

# プラズマにおける高次元局在構造とその安定性について

東大工 西成活裕、矢嶋徹

## 1. はじめに

プラズマは非線形現象の宝庫である。それゆえ解析的取り扱いには特殊な場合を除いて困難であり、まだよく分かっていない現象も多い。したがって本質的な非線形現象は数値シミュレーションがその研究の主体になっている。これに対して近年、非線形のダイナミクスを解析的に扱うソリトン理論が発達してきた。この理論はこれまで、主に空間1次元のダイナミクスの解析に成功していたが、最近空間2次元以上での新しいソリトン理論の成果が出てきた。これらの成果は現在、一部の数理学者の中だけでとどまっており、これらの応用は未知数である。これらの新しい概念や手法を用いて基礎的側面からプラズマの非線形現象を解析し、その応用の可能性を探ってゆきたい。今回は、イオン波の高次元非線形ダイナミクスに関してソリトン理論を用いて様々な角度から解析してゆく。

## 2. 基礎方程式とドロミオン

イオン運動に対して流体の方程式を用いる。イオンの運動のスケールを考えているので、電子はボルツマン分布をしていると考えられる。さらに、イオンの温度は一般に電子の温度に比べて低いのでその効果を見捨てる。この状況を記述する無次元化された方程式系は、連続、運動、ポアソン方程式で、

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} &= -\text{grad}\phi + a(\mathbf{v} \times \mathbf{b}) \\ \Delta\phi &= \exp\phi - n\end{aligned}$$

となる。ここで、 $n, \mathbf{v}$ はそれぞれ、イオンの密度、速度であり、 $\phi$ は静電ポテンシャル、 $\mathbf{b}=(1,0,0)$ は外磁場を表す。また、 $a = \frac{\omega_i}{\Omega_i}$ であり、 $\omega_i = \frac{ZeB_0}{Mc}$  (イオンサイクロトロン振動数)、 $\Omega_i^2 = \frac{4\pi n_0 Ze}{M}$  (イオンプラズマ振動数) の比を表す。

この系に関しては線形モードは2つ存在し、低周波と高周波のモードがある。低周波のモードについてこれまでにたくさんの研究がなされており、その非線形のダイナミクスを表すものとして有名なKP方程式や、ZK方程式が導かれている。特にZK方程式については3次元空間に局在する安定な解の存在が知られており、プラズマのダイナミクスと絡んで興味を持たれている<sup>[1]</sup>。

しかし、高周波のモードについてはこれまであまり研究がなく、今回はこのモードの解析に焦点を当てた。

この系に、はじめ定常状態からある波数を持つイオン波を励起する。この波の振幅の包絡線の変調を記述する式を導出しよう。それには、物理量 $n, \mathbf{v}$ や $\phi$ をその定常値のまわりで $\varepsilon$ による展開をして基礎方程式に代入し、各 $\varepsilon$ の次数ごとに式をまとめて閉じ

た式を求めてゆけばよい（通減摂動法）。今回考えるのは比較的高周波のモードであり、包絡線変調を見るためある波数のキャリア波で展開する。

波の群速度で動く系から見ると包絡線の変調はゆるやかなので、 $\xi = \varepsilon(x - V_g t)$ ,  $\eta = \varepsilon(x - V_g t)$ ,  $\zeta = \varepsilon z$ ,  $\tau = \varepsilon' t$  という変数を導入し、振幅を

$$n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-\infty}^{\infty} n_l^{(n)}(\xi, \eta, \zeta, \tau) \exp \left[ i l (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \right]$$

という形で展開する「2」。

ただし、外磁場と波数ベクトル  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$  で張られる面を  $x-y$  平面とし、外磁場  $B_0$  を  $x$  軸方向に取って考える。

$\varepsilon$  の 1 次の関係式より、線形分散関係式

$$\omega^4 - \left( 1 + \frac{|\mathbf{k}|^2}{1 + |\mathbf{k}|^2} \right) \omega^2 + a^2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{k})^2 \left( \frac{1}{1 + |\mathbf{k}|^2} \right) = 0$$

を得る。そしてさらに  $\varepsilon$  の 3 次まで計算すると次の閉じた連立非線形方程式「2」

$$iA_t + c_1 A_{\xi\xi} + c_2 A_{\eta\eta} + c_3 A_{\zeta\zeta} + c_4 A_{\xi\eta} + c_5 |A|^2 A + c_6 QA = 0$$

$$(1 - v_{gx}^2) Q_{\xi\xi} - 2v_{gx}v_{gy} Q_{\xi\eta} - v_{gy}^2 Q_{\eta\eta} + c_7 |A|_{\xi\xi}^2 + c_8 |A|_{\xi\eta}^2 + c_9 |A|_{\eta\eta}^2 = 0$$

を得る。ここで、 $A = n_1^{(1)}$ ,  $Q = n_0^{(2)} - \alpha v_{x0}^{(2)}$  であり、 $\alpha$  や  $C_i$  はキャリア波の波数や、磁場の大きさの関数であり、 $V_g$  は系の群速度である。

以下では系の  $\zeta$  依存性は無視して、 $z$  方向は一様として空間 2 次元で考えてゆく。

この方程式は、適当な独立変数の 1 次変換などによって、Davey-Stewartson (DS) 方程式といわれる  $(2+1)$  次元可積分方程式に帰着できることが分かる。この DS 方程式は最近ソリトン理論の発展により、新しい厳密解がいろいろ見つかった「3」。以下、これらのソリトン理論の成果も利用して、このイオン波の高次元非線形ダイナミクスを物理的に解析してゆこう。

外部から定磁場がかかっているときのイオン波の振る舞いについては、キャリア波の方向と磁場とのなす角度によって一般にその性質は変化する。ここでは、キャリア波が磁場に対して垂直に伝播するときについて考えよう。ただしこのときは、厳密にはポアソン方程式は使えなくなる。なぜならイオンのラーマー半径に比べて電子のそれは小さいので、電子は、磁力線に沿った方向以外ではボルツマン分布ができないからである。よって、垂直からのずれがイオンと電子の熱速度の比程度以上でないとポアソン方程式は成立しない。だが、この比はかなり小さく、今回の摂動論の範囲内ではゼロとみなせるので、垂直伝播をこの意味で考えてゆけることになる。

このとき、先ほどの方程式は

$$iA_t + \sigma_1 A_{xx} + \sigma_2 A_{yy} + \sigma_3 |A|^2 A + \sigma_4 AQ = 0$$

$$Q_{xx} + \delta_1 Q_{yy} + \delta_2 (|A|^2)_{xx} = 0$$

となる。ただし $\sigma_i, \delta_i$ は、波数 $k_y$ と磁場の大きさとイオン密度の比を表わすパラメーター $a$ の関数である。<sup>[3]</sup> 今度は方程式はDS方程式の標準形になっている。興味深いのは $A$ の時間発展の方が楕円型、 $Q$ の方が双曲型るときである。このときはDS1型と言われ、2次元空間に局在するソリトン解があることが最近示されている<sup>[3]</sup>。これはドロミオンと言われ、このDS1型に特有な厳密解で現在までで高次元における局在モードソリトンの唯一の例である。

この解は数理的に導出されたものであるが、物理的に考えた場合、どういう時にどのようなメカニズムで生まれ得るのかを以下調べてゆく。

まず、この方程式の平面波解の安定性について考えてみよう。  
平面波解は

$$A = A_0 \exp i(p_1 x + p_2 y - \omega t + \theta_0), \quad Q = Q_0$$

である。ただし分散 $\omega = \sigma_1 p_1^2 + \sigma_2 p_2^2 - \sigma_3 A_0^2 - \sigma_4 Q_0$ を満たす。この解の振幅と位相に変調を加える。これは $A', \theta', Q' \sim \exp i(\mu_1 x + \mu_2 y - \nu t)$ として

$$A = (A_0 + A') \exp i(p_1 x + p_2 y - \omega t + \theta_0 + \theta'), \quad Q = Q_0 + Q'$$

とする。

ここで、 $\nu$ に虚部が生じない条件より、次の変調安定条件

$$-(\mu_1^2 \sigma_1 + \mu_2^2 \sigma_2) \left( -\mu_1^2 \sigma_1 - \mu_2^2 \sigma_2 + 2\sigma_3 A_0^2 - 2A_0^2 \sigma_4 \frac{\mu_1^2 \delta_2}{\delta_1 \mu_2^2 + \mu_1^2} \right) > 0$$

を得る。ここで、さらに長波変調について考えよう。

1)  $\mu_2 = 0, \mu_1 \rightarrow 0$ のとき (自己集束、横不安定性)

$$-\sigma_1(\sigma_3 - \sigma_4 \delta_2) > 0$$

2)  $\mu_1 = 0, \mu_2 \rightarrow 0$ のとき (自己捕捉、縦不安定性)

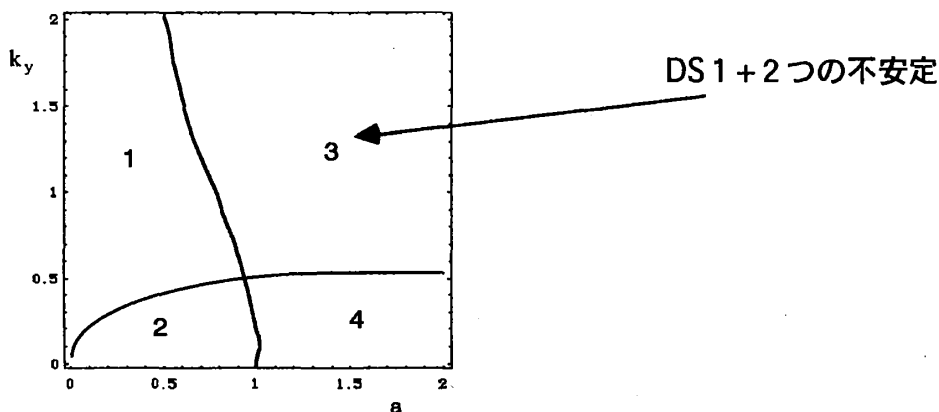
$$-\sigma_2 \sigma_3 > 0$$

さて、次にこの方程式がDS1になり得る条件について見てみよう。それは、

$$\sigma_1 \sigma_2 > 0$$

であることが分かる。(つねに $\delta_2 < 0$ であり、あとは $A_{xx}$ と $A_{yy}$ の符号が等しければよいから。)

以上3つの不等式を実際の係数を当てはめて図示すると下図になる。



ここで、横軸は磁場の大きさとイオン密度の比を表わすパラメーター $a$ であり、縦軸はキャリア波の波数 $k_y$ である。そして、

自己集束不安定.....領域3、4

自己捕捉不安定.....領域1、3

DS 1 条件.....領域 2、3

となることが分かる。これらより以下の重要な結論に達する。

領域3で自己集束と自己捕捉が同時に起こりうることは、つまり横と縦から平面波が同時に狭くなり成長していくことである。そして、いずれ非線形飽和が起こるので局在構造の形成の可能性がある。しかも領域3ではこの2つの不安定性が起こると同時に、方程式がDS 1 条件を満たす。つまり、この領域で適当な境界条件を外から与えてやれば、この局在構造はドロミオンになり得る可能性があると思われる。以上がこの系でのドロミオンの物理的解釈である。

### 3. 局在構造の安定性について

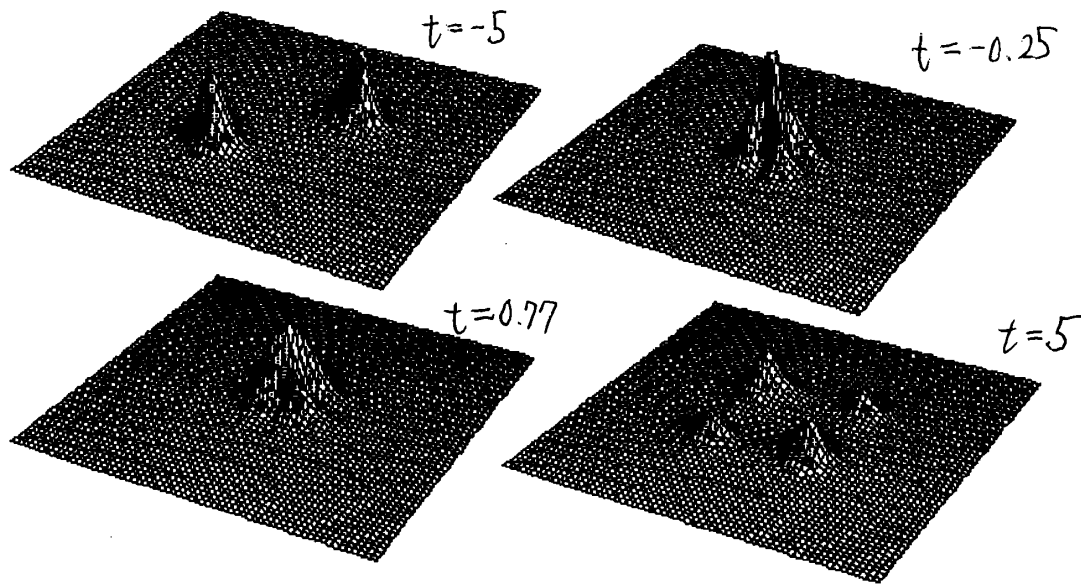
さて、このドロミオン解は果たしてどの程度安定なのであろうか、という問題がある。厳密解があるからといってそれは安定であるとは限らない。ドロミオンが現実を観測され、応用されるためにはKdVやNLS方程式のソリトンのようにかなりの安定性が必要である。これら1次元のソリトンはお互い同士の衝突に対しても安定である。ドロミオンについてこれらのことを調べよう。

小さな擾乱に対する解の安定性は通常解析的に取り扱える。それは直接摂動法を用いるか、リャプノフの方法がある。前者は、一般的であるが途中で変係数の線形微分方程式を解かなくてはならない。これはいつもできるとは限らない。後者は考えている方程式がハミルトニアンを持つときには強力な手法である<sup>「4」</sup>。しかし、ドロミオン解の時のDS 1 方程式はハミルトニアンが存在しない<sup>「5」</sup>、<sup>「6」</sup>。さらに今回はドロミオン同士の衝突にたいする安定性を調べることもあり、このような場合には摂動法は使えない。よって、数値計算によってその安定性を様々な角度から調べることにする。ひとつ注意しておくのは、ドロミオン同士の衝突を表す多ドロミオンの厳密解が解析的にきちんと求められているが、今回我々が数値計算で調べたい衝突はこれではなく、2つの1ドロミオン解の単なる重ね合わせによる衝突を考えたいということである。この状況はもちろん厳密解とは振る舞いは異なり、前述の通り数値計算でしか取り扱えないものである。

数値計算は高精度で行われなくてはならない。そのため、NLS型に相性のいい擬スペクトル法を用いて、時間発展は適応刻み幅制御付きのBS法を用いた。

まず、単なる1ドロミオン解を走らせてみた結果は、小さな擾乱に対してはリャプノフの意味で安定に走ることが分かった<sup>「5」</sup>。

次に衝突に対する安定性であるが、このときは衝突後も個性を保つわけではなく途中で非弾性散乱をして2個のドロミオンが最終的に4つの安定なパルスになることが分かった。衝突後に完全に散乱して局在構造が消えてしまうというわけではなく、2個が4個になるという普遍的な法則があることが分かった。さらにこの衝突途中にはパルスの一定周期の振動があり、この周期とドロミオンの相対速度のかねあいでは4つのパルスへの別れ方が決まることが判明した<sup>「6」</sup>。このようなことは多ドロミオンの厳密解から予測するのは困難である。以上のことによりこの解はある意味でかなりの安定性を持つといつてよいと考えられる。



ドロミオンの衝突

#### 4. まとめ

本論文では静電イオン波の高次元ダイナミクスをソリトン理論を用いて解析した。そして縦磁場中を垂直に伝播する静電イオンサイクロトロン波についてはその方程式のタイプがDS 1型になり得ることが分かった。この型の方程式は現在まで水の波の表面波でしか理論的に導かれていなかったが、今回これをプラズマ物理で導出することに成功した。そしてこの方程式特有の厳密解であるドロミオンは、物理的には変調不安定と自己集束が同時に起こり、それが非線形飽和してできる局在構造である、という解釈を得た。ドロミオンといわれる高次元局在構造は、全く新しい概念の非線形現象であり、これからの応用が期待される。

次にこの構造の安定性であるが、これも様々な角度からの数値計算を行った結果、安定であることが結論できた。このドロミオン同士の衝突に関する計算では、始め2つのドロミオンが衝突の結果4つに分かれることが分かった。この一種の非弾性散乱は理論的に見ても興味深いものであると思われる。

#### 5. 参考文献

- [1] V.E.Zakharov and E.A.Kuznetsov, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 66 (1974) 594.
- [2] K.Nishinari, K. Abe and J.Satsuma, Phys. Plasmas, 1 (1994) 2559.
- [3] M.Boiti, J.J.-P.Leon, L.Martina and F.Pempinelli, Phys.Lett.A 132 (1988) 432.
- [4] E.A.Kuznetsov, A.M.Rubenchik and V.E.Zakharov, Phys.Rep. 142 (1986) 103.
- [5] K.Nishinari and T.Yajima, to be published in J. Phys. Soc. Jpn.
- [6] K.Nishinari and T.Yajima, preprint.