

2-multiarrangements の exponents について

若神子 篤史 (Atsushi Wakamiko)

北海道大学 理学研究科 数学専攻

Department of Mathematics, Hokkaido University

概要. 近年, G. M. Ziegler [Zi] に始まる多重配置の概念は, 超平面配置という分野, 特に自由性を扱う部分において, その有効性を示しつつある. 例えば, M. Yoshinaga [Yo2] では, 3 次元の超平面配置 $\mathcal{A}$ の自由性を, その特性多項式と呼ばれるものと, 超平面 $H \in \mathcal{A}$ に“制限”して得られる H 内の多重配置 $(\mathcal{A}^H, k)$ の冪指数を用いて記述している. [Wa] では, この結果の重要性を認識し, 2 次元多重配置の冪指数を, とても重要な量であると捉え, その“決定”に取り組んだ. 実際は, 3 本の直線 (2 次元空間の中の超平面) からなる, 2 次元多重配置を扱っている. 本紙では, RIMS における講演¹を基に, [Wa] で得られた結果, 及びその説明を与えていく.

Key word : multiarrangement, exponents, generalized binomial coefficient, Schur function.

1 超平面配置からの準備

まず, 超平面配置に関する用語・記号を準備していく. V を, 標数 0 の体 K 上の ℓ ($\in \mathbb{Z}_{>0}$) 次元ベクトル空間とし, V の双対空間 V^* の対称代数を $S = S(V^*)$ で表す事にする. また, Der_S で, S 上の K -導分全体のなす S -加群を表す事にする. $(x_1, \dots, x_\ell)$ を V^* の K -基底とすれば, $S = K[x_1, \dots, x_\ell]$ であり, $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\ell})$ は, Der_S の基底を与える. 但し, $\frac{\partial}{\partial x_j}: S \rightarrow S$ は x_j に関する偏微分作用素である. この作用素の次数を 0 とし, Der_S に次数加群の構造を与えておく.

$\mathcal{A}$ を V 内の超平面配置 (arrangement), 即ち V の超平面 (hyperplane) の有限集合とする. 但し, ここでは, V の余次元 1 の線型部分空間を超平面と呼ぶ事にする. 各 hyperplane $H \in \mathcal{A}$ に, 自然数を対応させる写像 $k: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\mathcal{A}$ 上の重複度 (multiplicity) と呼び, $\mathcal{A}$ と multiplicity k との組 $(\mathcal{A}, k)$ を, V 内の多重配置 (multiarrangement) と呼ぶ (G. M. Ziegler [Zi]). 典型的な例として, arrangement $\mathcal{A}$ の hyperplane $H \in \mathcal{A}$ への“制限” $(\mathcal{A}^H, k)$ がある. 但し, $\mathcal{A}^H := \{ H' \cap H \mid H' \in \mathcal{A} \setminus \{H\} \}$, その上の multiplicity $k: \mathcal{A}^H \rightarrow \mathbb{N}$ は, $k(X) := \#\{ H' \in \mathcal{A} \setminus \{H\} \mid H' \cap H = X \}$ で与えられている. 今後, V 内の (multi)arrangement を “ ℓ -(multi)arrangement” と呼ぶことにする. ℓ -multiarrangement $(\mathcal{A}, k)$ に対し, 多項式 $Q(\mathcal{A}, k) \in S$ を

$$Q(\mathcal{A}, k) := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{k(H)}$$

で定める. 但し, 超平面 H に対し, 線型形式 $\alpha_H \in V^*$ は H の定義式である: $\ker \alpha_H = H$. $H \subseteq V$ を超平面とし, m を自然数とする. 導分 $\theta \in \text{Der}_S$ が, “ $\theta(\alpha_H) \in \alpha_H^m S$ ” を満たす

¹RIMS 研究集会: Recent Topics on Real and Complex Singularities, 2005 年 11 月 28 日

とき, “ θ は, H に m 重に接する” と表現する. また, $(\mathcal{A}, k)$ を ℓ -multiarrangement としたとき, 各 $H \in \mathcal{A}$ に, $k(H)$ 重に接するような $\theta \in \text{Der}_S$ を “ $(\mathcal{A}, k)$ に接する” と表現し, その全体を $D(\mathcal{A}, k)$ で表すことにする:

$$D(\mathcal{A}, k) := \{ \theta \in \text{Der}_S \mid \theta(\alpha_H) \in \alpha_H^{k(H)} S \ (\forall H \in \mathcal{A}) \}.$$

これは, Der_S の斉次部分加群である. この加群 $D(\mathcal{A}, k)$ が S -加群として自由である時, multiarrangement $(\mathcal{A}, k)$ は自由 (free) であるという. この時, $D(\mathcal{A}, k)$ の rank は $\dim_{\mathbf{K}} V = \ell$ に等しく, 斉次基底 (= 斉次元からなる基底) $\theta_1, \dots, \theta_\ell$ が取れる. 斉次元 θ_j の次数 $\deg \theta_j$ を free multiarrangement $(\mathcal{A}, k)$ の冪指数 (exponent) と呼び, 多重集合 $[\deg \theta_1, \dots, \deg \theta_\ell]$ を $\exp(\mathcal{A}, k)$ で表す. (これは, 斉次基底 $(\theta_1, \dots, \theta_\ell)$ の取り方に依らないで, $(\mathcal{A}, k)$ だけによって定まる量である. また, この多重集合を “冪指数達” という意味合いを含めて, “exponents” と呼ぶことにする.) さて, 2 次元の multiarrangement に関しては, G. M. Ziegler [Zi, Corollary 7] によって, いつもその freeness が保障されている:

定理 1.1 任意の 2-multiarrangement $(\mathcal{A}, k)$ は free である.

即ち, 2-multiarrangement に関しては, 必ずその exponents が定まるわけである. [Wa] では, $|\mathcal{A}| = 3$ であるような, 任意の 2-multiarrangement $(\mathcal{A}, k)$ に対して, その exponents を求め, もっと具体的に, $D(\mathcal{A}, k)$ の斉次基底を構成している. その基底を記述するものとして, “一般二項係数” と呼ばれるものが用いられる. 次節で, I. G. Macdonald [Ma] に従い, 一般二項係数を導入し, [Wa] における主定理を述べる.

2 主定理

定義 2.1 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ を数の分割 (partition) とする: (1) $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ は自然数の減少列で, (2) “ $n > N \Rightarrow \lambda_n = 0$ ” を満たす $N \in \mathbf{Z}_{>0}$ が存在. この時, 多項式 $\binom{X}{\lambda} \in \mathbf{Q}[X]$ を

$$\binom{X}{\lambda} := \prod_{P \in \mathbf{Y}(\lambda)} \frac{X - c(P)}{h_\lambda(P)} \quad (2.1)$$

で定め, このような多項式を一般二項係数 (generalized binomial coefficient) と呼ぶ.

式 (2.1) に出てくる記号, $\mathbf{Y}(\lambda)$, $c(P)$, $h_\lambda(P)$ は以下の通りである:

- $\mathbf{Y}(\lambda) = \{ (i, j) \in \mathbf{Z}_{>0}^2 \mid j \leq \lambda_i \}.$
- $c(P) = j - i. (P = (i, j) \in \mathbf{Z}_{>0}^2.)$
- $h_\lambda(P) := |\mathbf{Y}(\lambda) \cap H_P|.$ 但し, H_P は $P = (i_0, j_0) \in \mathbf{Z}_{>0}^2$ を直角とする “hook” である: $H_P = \{ (i_0, j) \mid j_0 \leq j \in \mathbf{Z}_{>0} \} \cup \{ (i, j_0) \mid i_0 \leq i \in \mathbf{Z}_{>0} \}.$

$\mathbf{Y}(\lambda)$ は partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ のヤング図形 (Young diagram) と呼ばれるもので, これを λ_1 個, λ_2 個, $\dots$ の正方形を並べて表現したりすることがある. また, $h_\lambda: \mathbf{Z}_{>0}^2 \rightarrow \mathbf{N}$

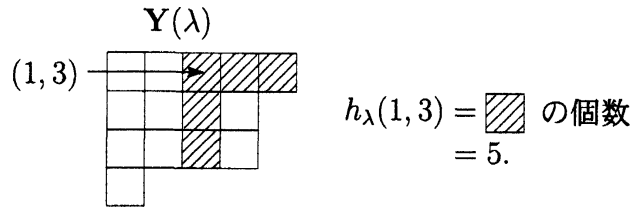


図 2.1: the hook length function h_λ

は hook length function と呼ばれる事がある. (例. $\lambda = (5, 4, 4, 1) = (5, 4, 4, 1, 0, 0, \dots)$ の時, $h_\lambda(1, 3) = 5$ である. 図 2.1 を参照.)

“一般二項係数”と表現する理由. n を自然数とし, $\lambda := (n, 0, 0, \dots)$ と置く. この時, partition λ の定める一般二項係数を定義に従って求めると,

$$\binom{X}{\lambda} = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} = \binom{X}{n}$$

となり, 通常の二項係数に一致する. 即ち, $n \mapsto (n, 0, 0, \dots)$ なる対応によって, 自然数 $n \in \mathbb{N}$ を特別な partition だとみなした時, 定義 2.1 は, $\binom{X}{\lambda}$ の定義を, 任意の partition λ に拡張したものだと考えられる. そこで, この多項式を “一般二項係数” と呼んでいる.

以下, $\mathbf{K}$ -ベクトル空間 V の次元は 2 であるとし, 引き続き S で V^* の対称代数, Der_S で S 上の $\mathbf{K}$ -導分全体を表す事にする. 主定理を述べる為に記号をいくつか準備する:

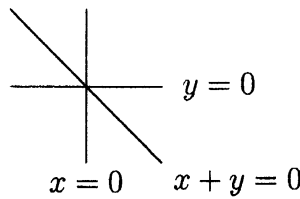
- $|k| := k_1 + k_2 + k_3$. ($k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$.)
- $\mathbf{Z}_k := \{ q \in \mathbb{Z} \mid (|k| - 1)/2 \leq q \leq k_1 + k_2 - 1 \}$. ($k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$.)
- $\begin{cases} r_{k,q} := k_1 + k_2 - q - 1 \\ s_{k,q} := k_1 + k_3 - q - 1 \end{cases}$. ($k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3, q \in \mathbb{Z}$.)
- $\mathbf{N}_0^3 := \{ k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3 \mid \max\{k_1, k_2\} \leq k_3 \}$.

$\Sigma = (x, y)$ を V^* の $\mathbf{K}$ -基底とする. $q \in \mathbf{Z}_k$ を満たす, 各 $(k, q) \in \mathbf{N}_0^3 \times \mathbb{Z}$ に対して, q 次の導分

$$\left(\sum_{j=1}^{q-k_1+1} \binom{k_3}{\lambda_{k,q}^{(j)}} x^{q+1-j} y^{j-1} \right) \frac{\partial}{\partial x} + (-1)^{r_{k,q}} \left(\sum_{j=k_2+1}^{|k|-q} \binom{k_3}{\lambda_{k,q}^{(j)}} x^{q+1-j} y^{j-1} \right) \frac{\partial}{\partial y}$$

を $\theta_\Sigma(k, q)$ と置く. 但し, $\lambda_{k,q}^{(j)}$ は以下のような partitions である:

$$\lambda_{k,q}^{(j)} := \begin{cases} (k_3 - j + 1, \underbrace{s_{k,q} + 1, \dots, s_{k,q} + 1}_{r_{k,q}}) & j = 1, \dots, q - k_1 + 1, \\ (\underbrace{s_{k,q}, \dots, s_{k,q}}_{r_{k,q}}, |k| - q - j) & j = k_2 + 1, \dots, |k| - q. \end{cases}$$

図 2.2: 2-arrangement $\mathcal{A}_\Sigma$

V^* の $\mathbf{K}$ -基底 $\Sigma = (x, y)$ に対し, $\mathcal{A}_\Sigma := \{ \ker x, \ker y, \ker(x+y) \}$ と定める. 更に, $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbf{N}_0^3$ に対して, $\ker x \mapsto k_1$, $\ker y \mapsto k_2$, $\ker(x+y) \mapsto k_3$ で定められる $\mathcal{A}_\Sigma$ 上の multiarrangement を $\mathcal{A}_{\Sigma, k}$ で表す. 任意の 2-multiarrangement は, V^* の $\mathbf{K}$ -基底を “上手く” 取る事により, $\mathcal{A}_{\Sigma, k}$ ($k \in \mathbf{N}_0^3$) と書ける事に注意する. (言い換えれば, $\mathcal{A}_{\Sigma, k}$ という表示は, 3 本の直線からなる 2-multiarrangement の表示として一般性を失わない, という事ができる.) 次が [Wa] における主定理である:

定理 2.2 ([Wa], Theorems 1.2 and 3.12) $\Sigma = (x, y)$ を V^* の $\mathbf{K}$ -基底とする. $\mathbf{N}_0^3$ の元 $k = (k_1, k_2, k_3)$ を任意に取り, $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_{\Sigma, k}$ と置く.

(i) $k_1 + k_2 - 1 \leq k_3$ の時. この時, $\exp(\tilde{\mathcal{A}}) = [k_3, k_1 + k_2]$ で,

$$\left(f \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial y}, x^{k_1} y^{k_2} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \right)$$

は $D(\tilde{\mathcal{A}})$ の斉次基底を与える. 但し $f = \sum_{j=k_1}^{k_3} \binom{k_3}{j} x^j y^{k_3-j}$, $g = \sum_{j=0}^{k_1-1} \binom{k_3}{j} x^j y^{k_3-j}$.

(ii) $k_3 < k_1 + k_2 - 1$ の時. この時, $\exp(\tilde{\mathcal{A}}) = [\lfloor |k|/2 \rfloor, \lceil |k|/2 \rceil]$ で, $|k|$ が偶数の時は,

$$\left(\theta_\Sigma(k, \lfloor |k|/2 \rfloor), \theta_\Sigma(k', \lceil |k|/2 \rceil) \right)$$

が $D(\tilde{\mathcal{A}})$ の斉次基底を与え, $|k|$ が奇数の時は,

$$\left(\theta_\Sigma(k, \lfloor |k|/2 \rfloor), \theta_\Sigma(k, \lceil |k|/2 \rceil) \right)$$

が $D(\tilde{\mathcal{A}})$ の斉次基底を与える. 但し, $k' = k + (0, 0, 1) \in \mathbf{N}_0^3$. また, 実数 $a \in \mathbf{R}$ に対して, $\lfloor a \rfloor := \max\{ m \in \mathbf{Z} \mid m \leq a \}$, $\lceil a \rceil := \min\{ m \in \mathbf{Z} \mid a \leq m \}$ である.

上の定理の (i) ($k_1 + k_2 - 1 \leq k_3$ の場合) は, 通常 “二項定理” と呼ばれる定理から, 直ちに示されるものである. その証明を与えておく.

定理 2.2 (i) の証明. $\theta_1 := f \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial y}$, $\theta_2 := x^{k_1} y^{k_2} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right)$ と置く. まず, f の定義より, θ_1 が直線 $x = 0$ に k_1 重に接する事が言える: $\theta_1(x) = f \in x^{k_1} S$. また, 仮定 $k_1 + k_2 - 1 \leq k_3$ より, “ $j < k_1 \Rightarrow k_2 \leq k_3 - j$ ” が成立つ. 故に, θ_1 は $y = 0$ に k_2 重に接する: $\theta_1(y) = g \in y^{k_2} S$. 更に, 二項定理から, $\theta_1(x+y) = f + g = (x+y)^{k_3}$ が言える. 結局 θ_1 が multiarrangement $\mathcal{A}_{\Sigma, k}$ に接することが示せた. 同様に, $\theta_2 \in D(\mathcal{A}_{\Sigma, k})$ である事も容易に示せる: $\theta_2(x) = -x^{k_1} y^{k_2}$, $\theta_2(y) = x^{k_1} y^{k_2}$, $\theta_2(x+y) = 0$.

ここで, 自由性に関する判定法, Saito's criterion [OT, Theorem 4.19], [Sa1, p.270] の “multi-version” とでも言うべき, 以下の判定法を用意しておく:

定理 2.3 (Ziegler's criterion [Zi]) $(\mathcal{A}, k)$ を ℓ -multiarrangement とし, $\theta_1, \dots, \theta_\ell$ を $(\mathcal{A}, k)$ に接する導分とする: $\theta_1, \dots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A}, k)$. この時,

$$\theta_1, \dots, \theta_\ell : \text{a basis for } D(\mathcal{A}, k) \iff \det(\theta_j(x_i))_{ij} \neq 0.$$

但し, $(x_1, \dots, x_\ell)$ は V^* の $\mathbf{K}$ -基底. 行列 $(\theta_j(x_i))_{ij}$ は $\theta_1, \dots, \theta_\ell$ の (基底 $(x_1, \dots, x_\ell)$ に関する) “係数行列” と呼ばれるものである. これを $M(\theta_1, \dots, \theta_\ell)$ などと記す. ■

さて, θ_1, θ_2 の係数行列 $M(\theta_1, \theta_2)$ の行列式を計算すると,

$$\det M(\theta_1, \theta_2) = x^{k_1} y^{k_2} \begin{vmatrix} f & -1 \\ g & 1 \end{vmatrix} = x^{k_1} y^{k_2} (x + y)^{k_3}.$$

故に, 定理 2.3 (Ziegler's criterion) より, θ_1, θ_2 は $D(\mathcal{A}_{\Sigma, k})$ の斉次基底である. ■

$k_3 < k_1 + k_2 - 1$ の場合では, 二項定理を使った今の議論が使えない. 定理 2.2 の (ii) は, 一般二項係数を用いて, 言わば “二項定理の一般化” みたいなものを与えてる, といってもよいかもしれない. (ii) の証明の概要は, 後で与える事にして, 二つほど具体例を見ていく.

例 2.4 $k = (4, 4, 4)$ の時. この時, $|k|/2 = 6$, $r_{k,6} = r_{k',6} = 1$, $s_{k,6} = 1$, $s_{k',6} = 2$ で, 更に

$$\lambda_j := \lambda_{k,6}^{(j)} = \begin{cases} (5-j, 2) & \text{if } j = 1, 2, 3 \\ (1, 6-j) & \text{if } j = 5, 6 \end{cases}, \quad \mu_j := \lambda_{k',6}^{(j)} = \begin{cases} (6-j, 3) & \text{if } j = 1, 2, 3 \\ (2, 7-j) & \text{if } j = 5, 6, 7 \end{cases},$$

である. 但し, $k' = k + (0, 0, 1)$ である. 定理 2.2 より, $\theta_1 = \theta_\Sigma(k, 6)$, $\theta_2 = \theta_\Sigma(k', 6)$ は $D(\mathcal{A}_{\Sigma, k})$ の斉次基底を与える. 一般二項係数を求める事により, θ_1 の具体表示

$$\theta_1 = 2 \left\{ (3x^6 + 10x^5y + 10x^4y^2) \frac{\partial}{\partial x} - (5x^2y^4 + 2xy^5) \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

を得る. (図 2.3 参照. 各 $j = 1, 2, 3, 5, 6$ に対して, Young diagram $\mathbf{Y}(\lambda_j)$ が 2 個描かれている. 座標 $P \in \mathbf{Y}(\lambda_j)$ にある正方形の中の数字は, 上が $4 - c(P)$, 上が hook-length $h_{\lambda_j}(P)$ を表していて, 上の数字の総積を下の数字の総積で割った数字が $\binom{4}{\lambda_j}$ である.)

j	1	2	3	5	6																					
$4 - c(P)$	<table><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td></td><td></td></tr></table>	4	3	2	1	5	4			<table><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td></td></tr></table>	4	3	2	5	4		<table><tr><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td></tr></table>	4	3	5	4	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>5</td></tr></table>	4	5	<table><tr><td>4</td></tr></table>	4
4	3	2	1																							
5	4																									
4	3	2																								
5	4																									
4	3																									
5	4																									
4																										
5																										
4																										
$h_{\lambda_j}(P)$	<table><tr><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td></tr></table>	5	4	2	1	2	1			<table><tr><td>4</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td></td></tr></table>	4	3	1	2	1		<table><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	3	2	2	1	<table><tr><td>2</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	2	1	<table><tr><td>1</td></tr></table>	1
5	4	2	1																							
2	1																									
4	3	1																								
2	1																									
3	2																									
2	1																									
2																										
1																										
1																										
$\binom{4}{\lambda_j}$	6	20	20	10	4																					

図 2.3: Young diagrams $\mathbf{Y}(\lambda_{k,6}^{(j)})$

j	1	2	3	5	6	7																																		
$5 - c(P)$	<table><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td></td><td></td></tr></table>	5	4	3	2	1	6	5	4			<table><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td></td></tr></table>	5	4	3	2	6	5	4		<table><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr></table>	5	4	3	6	5	4	<table><tr><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td></tr></table>	5	4	6	5	<table><tr><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td></td></tr></table>	5	4	6		<table><tr><td>5</td><td>4</td></tr></table>	5	4
5	4	3	2	1																																				
6	5	4																																						
5	4	3	2																																					
6	5	4																																						
5	4	3																																						
6	5	4																																						
5	4																																							
6	5																																							
5	4																																							
6																																								
5	4																																							
$h_{\mu_j}(P)$	<table><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td></tr></table>	6	5	4	2	1	3	2	1			<table><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr></table>	5	4	3	1	3	2	1		<table><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	4	3	2	3	2	1	<table><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	3	2	2	1	<table><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr></table>	3	1	1		<table><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	2	1
6	5	4	2	1																																				
3	2	1																																						
5	4	3	1																																					
3	2	1																																						
4	3	2																																						
3	2	1																																						
3	2																																							
2	1																																							
3	1																																							
1																																								
2	1																																							
$\binom{5}{\mu_j}$	10	40	50	50	40	10																																		

図 2.4: Young diagrams $\mathbf{Y}(\lambda_{k',6}^{(j)})$

同様に, 一般二項係数 $\binom{5}{\mu_j}$ を計算する事により, θ_2 の具体表示

$$\theta_2 = 10 \left\{ (x^6 + 4x^5y + 5x^4y^2) \frac{\partial}{\partial x} - (5x^2y^4 + 4xy^5 + y^6) \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

を得る. (図 2.4 参照.) $\theta_1(x+y)$, $\theta_2(x+y)$ 及び, $\det \mathbf{M}(\theta_1, \theta_2)$ を計算 (因数分解) すると,

$$\begin{aligned} \theta_1(x+y) &= 2x(3x-2y)(x+y)^4, \\ \theta_2(x+y) &= 10(x-y)(x+y)^5, \\ \det \mathbf{M}(\theta_1, \theta_2) &= -200x^4y^4(x+y)^4. \end{aligned}$$

故に, Ziegler's criterion から, (θ_1, θ_2) が $D(\mathcal{A}_{\Sigma,k})$ の基底を与える事が確認できる. —

例 2.5 $k = (5, 5, 5)$ の時. この時, $\lfloor |k|/2 \rfloor = 7$, $\lceil |k|/2 \rceil = 8$, $r_{k,7} = s_{k,7} = 2$, $r_{k,8} = s_{k,8} = 1$ で, 更に

$$\lambda_j := \lambda_{k,7}^{(j)} = \begin{cases} (6-j, 3, 3) & \text{if } j = 1, 2, 3 \\ (2, 2, 8-j) & \text{if } j = 6, 7, 8 \end{cases}, \quad \mu_j := \lambda_{k,8}^{(j)} = \begin{cases} (6-j, 2) & \text{if } j = 1, 2, 3, 4 \\ (1, 7-j) & \text{if } j = 6, 7 \end{cases}.$$

定理 2.2 より, $\theta_1 := \theta_{\Sigma}(k, 7)$, $\theta_2 := \theta_{\Sigma}(k, 8)$ は $D(\mathcal{A}_{\Sigma,k})$ の斉次基底を与える. θ_1, θ_2 の具体表示は以下ようになる (図 2.5, 2.6 参照):

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 25 \left\{ (2x^7 + 7x^6y + 7x^5y^2) \frac{\partial}{\partial x} + (7x^2y^5 + 7xy^6 + 2y^7) \frac{\partial}{\partial y} \right\}, \\ \theta_2 &= 5 \left\{ (2x^8 + 9x^7y + 15x^6y^2 + 10x^5y^3) \frac{\partial}{\partial x} - (3x^3y^5 + x^2y^6) \frac{\partial}{\partial y} \right\}. \end{aligned}$$

$\theta_1(x+y)$, $\theta_2(x+y)$ 及び $\det \mathbf{M}(\theta_1, \theta_2)$ を因数分解すると,

$$\begin{aligned} \theta_1(x+y) &= 25(x+y)^5(2x^2 - 3xy + 2y^2), \\ \theta_2(x+y) &= 5x^2(2x-y)(x+y)^5, \\ \det \mathbf{M}(\theta_1, \theta_2) &= -2500x^5y^5(x+y)^5. \end{aligned}$$

故に, Ziegler's criterion から, (θ_1, θ_2) が $D(\mathcal{A}_{\Sigma,k})$ の基底を与える事が分る. —

j	1	2	3	6	7	8																																																				
$5 - c(P)$	<table><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>	5	4	3	2	1	6	5	4			7	6	5			<table><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>5</td><td></td></tr></table>	5	4	3	2	6	5	4		7	6	5		<table><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>	5	4	3	6	5	4	7	6	5	<table><tr><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td></tr></table>	5	4	6	5	7	6	<table><tr><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>7</td><td></td></tr></table>	5	4	6	5	7		<table><tr><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td></tr></table>	5	4	6	5
5	4	3	2	1																																																						
6	5	4																																																								
7	6	5																																																								
5	4	3	2																																																							
6	5	4																																																								
7	6	5																																																								
5	4	3																																																								
6	5	4																																																								
7	6	5																																																								
5	4																																																									
6	5																																																									
7	6																																																									
5	4																																																									
6	5																																																									
7																																																										
5	4																																																									
6	5																																																									
$h_{\lambda_j}(P)$	<table><tr><td>7</td><td>6</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td></tr></table>	7	6	5	2	1	4	3	2			3	2	1			<table><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr></table>	6	5	4	1	4	3	2		3	2	1		<table><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	5	4	3	4	3	2	3	2	1	<table><tr><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	4	3	3	2	2	1	<table><tr><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr></table>	4	2	3	1	1		<table><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	3	2	2	1
7	6	5	2	1																																																						
4	3	2																																																								
3	2	1																																																								
6	5	4	1																																																							
4	3	2																																																								
3	2	1																																																								
5	4	3																																																								
4	3	2																																																								
3	2	1																																																								
4	3																																																									
3	2																																																									
2	1																																																									
4	2																																																									
3	1																																																									
1																																																										
3	2																																																									
2	1																																																									
$\binom{5}{\lambda_j}$	50	175	175	175	175	50																																																				

図 2.5: Young diagrams $Y(\lambda_{k,7}^{(j)})$

j	1	2	3	4	6	7																															
$5 - c(P)$	<table><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	5	4	3	2	1	6	5				<table><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>	5	4	3	2	6	5			<table><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td></td></tr></table>	5	4	3	6	5		<table><tr><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td></tr></table>	5	4	6	5	<table><tr><td>5</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	5	6	<table><tr><td>5</td></tr></table>	5
5	4	3	2	1																																	
6	5																																				
5	4	3	2																																		
6	5																																				
5	4	3																																			
6	5																																				
5	4																																				
6	5																																				
5																																					
6																																					
5																																					
$h_{\mu_j}(P)$	<table><tr><td>6</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	6	5	3	2	1	2	1				<table><tr><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td></tr></table>	5	4	2	1	2	1			<table><tr><td>4</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td></td></tr></table>	4	3	1	2	1		<table><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	3	2	2	1	<table><tr><td>2</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	2	1	<table><tr><td>1</td></tr></table>	1
6	5	3	2	1																																	
2	1																																				
5	4	2	1																																		
2	1																																				
4	3	1																																			
2	1																																				
3	2																																				
2	1																																				
2																																					
1																																					
1																																					
$\binom{5}{\mu_j}$	10	45	75	50	15	5																															

図 2.6: Young diagrams $Y(\lambda_{k,8}^{(j)})$

3 Schur 関数と一般二項係数

本節では、主定理 (定理 2.2) の証明に必要な、一般二項係数の性質をまとめておく。特に、“Schur 関数” と呼ばれる多項式との関係を与えてる補題 3.3 や、それから得られる定理 3.5 は、[Wa] において重要な役割を果たしている。まず次の結果は、簡単ではあるが、一般二項係数を導入する有効性を示す命題の一つである：

補題 3.1 $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$ を partition とする。この時、 $\lambda_1 \leq \forall r \in \mathbb{Q}$ に対して、 $\binom{r}{\lambda} > 0$ 。

証明. 各 $(i, j) \in Y(\lambda)$ に対して、 $h_\lambda(i, j) > 0$ で、

$$c(i, j) = j - i \leq \lambda_i - i \leq \lambda_1 - i < \lambda_1 \leq r$$

であるから、 $\binom{r}{\lambda} > 0$ が成立つ。■

正の整数 n を一つ固定しておく。 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して、 n 変数多項式 $a_\mu = a_\mu(X_1, \dots, X_n)$ を $a_\mu = \det(X_j^{\mu_i})_{ij} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ で定める。 $\delta := (n-1, \dots, 2, 1, 0)$ と置けば、 a_δ は n 変数の差積である： $a_\delta = \prod_{i < j} (X_i - X_j)$ 。 任意の $\mu \in \mathbb{N}^n$ に対して、 a_μ は a_δ で割り切れる。 それは、各 $(i, j) ; i < j$ に対して、 X_i に X_j を “代入” したものが 0 に等しいからである： $a_\mu(X_1, \dots, X_j, \dots, X_n) = 0$ 。

定義 3.2 λ を, その “長さ” $\ell(\lambda) := \#\{i \mid \lambda_i \neq 0\}$ が n 以下の partition とする. ($\lambda \in \mathbb{N}^n$ と思える.) この時, 多項式 S_λ を $S_\lambda := a_{\lambda+\delta}/a_\delta$ で定め, λ に関する **Schur 関数** と呼ぶ.

次が, Schur 関数と一般二項係数とを結ぶ命題である:

補題 3.3 (I. G. Macdonald [Ma] p.45, Examples 4) λ を $\ell(\lambda) \leq n$ なる partition とする. この時,

$$S_\lambda(1, 1, \dots, 1) = \binom{n}{\tilde{\lambda}}$$

が成立する. 但し, $\tilde{\lambda}$ は partition λ の “共役” と呼ばれるもので, λ の Young diagram を “主対角線” に関して折り返して得られる図形を Young diagram として持つ partition である. (例. $\lambda = (5, 4, 4, 1)$ ならば, その共役は, $\tilde{\lambda} = (4, 3, 3, 3, 1)$ である. 下図参照.)

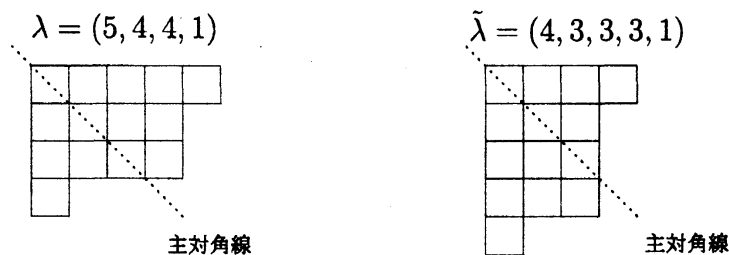


図 3.1: $(5, 4, 4, 1)$ の共役

各 a_μ は (行列式の性質から) “歪対称” であるので, $\ell(\lambda) \leq n$ なる任意の partition λ に対して, その Schur 関数 S_λ は対称式である. 故に, 基本対称式

$$e_r := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} X_{i_1} \cdots X_{i_r}$$

達の多項式として表される. 具体的には,

$$S_\lambda = \det(e_{\tilde{\lambda}_i + c(i,j)})_{1 \leq i,j \leq m} \quad (\lambda_1 \leq \forall m \in \mathbb{Z}_{>0})$$

が成立つ. (但し, $r < 0 \Rightarrow e_r = 0$ と定めておく.) よって, 補題 3.3 より次を得る:

補題 3.4 λ を $\ell(\lambda) \leq n$ なる partition とする. この時, $\lambda_1 \leq \forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$\binom{n}{\tilde{\lambda}} = \det \left(\binom{n}{\tilde{\lambda}_i + c(i,j)} \right)_{1 \leq i,j \leq m}$$

が成立つ.

この事が, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で成立することから, 次の定理を得る:

定理 3.5 (I. G. Macdonald [Ma] p.45, Examples 4) λ を partition, m を正の整数とする. $\ell(\lambda) \leq m$ である時,

$$\binom{X}{\lambda} = \det \left(\binom{X}{\lambda_i + c(i,j)} \right)_{1 \leq i,j \leq m}$$

4 定理 2.2 の証明の概要

ここでは、前節の結果 (特に、定理 3.5) が、主定理 (定理 2.2) の証明にどのように適用されていくのかを見ていく。まず、 V^* の基底 $\Sigma = (x, y)$ 及び $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbf{N}_0^3$ を固定しておき、 $\tilde{A} := A_{\Sigma, k}$ と置く。各 $q \in \mathbf{Z}$ に対して、 $r_q := r_{k, q} = k_1 + k_2 - q - 1$, $s_q := s_{k, q} = k_1 + k_3 - q - 1$ (§2 で定義したもの), $t_q := q - k_3 + 1$ と置く。 $k_3 \leq q \leq k_1 + k_2 - 1$ を満たす整数 q に対して、行列 M_q を

$$M_q := \left(\begin{pmatrix} k_3 \\ k_3 + c(i, j) \end{pmatrix} \right)_{\substack{1 \leq i \leq q+1 \\ 1 \leq j \leq t_q}}$$

で定める。この時、次の基本的な関係式が成立つ:

$$(X^q, X^{q-1}Y, \dots, Y^q) M_q = (X + Y)^{k_3} (X^{q-k_3}, X^{q-k_3-1}Y, \dots, Y^{q-k_3}). \quad (4.1)$$

行列 M_q の最初の $q - k_1 + 1$ 行からなる行列を A_q , 最後の $q - k_2 + 1$ 行からなる行列を B_q , 残りの部分からなる行列を C_q とする:

$$M_q = \begin{pmatrix} A_q \\ C_q \\ B_q \end{pmatrix}.$$

更に、 q 次の多項式を成分とする、長さ t_q の“横ベクトル” f_q, g_q を

$$\begin{aligned} f_q &= (x^q, x^{q-1}y, \dots, x^{k_1}y^{q-k_1}) A_q, \\ g_q &= (x^{q-k_2}y^{k_2}, \dots, xy^{q-1}, y^q) B_q \end{aligned}$$

で定める。K-線型写像 $\rho_q: K^{t_q} \longrightarrow (\text{Der}_S)_q$ (q 次導分全体) を

$$\rho_q(u) = f_q u \frac{\partial}{\partial x} + g_q u \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.2)$$

で定めれば、 ρ_q は単射で、 $\ker C_q$ を $D(\tilde{A})_q = D(\tilde{A}) \cap (\text{Der}_S)_q$ へ写す。即ち、K-同型 $D(\tilde{A})_q \simeq \ker C_q$ が成立つ。(厳密に言うと、 $q = k_1 + k_2 - 1$ の時は、行列 C_q は“潰れている”。この時は、 $\ker C_q = K^{t_q}$ としておく。) 故に、 $\tilde{A}$ に接する K-導分の話が、二項係数を成分とする行列 $\simeq$ 一般二項係数 (定理 3.5) の議論に帰着される。例えば、次が成立つ:

補題 4.1 任意の $q \in \mathbf{Z}$; $k_3 \leq q < \lfloor |k|/2 \rfloor$ に対して $D(\tilde{A})_q = 0$.

証明. まず、 $k_3 \leq q < \lfloor |k|/2 \rfloor$ の時、 $0 < t_q \leq r_q$ であるから、行列 M_q が定義でき、 C_q は“潰れない”で、“縦長”の行列になっている事に注意する。 C_q の最初の t_q 行からなる正方行列を C とする: $C = \left(\begin{pmatrix} k_3 \\ s_q + c(i, j) \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq t_q}$. 故に、partition λ を

$$\lambda := (\overbrace{s_q, \dots, s_q}^{t_q})$$

で定めれば、定理 3.5 より、 $\det C = \binom{k_3}{\lambda}$. ところで、 $k_3 \geq s_q$ であるから、補題 3.1 より、 $\det C \neq 0$ を得る。よって、 $D(\tilde{A})_q \simeq \ker C_q = 0$ を得る。■

以上より, (多少の 2-multiarrangement に関する議論を用いて,) exponents に関する次の結果を得る:

系 4.2 ([Wa] Proposition 3.11) $k_3 \leq k_1 + k_2 \Rightarrow \exp(\tilde{\mathcal{A}}) = [\lfloor |k|/2 \rfloor, \lceil |k|/2 \rceil]$.

($D(\tilde{\mathcal{A}})_q \neq 0$ となる, $q \in \mathbb{Z}$ の最小値が, $\lfloor |k|/2 \rfloor$ である事を確認すればよい. あとは Ziegler's criterion を適用して, 上記が得られる.) これで, 3 本の直線からなる 2-multiarrangement に関しては, その exponents が完全に記述できた事になる.

さて, 基底構成において最も重要である, §2 で定めた q 次導分 $\theta_\Sigma(k, q)$ が $\tilde{\mathcal{A}}$ に接することを示す. もう少し詳しく次が成立つ:

補題 4.3 ([Wa] Lemma 3.14) $\theta_\Sigma(k, q) \in D(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus D(\mathcal{A}_{\Sigma, k'})$. 但し, $k' = k + (0, 0, 1)$.

証明. まず, $\theta_\Sigma(k, q)$ が $\tilde{\mathcal{A}}$ に接する事をみる. $u_q \in K^{t_q}$ を

$$u_q := {}^t \left(\binom{k_3}{\mu_1}, -\binom{k_3}{\mu_2}, \dots, (-1)^{r_q-1} \binom{k_3}{\mu_{r_q}}, (-1)^{r_q} \binom{k_3}{\mu}, 0, \dots, 0 \right) \in K^{t_q}$$

で定める. 但し, partitions μ, μ_i ($i = 1, \dots, r_q$) は, 以下で与えられる:

$$\mu := (\overbrace{s_q, \dots, s_q}^{r_q}), \quad \mu_i := (\overbrace{s_q + 1, \dots, s_q + 1}^{r_q - i + 1}, \overbrace{s_q, \dots, s_q}^{i-1}).$$

この時, 定理 3.5 及び, 行列式の余因子展開から, $u_q \in \ker C_q$ で $\theta_\Sigma(k, q) = \rho_q(u_q)$ が成立つ事が確認できる. 即ち, $\theta_\Sigma(k, q)$ は multiarrangement $\tilde{\mathcal{A}}$ に接すると言える.

次に, $\theta_\Sigma(k, q)$ が, 直線 $x + y = 0$ に $(k_3 + 1)$ 重に接しない事をみる. 式 (4.1) より, $\forall u = {}^t(u_1, \dots, u_{t_q}) \in \ker C_q$ に対して,

$$[\rho_q(u)](x + y) = (x + y)^{k_3} (x^{q-k_3}, x^{q-k_3-1}y, \dots, y^{q-k_3}) u$$

が成立つ. 故に,

$$\begin{aligned} \rho_q(u) \in D(\mathcal{A}_{\Sigma, k'}) &\iff (x^{q-k_3}, x^{q-k_3-1}y, \dots, y^{q-k_3}) u \in (x + y) S \\ &\iff \sum_{i=1}^{t_q} (-1)^{i-1} u_i = 0. \end{aligned}$$

ところで, $k_3 \geq s_q + 1$ であるから, 補題 3.1 より, $c, c_i > 0$ である. よって, u_q の成分の交代和 $\sum_{i=1}^{t_q} c_i + c$ は > 0 となり, $\theta_\Sigma(k, q) = \rho_q(u) \notin D(\mathcal{A}_{\Sigma, k'})$ を得る. ■

($\theta_\Sigma(k, q)$ が $x + y = 0$ に $(k_3 + 1)$ 重に接しないという事実は, $|k|$ が偶数の時の基底構成において, 必要になってくる.) 後は, 次数 S -加群 $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ に関する, 次の命題が確認できれば, 定理 2.2 (ii) の証明が完了する:

補題 4.4 p, q ; $p \leq q$ を整数とし, $d := q - p$ と置く. M が, 次数 p の元と次数 q の元とからなる基底をもつとする. この時, $\theta_1 \in M_p, \theta_2 \in M_q$ に対して,

$$(\theta_1, \theta_2) : M \text{ の } S\text{-基底} \iff x^d \theta_1, x^{d-1} y \theta_1, \dots, y^d \theta_1, \theta_2 : K \text{ 上一次独立}$$

が成立つ.

以上を用いて、定理 2.2 (ii) の証明を与えておく：

定理 2.2 (ii) の証明. $k' := k + (0, 0, 1)$, $q := \lfloor |k|/2 \rfloor$ と置く.

- $|k|$ が偶数の時.

$$\begin{aligned} & \theta_{\Sigma}(k, q) \text{ が } x + y = 0 \text{ に } (k_3 + 1) \text{ 重に接しない} \\ & \implies \theta_{\Sigma}(k, q), \theta_{\Sigma}(k', q) : \mathbf{K} \text{ 上一次独立} \\ & \implies (\theta_{\Sigma}(k, q), \theta_{\Sigma}(k', q)) : D(\tilde{\mathcal{A}}) \text{ の基底 (系 4.2, 補題 4.4)} \end{aligned}$$

- $|k|$ が奇数の時.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} u_q \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_q \end{pmatrix}, u_{q+1} \in \mathbf{K}^{t_q+1} : \mathbf{K} \text{ 上一次独立} \\ & \implies x\theta_{\Sigma}(k, q), y\theta_{\Sigma}(k, q), \theta_{\Sigma}(k, q+1) : \\ & \quad \mathbf{K} \text{ 上一次独立 } (\rho_{q+1} \text{ の単射性}) \\ & \implies (\theta_{\Sigma}(k, q), \theta_{\Sigma}(k, q+1)) : D(\tilde{\mathcal{A}}) \text{ の基底 (系 4.2, 補題 4.4)} \end{aligned}$$

以上で、証明が完了する。■

5 今後の課題

5.1 本数の一般化

定理 2.2 の結果の延長として、自然に考えられるのは、 n 本直線がある場合への一般化である。即ち n 本直線がある 2-multiarrangement $\tilde{\mathcal{A}}$ の exponents $\exp(\tilde{\mathcal{A}})$ の決定、もしくは、微分加群 $D(\tilde{\mathcal{A}})$ の斉次基底の構成である。直線が 4 本以上の場合には、exponents は multiplicity だけではなく、“複比”と呼ばれる幾何学的な量にも支配される。すなわち、multiplicity が等しいような multiarrangement でも、直線の“配置”によって、その exponents が変わってくるのである。一つ例を見ておく。

例 5.1 (x, y) を V^* の $\mathbf{K}$ -基底とし、 $\mathcal{A} = \{ \ker x, \ker y, \ker(x+y), \ker(x+cy) \}$ ($c \in \mathbf{K} \setminus \{0, 1\}$) と置く。 $\mathcal{A}$ 上の multiplicity $k: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{N}$ を

$$\ker x \mapsto 1, \ker y \mapsto 3, \ker(x+y) \mapsto 3, \ker(x+cy) \mapsto 1$$

と定める時、 $\exp(\mathcal{A}, k)$ に関して、次が成立つ：

$$\exp(\mathcal{A}, k) = \begin{cases} [3, 5] & \text{if } c = 2, \\ [4, 4] & \text{if } c \neq 2. \end{cases}$$

(次数 3 の導分 $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2) \frac{\partial}{\partial x} + y^3 \frac{\partial}{\partial y}$ が、直線 $x + cy = 0$ に接する条件が $c = 2$ で与えられる。この c が言わば、複比にあたるものである。) —

この複比と呼ばれるものによって、4 本以上の場合の exponents の決定は 3 本の場合に比べて、著しく難しくなると考えられる。

5.2 原始微分との関係

また, 定理 2.2 は, A_2 型の “コクセター配置” に関する結果だと考えることもできる.

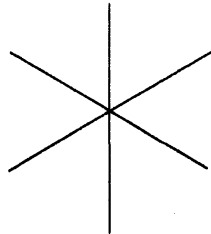


図 5.1: A_2 型コクセター配置

そう考えた時, 重要になってくるのが, K. Saito [Sa2] による “原始微分” の存在である. 一般に, $\mathcal{A}$ をコクセター配置とする時, 次が知られている:

定理 5.2 (H. Terao [Te1]) 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$D^{(m)}(\mathcal{A}) := \{ \theta \in \text{Der}_S \mid \theta(\alpha_H) \in \alpha_H^m S \ (\forall H \in \mathcal{A}) \}$$

は free である.

その証明は具体的に基底を構成して与えているのだが, その際, 原始微分 D が本質的に用いられている. また, [Te2] では, 原始微分 D の “Levi-Civita 接続” ∇_D の重要性に着目し, [Te1] で構成した基底が, ∇_D によってよい振る舞いをする事を示している. 一方, M. Yoshinaga [Yo1] では, 定理 5.2 の別証明を, [Sa2] によって保障されている, ∇_D のある種の逆写像 ∇_D^{-1} を用いて与えている. 具体的には, $\nabla_D^{-k} E$ (E は “オイラー導分”) を基本的な導分として, $D^{(m)}(\mathcal{A})$ の基底を構成している. この Terao 基底と Yoshinaga 基底は, [Te2] を “介して”, 密接に関係している事がわかり, [Te3] では, 具体的にその関係を与えている.

そこで, 定理 2.2 を A_2 型のコクセター配置に関する結果だと見るとき, 一般二項係数を用いて構成した基底が原始微分 (の Levi-Civita 接続) によってどのように振舞うのか, というのは極めて自然な疑問であると考えられる. それを元に, Terao 基底や Yoshinaga 基底との関係が与えられれば, と考えている.

参考文献

- [Ma] I. G. MACDONALD : Symmetric Functions and Hall Polynomials 2nd edition. Oxford Univ. Press, 1995.
- [OT] P. ORLIK and H. TERA0 : Arrangements of Hyperplanes. Grundlehren der Math. Wiss. **300**, Springer-Verlag, 1992.
- [Sa1] K. SAITO : Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.IA Math. **27**, 1980, pp. 265-291.
- [Sa2] K. SAITO : On a linear structure of the quotient variety by a finite reflection group. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **29**, no. 4, 1993, pp. 535-579.
- [Te1] H. TERA0 : Multiderivations of Coxeter arrangements. Invent. Math. **148**, no. 3, 2002, pp. 659-674.
- [Te2] H. TERA0 : The Hodge filtration and the contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. Manuscripta Math. **118**, 2005, pp. 1-9.
- [Te3] H. TERA0 : Bases of the contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. Proc. Amer. Math. Soc. **133**, no. 7, 2005, pp. 2029-2034.
- [Wa] A. WAKAMIKO : On the exponents of 2-multiarrangements. Master's thesis, Tokyo Metropolitan University (Japanese).
- [Yo1] M. YOSHINAGA : The primitive derivation and freeness of multi-Coxeter arrangements. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **78**, no. 7, 2002, pp. 116-119.
- [Yo2] M. YOSHINAGA : On the freeness of 3-arrangements. Bull. London Math. Soc. **37**, 2005, pp. 126-134.
- [Zi] G. M. ZIEGLER : Multiarrangements of hyperplanes and their freeness. In: Singularities, Contemporary Math. **90**, Amer. Math. Soc., 1989, pp. 345-359.