理 2 の証明.

(x, y) を (1) の解とすると, (1) より, 容易に

$$\left| \theta - \frac{x}{y} \right| < \frac{k(a, b)}{2a^3y^4}$$

なる評価を得る. これと (3) より, (5) を得る.

定理 3 の証明.

それには次の初等的な補題が有用である.

補題3. (x, y) を(1)のプリミティブな非負非自明な解とする.

$\Rightarrow$

$$y > \frac{2a^4}{5b^2}.$$

$\therefore$ 多項式 $f(x) = x^4 - a^2x^2 - b$ の値の計算により,

$$f\left(a + \frac{b}{2a^3} - \frac{5b^2}{4a^7}\right) < 0, \quad f\left(a + \frac{b}{2a^3}\right) > 0.$$

したがって, $y = f(x)$ のグラフより,

$$a + \frac{b}{2a^3} - \frac{5b^2}{4a^7} < \theta < a + \frac{b}{2a^3}$$

が分かるが, (x, y) が(1)のプリミティブな非負非自明な解であることより, x/y と θ は近くにあるので,

$$a + \frac{b}{2a^3} - \frac{5b^2}{4a^7} < \frac{x}{y} < a + \frac{b}{2a^3}$$

を得る. これに $2a^3y$ をかけると,

$$2a^4y + by - \frac{5b^2y}{2a^4} < 2a^3x < 2a^4y + by.$$

$\therefore$

$$\frac{5b^2y}{2a^4} > 1.$$

この補題3と定理2, (5)より,

$$\left(\frac{2a^4}{5b^2}\right)^{4-\lambda(a,b)} < y^{4-\lambda(a,b)} < 322ab^{11/4}(a^2 + b - 1).$$

ここで, $a \rightarrow \infty$ とすると, $\lambda(a, b) \rightarrow 3$ となるから, 下界 $\sim a^4$, 上界 $\sim a^3$. これより, $a \geq 5.3 \times 10^{10} b^{6.22}$ のとき, 下界 $>$ 上界 となり矛盾. よってこのときプリミティブな非負非自明な解はない.

定理4の証明は序に記したとおり.

文 献

- [B-dW] M. A. Bennett and B. M. M. de Weger, On the diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$, *Math. Comp.*, **67**(1998), 413–438.
- [C] G. V. Chudnovsky, On the method of Thue-Siegel, *Ann. of Math.*, **117**(1983), 325–382.
- [C-V] Chen J. H. and P. M. Voutier, Complete solution of the diophantine equation $X^2 + 1 = dY^4$ and a related family of quartic Thue equations, *J. Number Theory*, **62**(1997), 71–99.
- [D-al] M. Daberkow, C. Fieker, J. Klüners, M. Pohst, K. Roegner and K. Wildanger, KANT V4, *J. Symbolic Comp.*, **24**(1997), 267–283.
- [H] C. Heuberger, On families of parametrized Thue equations, preprint.
- [L-P-V] G. Lettl, A. Pethő and P. Voutier, Simple families of Thue inequalities, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [M-P-L] M. Mignotte, A. Pethő and F. Lemmermeyer, On the family of Thue equations $x^3 - (n-1)x^2y - (n+2)xy^2 - y^3 = k$, *Acta Arith.*, **76**(1996), 245–269.
- [N-P] K. Nakamura and A. Pethő, Squares in binary recurrence sequences, Number Theory–Diophantine, Computational and Algebraic Aspects, K. Győry, A. Pethő and V. T. Sós, eds., Proc. Conf. Number Theory Eger 1996, W. de Gruyter, Berlin (1998), 409–421.
- [P-T] A. Pethő and R. F. Tichy, On two-parametric quartic families of diophantine problems, *J. Symbolic Comp.*, **26**(1998), 151–171.
- [R] J. H. Rickert, Simultaneous rational approximations and related diophantine equations, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **113**(1993), 461–472.
- [S] C. L. Siegel, Die Gleichung $ax^n - by^n = c$, *Math. Ann.*, **114**(1937), 57–68.
- [W1] I. Wakabayashi, On a family of quartic Thue inequalities I, *J. Number Theory*, **66**(1997), 70–84.
- [W2] I. Wakabayashi, On a family of quartic Thue inequalities II, submitted to *J. Number Theory*.