

An example of non-Kaehler manifold

which is a resolution of a ball-product cusp singularity

東北大理 尾形庄悦 (Shoetsu Ogata)

1. $B_{s+1} = \{(z_1, \dots, z_{s+1}) \in \mathbb{C}^{s+1}; \sum_{i=1}^{s+1} |z_i|^2 < 1\}$ を $s+1$ 次元複素単位球とする。 B_{s+1} は第2種 Siegel 領域 $D_{s+1} = \{(z, u_1, \dots, u_s) \in \mathbb{C}^{s+1};$
2 $\operatorname{Im} z - \sum_{i=1}^s |u_i|^2 > 0\}$ と双正則である。 D_{s+1} は $\mathbb{P}_{s+1}(\mathbb{C})$ の中に $(z, u_1, \dots, u_s) \mapsto [z:u_1:\dots:u_s:1]$ により埋込めて、境界点 $[1:0:\dots:0]$ をもつ。直積 $(D_{s+1})^r$ も $\mathbb{P}_{s+1}(\mathbb{C})^r$ の中で境界点 $\infty = [1:0:\dots:0]^r$ をもつ。

定義 正規孤立特異点 (X, p) が ball-product カスプ特異点であるとは、特異点 $((D_{s+1}^r \cup \{\infty\})/\Gamma, \infty)$ と同型になるときをいう。ここに、 Γ は ∞ を保つような $\operatorname{Aut}(D_{s+1}^r)$ の離散部分群である。

このような特異点を以下に構成する。 F を総実 r 次代数体、 K を F の総虚二次拡大とし、 K の $\mathbb{C}$ への埋込みを $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_r$ とし、 $\operatorname{Gal}(K/F) = \{\alpha, \rho\}$ とする。 N を F の階数 r の自由 $\mathbb{Z}$ -部分加群とし、 T を K -係数の s 次正定行列で、 ${}^tT = T$, $T^{\rho} = -T$, $-\sqrt{-1}T_i(T)$ が正 Hermite 行列となるものとする。このとき、

T は歪 p -対称形式 $E: K^s \times K^s \rightarrow F$ を $E(l_1, l_2) = \text{trace}_{K/F}(l_1 T l_2^p)$ で定める。 M は K^s の階数 $2rs$ の自由 $\mathbb{Z}$ -部分加群で、すべての $l, l' \in M$ に対し $E(l, l') \in N$ を満たすものとする。更に、 Γ は K の単数群の有限指数の自由部分群で、 M と N とを保つものとする。ここで、 Γ は相対ノルム $\text{norm}_{K/F}$ を通して N に作用するを考える。

埋込み $K \ni x \mapsto \sigma(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x)) \in \mathbb{C}^r$ により、 M は $\mathbb{C}^{rs}$ の格子、 N は $\mathbb{R}^r$ の格子とみなす。 Hermitian 形式 $H: M_{\mathbb{R}} \times M_{\mathbb{R}} \rightarrow N_{\mathbb{C}}$ を $H(l_1, l_2) = E(l_1, \sqrt{t} l_2) + \sqrt{t} E(l_1, l_2)$ で定めると、 H は

(i) $H(l, l) \in C_+$ $\forall l \in M_{\mathbb{R}}$, $C_+ = (\mathbb{R}_{>0})^r$ は $N_{\mathbb{R}}$ 内の錐。

(ii) $H(l, l) = 0$ ならば $l = 0$ 。

を満たす。 $\mathcal{O} = \{(\varepsilon, u) \in N_{\mathbb{C}} \times M_{\mathbb{R}}; 2 \text{Im } \varepsilon - H(u, u) \in C_+\}$ とおくと、 $\mathcal{O}$ は $(B_{\text{SH}})^r$ と双正則となる。一方、 $\text{norm}_{K/F}(\Gamma)$ は F の単数群の指数有限な部分群だから、超曲面 $\{(x_1, \dots, x_r) \in N_{\mathbb{R}}; \prod_{i=1}^r x_i = 1\}$ の格子である。従って、 Γ の $C_+/\mathbb{R}_{>0}$ への作用は固有不連続かつ固定点なしであり、その商空間はコンパクトである。

以上により (N, C_+, M, Γ) は $[O_2]$ の §1 の条件を満たすことが判る。正規孤立特異点 (V, p) が得られる。構成から、

$V \setminus \{p\} \cong \mathcal{O} / N \cdot M \cdot \Gamma$ だから、 (V, p) は ball-product カスプ特異点である。

2. N, M, H, Γ を §1 と同じものとする。実解析的写像

$\tilde{\Phi}: N_{\mathbb{C}} \times M_{\mathbb{R}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ を $\tilde{\Phi}(z, u) = 2 \operatorname{Im} z - H(u, u)$ により定義する。

$\tilde{\Phi}$ は M, N の作用で不変だから, $\Phi: T_N \times M_{\mathbb{R}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ と $\bar{\Phi}: (T_N \times M_{\mathbb{R}})/M \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ を誘導する。ここに, $T_N = N_{\mathbb{C}}/N$ は r 次元代数トラス

$(T_N \times M_{\mathbb{R}})/M$ はアベル多様体 $A = M_{\mathbb{R}}/M$ 上の主 T_N -束である。

$\bar{\Phi}$ は Γ -同変である。 $C_{\pm} = (\mathbb{R}_{>0})^{r-1} \times \mathbb{R}_{<0}$ を $N_{\mathbb{R}}$ の開錐とする。

$\Delta_{\pm}$ を $C_{\pm} \cap N$ の凸包の境界の多面体分割から得られる非特異 Γ -admissible 扇とする。 $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ とおく。扇に対するトラス埋込みを $T_N \operatorname{emb}(\Delta)$ とする。 T_N -束に付随する束

$$Z := (T_N \operatorname{emb}(\Delta) \times M_{\mathbb{R}})/M$$

を作り, $\bar{\Phi}$ を $Z \rightarrow M_{\mathbb{C}}(N, \Delta)$ に拡張する。 $M_{\mathbb{C}}(N, \Delta)$ は角付き多様体である。 $C = (\mathbb{R}_{>0})^{r-1} \times \mathbb{R}$ とおき, $\hat{C}$ を $M_{\mathbb{C}}(N, \Delta)$ 内での C の閉包の内部とする。 $U := \bar{\Phi}^{-1}(\hat{C})$, $\hat{Y} := U \setminus \bar{\Phi}^{-1}(C)$ とおく。

$\hat{Y}$ は 2 つの連結成分 $\hat{Y}_{\pm} = \hat{Y} \setminus \bar{\Phi}^{-1}(C_{\mp})$ に分れる。

補題 2.1. Γ の U と $\hat{Y}_{\pm}$ への作用は固有不連続かつ固定点なしであり, 商空間 $X = U/\Gamma$ はコンパクト, $Y_{\pm} = \hat{Y}_{\pm}/\Gamma$ は X 上の因子である。 $Y = \hat{Y}/\Gamma = Y_+ \cup Y_-$.

補題 2.2. $\pi_1(X) \cong M \rtimes \Gamma$, $H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \Gamma$.

補題 2.3. (i) $H^0(X, \Omega_X^1 / \log Y) = 0$. 従って, $H^0(X, \Omega_X^1) = 0$.

(ii) $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) \geq r-1$.

定理 上で構成したコンパクト複素多様体 X は η - τ -計量を持ち得ない。更に、因子 Y_i は正規孤立特異点 (V, p) につづれる。

命題 2.4. $K_X = -Y$.

命題 2.5. $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ を既約成分への分解とすると、 X の Chern 類は

$$c(X) = \prod_{i \in I} (1 + c_1(\mathcal{O}_X(Y_i)))$$

と書ける。

系 $c_k(X) = 0$ ($k \geq r+1$). 特に, Euler 数 $e(X) = 0$.

命題 2.6. $\chi(\mathcal{O}_X) = 2^{-r(s+1)} \tau(X)$. ここに $\tau(X)$ は X の指数, つまり, $H^{r(s+1)}(X, \mathbb{Z})$ 上にカップ積で決まる 2 次形式の指数である。

参考文献

- [O] S. Ogata, Infinitesimal deformations of generalized cusp singularities, Tohoku Math. J. 39(1987), 237-248.
- [S] G.K. Sankaran, Higher dimensional analogues of Inoue-Hirzebruch surfaces, Math. Ann. 276(1987), 515-528.