

抵抗回路の感度の符号と区間解析

Interval Analysis of Resistive Networks

by Using Signs of Sensitivity

早川 透

Tooru HAYAKAWA

早稲田大学理工学研究科

School of Science & Engineering, Waseda University

1 はじめに

抵抗回路において、抵抗値を誤差を含んだ区間内を変動させたときの各枝の電圧と電流の値の取りうる区間を評価することを目的とする。計算により見積もる区間は必ず真の区間を包み込んでいなければならないとする。すると、モンテカルロ法は却下され、区間演算 [1],[3],[9] を使わざるを得ない。

しかし、単純な区間演算は精度が異常に悪いため、個々の問題の特性に応じて工夫をする必要がある。ここで扱う線形抵抗回路について、例えば奥村は、ハイブリッド方程式に Hansen の方法を利用する方法を提案している [8]。

筆者は、奥村の方法をもとに、感度の符号を調べて単調性を数値的に証明してしまおうと考えた [4],[5],[6]。感度とは偏導関数のことであるが、全ての感度の符号が与えられた定義区間内で一定符号ならば、もとの関数は単調であり、各成分の最大値と最小値を別々に計算することにより正確な区間が丸め誤差の範囲内で計算可能となる。

問題は感度の符号の判定法である。線形方程式の感度は、方程式を解く操作と同じ操作で得ることができる。この操作を区間演算で行い感度を評価することにより、感度の符号が一定となる十分条件を数値的に検証することが可能である。ここまでは一般論であり、同じ考えが例えば文献 [1] に Kupermann-Hansen の方法として紹介されている。

線形抵抗回路の特徴は、この計算なしで符号を判定できる感度が存在することである。線形抵抗回路においては感度の符号は回路の定方向性 [2] と同一概念となる。そのため、抵抗値に無関係に回路の形だけで、いくつかの感度の符号が決まってしまうのである。残りの抵抗値により変化する符号についてののみ、数値的に検証すればよいのである。

本文は、上記の方法や考えを文献 [8] の例題を例としてまとめたものである。その例題は、 V_6 , V_7 の符号が一定であることを数値的に証明することにより、完全な単調性が言えるのである。また、一般論として完全な単調性が言えない場合の最適評価式も同時に提案する。

2 区間平均値形式の最適評価

関数の取りうる区間を評価するとき、単純に区間四則演算を組み合わせて計算した結果は恐ろしく精度が悪い。そこで区間平均値形式で計算を行うと、一般に精度が改善される。

ところで従来の平均値形式を使った計算手法は最大値と最小値を同一式で一回の計算で評価するものが多い。実は最大値と最小値それぞれに対し別の評価式を与えることにより、精度を上げることができる。その最適評価式をここに提案する。

f を次のような n 次元の多変数関数とする。

$$\begin{aligned} f: X \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(X) \in C^1(X), \\ X = (X_1, \dots, X_n) \subset \mathbf{R}^n, \quad X_i = [x_i, \bar{x}_i] \subset \mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.1)$$

f は任意の一点 $c \in X$ が与えられたとき計算可能とする。目的は、区間 $f(X) \equiv \{f(x) | x \in X\}$ をできる限り正確に評価することである。

多変数の区間平均値形式は次のようになる。

$$f(X) \subset F_c(X) \equiv [\underline{F}_c, \overline{F}_c] \equiv f(c) + \sum_{i=1}^n (X_i - c_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad c = (c_1, \dots, c_n) \in X \quad (2.2)$$

このとき最適区間は次の定理が与える。

定理 2.1 偏導関数の区間列 $\partial f / \partial x_i = [\underline{d}_i, \overline{d}_i]$ が与えられたとき、 $\underline{c} = (\underline{c}_i), \overline{c}_i = (\overline{c}_i) \in X$ を次のように選ぶ。

$$\begin{cases} \overline{c}_i = \overline{x}_i, & \underline{c}_i = \underline{x}_i & \dots & 0 \leq \underline{d}_i \leq \overline{d}_i \\ \overline{c}_i = \underline{x}_i, & \underline{c}_i = \overline{x}_i & \dots & \underline{d}_i \leq \overline{d}_i \leq 0 \\ \overline{c}_i = \frac{\overline{x}_i \overline{d}_i - \underline{x}_i \underline{d}_i}{\overline{d}_i - \underline{d}_i}, & \underline{c}_i = \frac{\underline{x}_i \overline{d}_i - \overline{x}_i \underline{d}_i}{\overline{d}_i - \underline{d}_i} & \dots & \underline{d}_i < 0 < \overline{d}_i \end{cases} \quad (2.3)$$

このとき任意の $c \in X$ に対し、次の不等式が成立する。

$$\tilde{F}_c \equiv [\underline{F}_{\underline{c}}, \overline{F}_{\overline{c}}] \subset F_c \quad (2.4)$$

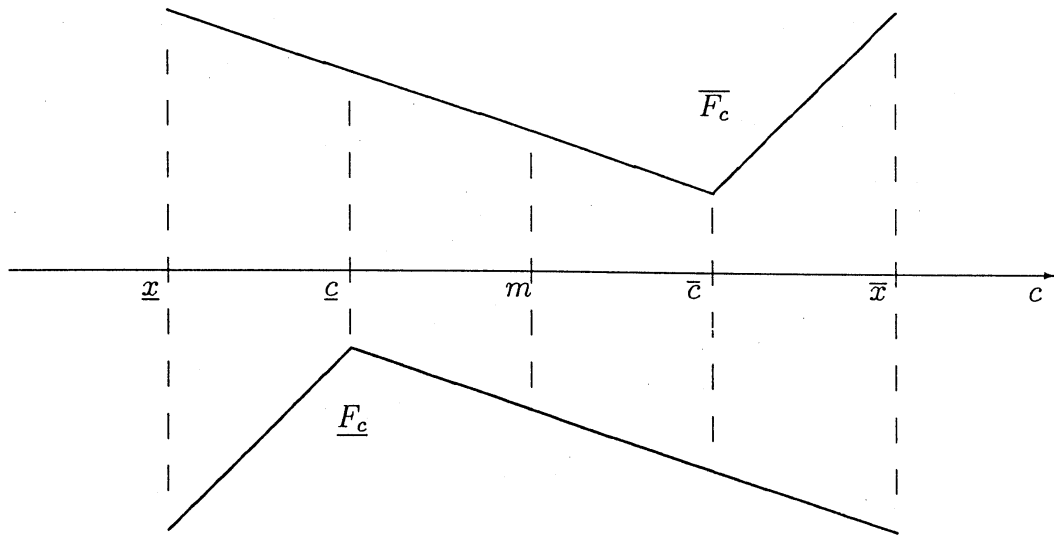
証明は省くが、一変数で $\underline{d} > 0$ ときの F_c のグラフの概形を Fig.1 に示すので、この図で感じをつかんでもらいたい。

また、特に任意の i において $\underline{d}_i \geq 0$ または $\overline{d}_i \leq 0$ のとき f は X で単調関数となり、最適評価 $\tilde{F}$ が正確な区間 $f(X)$ と一致する。ただし、計算機上では厳密には丸め誤差が入る。

3 線形方程式の感度公式

n 元線形方程式 $Ax = b$ において、両辺を r で微分すれば次式を得る。

$$A \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial A}{\partial r} x \quad (3.1)$$

Fig. 1. Graph of F_c .

特に $r = a_{ij}$ のときは $C = A^{-1} : C = (c_{ij})$ を用いて次のように書ける。

$$\frac{\partial x_k}{\partial a_{ij}} = -c_{ki}x_j \quad (3.2)$$

これを区間演算で計算し、その結果得られる真の区間を包み込んだ区間が一定符号であれば、感度の符号が一定であることを言うに十分である。例えば Hansen の補正の後に区間 Gauss 消去法 (合わせて Hansen の方法) を用いて $I(\partial x_k / \partial a_{ij})$ を計算し、その符号を判定する。これ自体は文献 [1] に Kupermann-Hansen の方法として紹介されている。

なお、この方法は感度の符号が一定でない部分については最大値と最小値を同一式で評価している。それは c_i として区間 X_i の中心値 $m_i \equiv (\bar{x}_i + \underline{x}_i)/2$ を代入した形になっている。

4 抵抗回路の方程式とその感度公式

ここでは抵抗素子及びそれに並列に接続された電流源と直列に接続された電圧源から構成される回路を考える。このときの方程式は、文字の定義を文献 [8] に従うと、次の線形方程式となる。

$$\begin{bmatrix} G_t & 0 & -1_t & 0 \\ 0 & R_t & 0 & -1_l \\ 0 & Q_t & 1_t & 0 \\ B_t & 0 & 0 & 1_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_t \\ I_t \\ I_t \\ V_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_t + Q_t I_l \\ B_t E_t + E_l \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

なお、文献 [8] では電圧源が存在しないが、それを $E = (E_i)$ で表す。また、電源の正負の向きは、電源の接続している枝に正の向きに電流を流す向きを正とする。

さて、 V_i, I_i を $G_j (= 1/R_j)$ の関数とみると、感度は次式で表される [7]。

$$\frac{\partial V_i}{\partial G_j} = -w_{ij}V_j, \quad \frac{\partial I_i}{\partial R_j} = -u_{ij}I_j \quad (4.2)$$

ここで w_{ij}, u_{ij} は、 V_i, I_i を電源 $J = (J_i), E = (E_i)$ の関数 $V_i(J, E), I_i(J, E)$ とみたときの唯一単位電源時の値として次のように定義する。

$$\begin{aligned} w_{ij} &= V_i(J^{(j)}, 0), & J_k^{(j)} &= \delta_{kj} \\ u_{ij} &= I_i(0, E^{(j)}), & E_k^{(j)} &= \delta_{kj} \end{aligned} \quad (4.3)$$

5 直並列回路と定方向性

Duffin[2] の定方向 (confluency) の定義は、上記の w_{ij}, u_{ij} を使って次のように定義し直すことができる。

定義 5.1: 枝の対 i, j が定方向性を有するとは、 w_{ij}, u_{ij} の符号が (正の) 抵抗値に対して不変であることを意味する。

これから Duffin の直並列回路に関する定理は次のようになる。

定理 5.2: 回路が直並列であるとき、任意の枝の対が定方向性を有する、つまりは全ての w_{ij}, u_{ij} の符号が (正の) 抵抗値に対して不変である。また、この逆が成り立つ。

直並列でない回路においても、定方向な枝の対は存在し、それに対応する w_{ij}, u_{ij} の符号は決定している。

このようにして w_{ij}, u_{ij} の符号がある程度分かったならば、あとはその線形結合である V_i, I_i の符号を判定する。オームの法則 $I_i = G_i V_i$ より一方の符号が分かれば十分である。加える要素の符号が全て等しければ、その和の符号もその符号を持つ。電源の数が少ない回路ほど、電流の向きが不変な枝が数多く存在することになる。

6 例題

文献 [8] の例題を考える。回路図は Fig.2 のとおり。電源は $J_1 = J_3 = 10.0$ の二つだけである。そしてコンダクタンスに次のように誤差を与える。

$$G_i = [0.9, 1.1] \quad \text{for all } i \quad (6.1)$$

この例題に対し、今まで説明してきた方法を適用し、FORTRAN の倍精度で計算を行った。

はじめに、この回路は直並列であり、 w_{ij}, u_{ij} の符号は全て抵抗値に無関係に Table 2 のとおりに定まる。

次に $V_i(, I_i)$ の符号であるが、 V_i は w_{ij} の次のような線形結合である。

$$V_i = 10.0w_{i1} + 10.0w_{i3} \quad (6.2)$$

Table 2 より V_6, V_7 の符号はこれだけでは決定できないが、残りの符号は決定する。そこで V_6, V_7 の符号は区間演算で判定する。枝 1,2,3,4,5 を木とし、方程式 (4.1) に Hansen の方法を用いた結果を Table 1 $I(x)$ に記す。なお、奥村の方法による結果は、木電圧、補木電流に関してこれと同程度の精度である。この結果から、与えられた定義区間において、 V_6, V_7 の符号は不変である。

以上から、この例題は完全単調であり、導関数の符号は Table 3 のとおりに決定される。これより、各要素の最大値と最小値ごとに抵抗値を選び、非区間 Gauss 消去法で丸め誤差の範囲内で正確な区間解が計算可能である。その結果が Table 1 $R(x)$ である。

この結果を見比べると、 $I(x)$ の有効桁数は2桁以下であることが分かる。なお、 $R(x)$ の計算量は、 $I(x)$ に比べて $2 \times 2 \times n = 36(n = 9 : \text{枝の数})$ 回の非区間 Gauss 消去法の分だけ多い。また、比較として試行回数 1,000,000 回のモンテカルロ法を行った。その結果を Table 1 $M(x)$ に記す。試行回数が 1,000,000 回でも相当の誤差があることが分かる。

参考文献

- [1] Alefeld, G., and Herzberger, J., Introduction to Interval Computations, translated by Rokne, J., Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1983.
- [2] Duffin, R. J., Topology of Series-Parallel Networks, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 10 (1965), pp. 303 - 318.
- [3] Hansen, E. R., Global Optimization Using Interval Analysis, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., 1992.
- [4] 早川 透、区間演算の電気回路網解析への応用—奥村の例題の最終結果、第23回数値解析シンポジウム (1994.6.8 - 10) 講演予稿集、pp. 63 - 66.
- [5] 早川 透、区間演算の応用例—誤差を含んだ抵抗回路網解析、日本応用数学会平成6年度年会 (1994.9.19 - 21) 講演予稿集、pp. 242 - 243.
- [6] 早川 透、抵抗回路の区間解析—奥村の問題の最終結果、日本応用数学会論文誌 Vol.5 No.2 1995, pp. 153 - 162.
- [7] 伊理正夫、久保田光一、高速自動微分法の立場からみた逆行列計算、感度解析、等、第21回数値解析シンポジウム (1992.6.10 - 12) 講演予稿集、pp. 134 - 139.
- [8] 奥村浩士、区間演算の電気回路網解析への応用、応用数理 Vol.3 No.2 (Jun. 1993), pp. 115 - 127.
- [9] Skelboe, S., True Worst-Case Analysis of Linear Electrical Circuits by Interval Arithmetic, IEEE Transactions on circuits and systems, Vol. CAS-26, Oct. 1979.

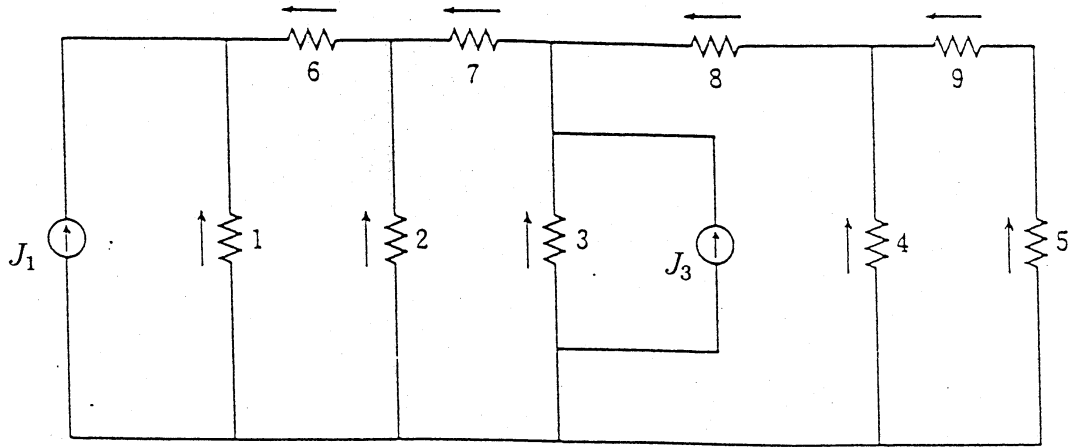


Fig.2. An example of ladder networks.

Table 1. The numerical results by the three method.

x	$I(x)$	$R(x)$	$M(x)$
V_1	[+6.3361, +7.9696]	[+6.4122, +7.9194]	[+6.4496, +7.8662]
V_2	[+3.4958, +4.9230]	[+3.5989, +4.8700]	[+3.6406, +4.8128]
V_3	[+4.8177, +6.1756]	[+4.9094, +6.1180]	[+4.9691, +6.0257]
V_4	[+1.7032, +2.6946]	[+1.7904, +2.6584]	[+1.8356, +2.5825]
V_5	[+0.7567, +1.4510]	[+0.8259, +1.4295]	[+0.8617, +1.3858]
V_6	[+2.1601, +3.6940]	[+2.2956, +3.6018]	[+2.3592, +3.5624]
V_7	[-1.9921, -0.5885]	[-1.8833, -0.7206]	[-1.7924, -0.7831]
V_8	[+2.6317, +3.9487]	[+2.7670, +3.8761]	[+2.8320, +3.8130]
V_9	[+0.7223, +1.4638]	[+0.8259, +1.4295]	[+0.8607, +1.3745]
I_1	[+6.4259, +7.7785]	[+6.5075, +7.6654]	[+6.5490, +7.6159]
I_2	[+3.4019, +4.9484]	[+3.5645, +4.8741]	[+3.6236, +4.7956]
I_3	[+4.7010, +6.2297]	[+4.8182, +6.1144]	[+4.8753, +6.0341]
I_4	[+1.6419, +2.7085]	[+1.7690, +2.6553]	[+1.8278, +2.5758]
I_5	[+0.7480, +1.4162]	[+0.8432, +1.3917]	[+0.8754, +1.3386]
I_6	[+2.2744, +3.5741]	[+2.3346, +3.4925]	[+2.3841, +3.4510]
I_7	[-1.9481, -0.6659]	[-1.8485, -0.7259]	[-1.7741, -0.7830]
I_8	[+2.7065, +3.8616]	[+2.7900, +3.8079]	[+2.8544, +3.7368]
I_9	[+0.7743, +1.4162]	[+0.8432, +1.3917]	[+0.8754, +1.3386]

$I(x)$: The wider estimates by Hansen's method.

$R(x)$: The exact interval solution from the monotonicity.

$M(x)$: The narrower estimates by Monte Carlo method.

Table 2. The signs of w_{ij} , u_{ij} .

$w_{ij} = V_i(J^{(j)}, 0)$	$J^{(1)}$	$J^{(2)}$	$J^{(3)}$	$J^{(4)}$	$J^{(5)}$	$J^{(6)}$	$J^{(7)}$	$J^{(8)}$	$J^{(9)}$
V_1	+	+	+	+	+	+	+	+	+
V_2	+	+	+	+	+	-	+	+	+
V_3	+	+	+	+	+	-	-	+	+
V_4	+	+	+	+	+	-	-	-	+
V_5	+	+	+	+	+	-	-	-	-
V_6	+	-	-	-	-	+	-	-	-
V_7	+	+	-	-	-	-	+	-	-
V_8	+	+	+	-	-	-	-	+	-
V_9	+	+	+	+	-	-	-	-	+
$u_{ij} = I_i(0, E^{(j)})$	$E^{(1)}$	$E^{(2)}$	$E^{(3)}$	$E^{(4)}$	$E^{(5)}$	$E^{(6)}$	$E^{(7)}$	$E^{(8)}$	$E^{(9)}$
I_1	+	-	-	-	-	-	-	-	-
I_2	-	+	-	-	-	+	-	-	-
I_3	-	-	+	-	-	+	+	-	-
I_4	-	-	-	+	-	+	+	+	-
I_5	-	-	-	-	+	+	+	+	+
I_6	-	+	+	+	+	+	+	+	+
I_7	-	-	+	+	+	+	+	+	+
I_8	-	-	-	+	+	+	+	+	+
I_9	-	-	-	-	+	+	+	+	+

Table 3. The signs of the sensitivity.

$\partial V_i / \partial G_j$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9
V_1	-	-	-	-	-	-	+	-	-
V_2	-	-	-	-	-	+	+	-	-
V_3	-	-	-	-	-	+	-	-	-
V_4	-	-	-	-	-	+	-	+	-
V_5	-	-	-	-	-	+	-	+	+
V_6	-	+	+	+	+	-	-	+	+
V_7	-	-	+	+	+	+	+	+	+
V_8	-	-	-	+	+	+	-	-	+
V_9	-	-	-	-	+	+	-	+	-
$\partial I_i / \partial R_j$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9
I_1	-	+	+	+	+	+	-	+	+
I_2	+	-	+	+	+	-	-	+	+
I_3	+	+	-	+	+	-	+	+	+
I_4	+	+	+	-	+	-	+	-	+
I_5	+	+	+	+	-	-	+	-	-
I_6	+	-	-	-	-	-	+	-	-
I_7	+	+	-	-	-	-	+	-	-
I_8	+	+	+	-	-	-	+	-	-
I_9	+	+	+	+	-	-	+	-	-