

Isolated points of special
subvarieties of Jacobian varieties

(東北大理) 難波 誠

与えられた多様体上に、ある種の一次系が
唯一個しか存在しないとか、有限個しか存在
しないとか、と言う事を知ることは、その多
様体の自己同型群や、局所モジュライを調べる
上で、しばしば有効である。

ここでは、コンパクト Riemann 面の場合に
ついて、この方向についてのいくつかの結果
をのべる。

最初に一般的な事に言及する。

V を非特異射影代数多様体 over $\mathbb{C}$ とし。
 $c \in H^{1,1}(V, \mathbb{Z})$ に対して

$$\mathcal{Q}_c(V) = \{ D \mid D \text{ は } V \text{ 上の正因子で } c([D]) = c \}$$

とおく。いかなる c に対して $\mathcal{Q}_c(V)$ は空でない
か? は、むずかしい問題であるが、今この
集合が空でないと仮定する。Weil-Kodaira に

よれば、この集合は、ある $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ の中の、代数的集合になる。今、 $D_0 \in \mathcal{D}_c(V)$ をひとつ取り、固定する。

$$\varphi: D \in \mathcal{D}_c(V) \longmapsto [D - D_0] \in \text{Pic}^0(V)$$

なる map は、morphism となり、Jacobi map と呼ばれる。 φ の各 fiber は、見備一次系より成り、(複素)射影空間と同型になる。ただし、その次元は、fiber ごとにより変わる。

$r \geq 0$ を整数とし

$$W_c^r = \{t \in \text{Pic}^0(V) \mid \dim \varphi^{-1}(t) \geq r\}$$

とおくと、これは $\text{Pic}^0(V)$ の closed complex subspace である事が示される。

さて、line bundle F on V に対して、bilinear map $\tau = \tau_F: H^0(F) \times H^1(\mathcal{O}_V) \longrightarrow H^1(F)$ を

$$\tau(\{\xi_i\}, \{h_{ik}\}) = \{\xi_i h_{ik}\}$$

で定義する。ここに、 $\mathcal{O}_V$ は V 上の正則関数の germs の sheaf, $\{\xi_i\}$ の ξ_i は、てきとうな V の open covering による表現, etc., とする。

定理 1. $D \in \mathcal{D}_c(V)$, $\dim |D| = r$ とし、次の条件 (*) が満たされているとする。

(*) $\tau_{[D]}(H^0([D]), h) = 0$ ならば $h = 0$.

この時. $\varphi(D)$ は W_c^r の isolated point である.

これを V がコンパクト Riemann 面の時に適用すると. 次の簡単な定理が得られる. ただしこの場合. $n = \deg C = \int C$ とおくと. $\mathcal{Q}_c(V) = S^n V$ (n 次 symmetric product), $W_c^r = W_n^r \subset J(V)$, $\text{Pic}^0(V) = J(V)$: Jacobian variety of V , となる.

定理 2. V をコンパクト Riemann 面, D を degree n の正因子で. $\dim |D| = r$ とする. 次の条件 (*) がみたされたとする.

(*) $H^0(D) \times H^0(K-D) \longrightarrow H^0(K)$ の image
 $(\xi, \eta) \longmapsto \xi\eta$

が. $H^0(K)$ を span する. ($K = K_V$ canonical bundle)
 この時. $\varphi(D)$ は W_n^r の isolated point である.

Remark. 定理 2 の条件は. ひとつの十分条件を与えるもので. 必要条件では決してない. 実さい. V を genus 4 の non-hyperelliptic な

コンパクト Riemann 面とする時. V の canonical curve は. $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の中の. quadric と cubic surface の complete intersection となるが. この quadric が非特異の時は. W_3^1 は2点より成り. 定理2の条件がみたされているが. cone である時には. W_3^1 が1点より成るにもみかわらず. 定理2の条件は. みたされない.

定理3. C を degree d の平面代数曲線でその特異点が. k 個の nodes のみから成るものとする. V を C の non-singular model とする. D を a line section of C で. V 上の正因子とみたものとする. この時. 次の条件のいずれかがみたされれば. $\mathcal{P}(D)$ は. W_d^2 の isolated point である.

- (1) $d=4$, $k=0$.
- (2) $d=5$, $k \leq 1$.
- (3) $d \geq 6$, $k \leq d-3$.

Remark. $k \leq d-3$ ならば. 全ての line

sections から成る一次系は, complete である。
すなわち, $\dim |D| = 2$ 。

定理3は, 定理2を応用したものである。
定理3の条件のもとでは, 恐らく, W_d^2 が
有限個の点から成るであろう。 $k=0$ の時は,

定理4. C を degree d の 非特異平面代数
曲線とする。もし, $d \geq 4$ ならば, W_d^2 は
唯一点 $\varphi(D)$ から成る。とくに, C の自己同
型は, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の自己同型から引き起こされる。

この定理4は, 多分昔から知られている事
であろうが, ちゃんと書いてある文献を, 私
は知らない。なお, 前後するが, 定理3の
意味は, C を同じ degree, 同じ数の nodes を持つ
curve C' に微小変形した時, C と C' とが, 双
有理同値 $\iff \exists b \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ such that $b(C) = C'$
とすることである。

さて, linear pencil の uniqueness については,

定理 5. V を genus g のコンパクト Riemann 面, P を素数で $(P-1)^2 \leq g-1$ をみたすとする。この時、もし V 上に degree P の base point free linear pencil が存在すれば、それは V 上の唯一の degree P の linear pencil であり、 V 上には degree $\leq P-1$ の linear pencil は存在しない。

さて、志賀弘典氏は、多変数函数論問題特集において、次の問題を提出している。

問題 (志賀). V, V' をそれぞれ次式で定義されるコンパクト Riemann 面とする。

$$V: y^n = (x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_m),$$

$$V': y^n = (x-\beta_1) \cdots (x-\beta_m),$$

ここに、 $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$, $(m, n) = 1$ (互いに素)。

この時、 $V \cong V'$ となるための、必要十分条件は、 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の自己同型 b が存在して、

$$b\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \infty\} = \{\beta_1, \dots, \beta_m, \infty\}$$

となる事であろうか？

(V, V' が hyperelliptic で) $n=2$ の時は. 上の問題は確かに affirmative である. 定理5を用いると. この hyperelliptic の場合も含んだ次の定理が. 簡単に出る.

定理6. p を素数, $m \geq 2p+1, m \equiv -1 \pmod{p}$,

$$V: y^p = (x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_m),$$

$$\alpha_j \in \mathbb{C}, \text{各 distinct}$$

$$V': y^p = (x-\beta_1) \cdots (x-\beta_m)$$

$$\beta_j \in \mathbb{C}, \text{各 distinct}$$

とする. この時. $V \cong V' \iff \exists b \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$
such that $b\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \infty\} = \{\beta_1, \dots, \beta_m, \infty\}.$

定理7. p を素数, $m \geq 2p+1, m \equiv -1 \pmod{p}$,

$$V: y^p = (x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_m),$$

$$\alpha_j \in \mathbb{C}, \text{各 distinct}$$

とする. Put

$$K = \left\{ e(\ell) \in \text{Aut}(V) \mid e(\ell)(x, y) = (x, \omega^\ell y), \right. \\ \left. \ell = 0, 1, \dots, p-1, \quad \omega = \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{p} \right\}$$

and

$$G = \{ b \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \mid b \text{ は } \alpha_1, \dots, \alpha_m, \infty \text{ の間に置換を引き起こす} \}.$$

この時、次の exact 列が存在する。

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \text{Aut}(V) \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

Remark. $n=3$, $m=7$ において、上の問題の $\Leftarrow$ の部分の反例が作れる。

すなわち、各が distinct な $\alpha_1, \dots, \alpha_7, \infty$ を一般の位置にとって、 $\alpha_1, \dots, \alpha_7, \infty$ の間に置換を引き起こす $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の自己同型が、1しかないとする。次に、 $\{\beta_1, \dots, \beta_7, \infty\}$ と

$b \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ を、 $b(\alpha_1) = \infty$, $b(\alpha_2) = \beta_2, \dots$, $b(\alpha_7) = \beta_7$, $b(\infty) = \beta_1$ となるようにとると、次式で定義されたコンパクト Riemann 面 V と V' とは、同型でない：

$$V: y^3 = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_7),$$

$$V': y^3 = (x - \beta_1) \cdots (x - \beta_7).$$

以上。