

しきい値ダイナミクスによる株価変動のモデル

神戸大学・自然科学研究科

平林 忠・高安 秀樹・三浦 均

エール大学・経済

濱田 宏一

1. イントロダクション

市場における価格形成は諸要因の相互に影響し合う複雑な系であると考えられる。価格の動向を予測するのはとても難しい。Fig.1(a)は東京証券取引所における終値の平均株価の変動のグラフであるが、片対数をとるとFig.1(b)のようにおよそ線形に増大していて、それにノイズが加えられているような形をしている。Fig.2はこのデータのパワースペクトルで、全周波数領域で f^{-2} に従っている。これは、株価にスケール普遍性があるというマンデルブロ [1] の指摘と一致する。

この株価の変動はランダムウォークであるといえる。ブラウン運動のパワースペクトルは f^{-2} なので、これまで株価変動は相関のない確率過程としてモデル化されている。しかし我々が示しているように、決定論的なダイナミクスをもつ過程においてもパワースペクトルが f^{-2} となることがあ

る [2] .

ここでは、しきい値ダイナミクスを用いて市場価格をモデル化している。売買は典型的な非線形かつ非可逆な過程である。売買の要求条件が満たされるまで取引は成立しない。条件が満たされると取引が行なわれて（非線形性）、しかも売買成立直後に、買った人が売った人に同じ値段で売ることとはない（非可逆性）。この非線形かつ非可逆な過程をモデル化するために、決定論的なしきい値ダイナミクスを導入している。

ここではさらに詳しくモデルの性質を解析して、一種の相転移を見いだす。臨界的なパラメーター領域で、決定論的なダイナミクスではあるがバフスベクトルが f^{-2} となっている。即ち、株価というマクロな変数のランダムウォークのような振る舞いが、取引のミクロなしきい値ダイナミクスによって説明される。

2. 決定論的しきい値モデル

モデルを考えるに当たって、一切のファンダメンタルズを無視して、売買のみに着目する。売買の際にディーラーはある値より高ければ売り、ある値より安ければ買い、そうでなければ売買をしない。このように、しきい値ダイナミクスを用いると売買の様子はモデルにしやすい。

株式市場では、ディーラーは各銘柄に売値や買値を付ける。ここでは、簡単のために、銘柄が1種類しかない市場を考える。i番目のディーラーの売値と買値に対するしきい値をそれぞれ S_i と B_i で表す。即ち、i番目のディーラーは S_i 以上の値がつけば売り B_i 以下の値がつけば買う。売値と買値のしきい値の差 $L_i = S_i - B_i$ は必ず正でなければならない。さもないと、自分自身で売買をするようなことになってしまう。 $B_i \geq S_i$ を

満たす i と j ($i \neq j$) が存在するときに取引が成立する。ここでは L_i は i によらない定数 Λ であるとする。従って、取引成立条件は次のように書ける。

$$\max\{B_i\} - \min\{B_j\} \geq \Lambda \quad (1)$$

ここで、 $\max\{B_i\}$ と $\min\{B_j\}$ はそれぞれ $\{B_i\}$ の最大値と最小値を表す。時刻 t にこの取引条件が成立したとすると、最大の買値 $\max\{B_i\}$ を付けたディーラーだけが条件 $\max\{B_i\} - B_j \geq \Lambda$ を満たす全てのディーラー j から価格 $\max\{B_i\}$ で買うとする。取引が成立したときはこの値で $P(t)$ を定義する。取引が成立しないときは株価は変わらないとする。即ち、

$$P(t) = \begin{cases} \max\{B_i\} & \text{取引が成立したとき、} \\ P(t-1) & \text{取引が成立しないとき。} \end{cases} \quad (2)$$

取引が成立すると買ったディーラーは負の傾きを持つ需要曲線に従って売値と買値を下げる。逆に、売ったディーラーは売値と買値を上げる (Fig.3 参照)。この取引による売値や買値の変更を Δ_i で表す。簡単のために Δ_i を次で定義する。

$$\Delta_i = \begin{cases} -\delta & \text{買い手} \\ \delta/n & \text{売り手} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (3)$$

ここに δ は $0 < \delta < \Lambda$ を満たす定数で n は売り手の数を表す。

さて、 i 番目のディーラーのしきい値の決定論的なダイナミクスを

$$B_i(t+1) = B_i(t) + \Delta_i + a_i \quad (4)$$

によって導入する。 a_i は i 番目のディーラーの予測に基づく言い値の変更である。 $a_i > 0$ ($a_i < 0$) のとき i 番目のディーラーは言い値を上げようと (下げようと) する。この項によって $\{B_i\}$ の分布が散らばる。ここでは、 a_i は初期にランダムに与えられた時間には依らない定数とする。

Fig.4に示されているように、Eq.(4)のダイナミクスでは実際の価格の変動のような暴落や急騰が生じないので、次のように変更を加える。

$$B_i(t+1) = B_i(t) + \Delta_i + a_i + c_i \{P(t) - P(t_{\text{prev}})\} \quad (5)$$

c_i は市場価格の変化の*i*番目のディーラーへの影響の強さで、 t_{prev} は前回取引のあった時刻を表す。簡単のために c_i は負でない定数 γ とする。

3. シミュレーション

シミュレーションの際に用いた定数は、 $\Lambda = 1.0$ 、 $\delta = 0.4$ 、 $\gamma \geq 0$ 。

$\{B_i(0)\}$ は $(-1.0, 1.0)$ の範囲からランダムに選び、 a_i は α を正の定数として $(-\alpha, \alpha)$ の範囲からランダムに選ぶ。ディーラーの数(システムサイズ)を*N*で表し、基本的には*N*=100とする。

3-1 $\gamma = 0$ の場合

Fig.4は取引が起こったときの株価 $P(t)$ の変動の様子である。 $P(t)$ には、 $\{B_i(0)\}$ や a_i の与え方によらずに上限と下限があり、ある平均の周りを揺らいている。Fig.5はこの変動のパワースペクトルのlog-logプロットである。これはローレンツ分布のスペクトルに似ていて、つまり、小さな周波数領域では一定で大きな周波数領域では f^{-2} となっている。決定論的なダイナミクスEq.(4)によってランダムに見える揺らぎが得られていることに注意したい。システムサイズが非常に小さいときには $P(t)$ の変動は準周期的で、パワースペクトルはいくつかの鋭いピークからなる。

システムサイズを増すにつれて、ピークの数が増えていくが、準周期的な変動からカオティックな変動へのはっきりとした転移は見られない（Fig.6参照）。

3-2 $\gamma > 0$ の場合

ダイナミクスEq.(5)によるほとんどのシミュレーションにおいては、株価 $P(t)$ の変動のグラフにグローバルな上向きないしは下向きのトレンドが生じる（Fig.7参照）。我々は、この上向きのトレンドと下向きのトレンドの間の中間的な「バランスのとれた」 $P(t)$ の振る舞いに興味がある。パラメータ αN と γ とを変えて $P(t)$ の振る舞いを調べる。ディーラーが取引に参加する平均的な頻度は、およそ α に比例しシステムサイズに反比例するので、 αN はシステムサイズによらないパラメータと考えられる。また、 γ はディーラーが市場価格の変動にたいしてどれだけ敏感に反応するかを表すパラメータなのでこれもシステムサイズによらないと見做せる。

Fig.8に αN と γ による $P(t)$ のグラフのグローバルなトレンドの現われ方を示す。 αN が1.8以上の範囲では途中で取引が正常に行なわれなくなる。つまり、ある取引が起こったにもかかわらず猶も条件（1）が成立してしまう様な領域である。 αN が0.8より小さな範囲では $P(t)$ は不安定で定常的にならない領域である。 γ が約0.8より大きな範囲では株価 $P(t)$ の絶対値が非常に大きくなる。「バランスのとれた」領域は非常に狭くFig.8の点線で表された部分である。これは上向きのトレンドの現われる領域（+印）と下向きのトレンドの現われる領域（-印）のちょうど境界にあたっている。この「バランスのとれた」領域は $(B; (0))$

や a_i を決める乱数の種によって多少左右に動くが、相図の全体的な様子は Fig.8 と同様である。

グローバルなトレンドの現われる原因として、株価 $P(t)$ の決め方と取引の仕方の2つの非対称な定義によると考えられるので、この2つの定義をいろいろと変えてみる。まず、取引の仕方はそのまま株価の定義を変えてみると、グローバルなトレンドの様子は Table1-1 のようになる。 γ を例えば 0.5 に固定して αN を 1.0 から 2.0 へ変えてみると、 $P(t)$ を $\max\{B_i\}$ で定義すると Fig.8 で見たようにグローバルなトレンドは上向きから下向きに変わる。一方、 $P(t)$ を $\min\{B_i\}$ で定義すると（やはりグローバルなトレンドが現われて）全て、下向きのトレンドである。

次に、取引の仕方を 1 対 1 にしてみる。つまり、最大の買値を付けたディーラーと最小の売値を付けたディーラーだけが売買に参加できるとする。このとき、Table1-1 のときと同様に株価の定義を変えてみると Table1-2 のようになる。 $P(t)$ を $\max\{B_i\}$ で定義するといずれの αN についても下向きのトレンドが現われ、 $P(t)$ を $\min\{B_i\}$ で定義するといずれの αN についても上向きのトレンドが現われる。中段の Mean は $P(t)$ を $\max\{B_i\}$ と $\min\{B_i\}$ の平均で定義したものである。このときは、乱数の種によって上向きのトレンドになったり下向きのトレンドになったりするが、いずれの場合も αN を変えてもトレンドの向きは変わらない。

結局のところ「バランスのとれた」株価の変動は、最初の定義のときのみ現われる。このトレンドの向きの交代は相転移に似ている。その臨界的な振る舞い（即ち、くねくねとした変動）に興味があるので、以下、この領域についてのみ考える。

Fig.9(a) はダイナミクス Eq.(5) による臨界的な条件の株価の変動のグラフである。このグラフの一部を拡大したのが Fig.9(b) で、暴落のような急激な減少が見られる。このような急落は次のようにして起こる。落下の始ま

りにおいて $\Delta P (= P(s) - P(s_{\text{prev}}) \ (s = t_{\text{prev}}))$ だけ減少し、取引成立条件 (1) が $T (= t - s)$ ステップの間成り立たないとする。すると、Eq.(5)により全ての $\{B_i\}$ は T ステップの間、時刻 t に再び取引成立条件 Eq.(1) が成り立つときまで $\gamma \Delta P$ ずつ一緒に減少して、従って、 $P(t) - P(t_{\text{prev}})$ は $\gamma T \Delta P$ となる。このようにダイナミクス Eq.(5) で付け加えられた新しい項によって、ダイナミクス Eq.(4) が本来持っている揺らぎが増強されて、株価 $P(t)$ の変動が不安定になる。

Fig.10 はダイナミクス Eq.(5) によるシミュレーションの株価の変動のパワースペクトルである。ほぼ全周波数領域で f^{-2} のスペクトルとなっている。これはダイナミクス Eq.(5) で付け加えられた新しい項によって、ダイナミクス Eq.(4) が本来持っている揺らぎが増強されて、株価 $P(t)$ の変動が不安定になる。Fig.5 と Fig.10 との違いは $c_i \{P(t) - P(t_{\text{prev}})\}$ という新たに付け加えられた項のみによる。パワースペクトルが f^{-2} となるのはシステムサイズが大きいとのみである。

次に、初期条件に対する系の敏感さを調べてみる。Fig.11 はダイナミクス Eq.(5) による株価 $P(t)$ の変動 (a) とその 10 万回目の取引成立後、ランダムに 5 人のディーラーを選んで、その $\{B_i\}$ を 0.5% だけ変えたものの株価 $P(t)$ の時間発展 (b) である。よくみると細部は異なるが、全体的な流れは非常によく似ている。これは、初期のずれが指数関数的に増大する小数自由度系における普通のカオスとは、様子を異にしている。

このことに関連して、さらに、ハミング距離

$$d(t) = \sum |B_i(t) - B'_i(t)| \quad (6)$$

の時間発展を Fig.12 に示す。ここで $B'_i(t)$ は説動を加えられた系のしきい値である。Fig.12 からわかるように初期のずれは指数的ではなく冪的に増大している。即ち、最大リアプノフ数は 0 であると考えられるので、この系は”カオスの辺縁”にあるといえる。

4. まとめ

決定論的なしきい値ダイナミクスを用いた株価の変動についての株式市場のモデルを数値的に解析した。モデルはできるだけ簡略にするために、一切のファンダメンタルズを無視して銘柄も1種類とし、さらに株式の数量と流通するお金の量も制限していない。ディーラーが市場価格の変動を考慮しない場合、つまり、ダイナミクスEq.(4)の場合、系は株価の変動にトレンドのない定常状態に落ち着く。しかし、ディーラーが市場価格の変動を考慮すると、即ち、ダイナミクスEq.(5)のように $c_i \{P(t) - P(t_{prev})\}$ の項をつけた場合、系は非常に不安定になり、決定論的なダイナミクスであるにもかかわらず、 f^{-2} の形のパワースペクトルが得られる。多くの場合株価の変動に上向きや下向きのトレンドが現われるが、最初の取引と株価の定義（つまり、買い手1人に複数の売り手の取引で、 $P(t) = \max\{B_i\}$ ）のもとにおいてのみトレンドの向きの転移が起こり、その向きの転移する臨界的なパラメータ領域においては「バランスのとれた」株価の変動が得られる。この「バランスのとれた」変動において初期値の違いは時間に対して冪的に増大する。従って、この系は”カオスの辺縁”にあると考えられる。

参考文献

[1] B.B.Mandelbrot [1982] "The Geometry of Nature"

(W.H.Freeman and Company, San Francisco)

広中平祐 監訳[1985] 「フラクタル幾何学」

(日経サイエンス)

[2] H.Takayasu, H.Miura, T.Hirabayashi, and K.Hamada [1992]

"Statistical Properties of Deterministic Threshold Elements

— The case of market price," Physica A184, 127-134

1. one buyer vs. many sellers

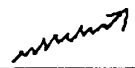
$P \backslash \alpha N$	smaller	medium	larger
Max $\{B_i\}$			
Min $\{B_i\}$			

Table.1-1 買い手 1 人と複数の売り手の取引をするときの株価の変動のグローバルなトレンドの様子。上段は株価を $\max\{B_i\}$ で定義した場合、下段は株価を $\min\{B_i\}$ で定義した場合。

2. one buyer vs. one seller

$P \backslash \alpha N$	smaller	medium	larger
Max $\{B_i\}$			
Mean			
Min $\{B_i\}$			

Table.1-2 買い手、売り手ともに 1 人ずつの取引をするときの株価の変動のグローバルなトレンドの様子。上段は株価を $\max\{B_i\}$ で定義した場合、中段は株価を $\max\{B_i\}$ と $\min\{B_i\}$ の平均で定義した場合、下段は株価を $\min\{B_i\}$ で定義した場合。

Figure Captions

Fig.1 (a) 1949年5月16日から1990年12月18日までの
12122日間の東京証券取引所における日経平均の変動。
(b) (a)の変動の片対数表示。

Fig.2 Fig.1の変動のパワースペクトル。

Fig.3 時刻 t に取引条件(1)が成立したときの取引の模式図。

各長方形の長さは定数 Λ で、上端(下端)は各ディーラーの売値
の(買値の)しきい値を表す。この図では、買い手は $i=2$ で売
り手は $i=1,3$ である。 δ はEq.(3)で定義した定数。 MP はこの
取引で決まる株価を示す。

Fig.4 ダイナミクスEq.(4)によるシミュレーションの株価の変動の例。
 $N=100$, $\Lambda=1.0$, $\delta=0.4$, $\alpha=0.01$ で $B_i(0)$ は $(-1.0, 1.0)$
の範囲からランダムに選ぶ。

Fig.5 ダイナミクスEq.(4)によるシミュレーションの株価の変動のパワ
ースペクトル。全ての条件はFig.4と同様。

Fig.6 システムサイズ(a) $N=4$ 、(b) $N=8$ 、(c) $N=10$ 、
(d) $N=16$ のときの株価の変動のパワースペクトルの例。
システムサイズ以外の条件はFig.4と同様。

Fig.7 ダイナミクスEq.(5)によるシミュレーションの株価のトレンドのある時間発展の典型的な例。 $\gamma=0.5$ で他の条件はFig.4と同様。

(a) $\alpha N=1.1$ における上向きのトレンド。(b) $\alpha N=1.4$ における上向きのトレンド。

Fig.8 αN と γ に対するトレンドの現われ方の模式的相図。点線は「バランスのとれた」株価の変動が得られる領域で、+印は上向きのトレンドの得られる領域、-印は下向きトレンドが得られる領域である。

Fig.9 (a) ダイナミクスEq.(5)による「バランスのとれた」株価の変動の例。 $\alpha N=1.23$, $\gamma=0.5$ 、それ以外の条件はFig.4と同様。

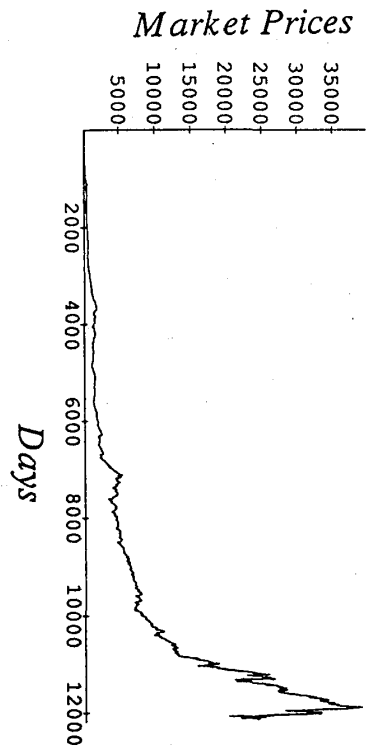
(b) 暴落のように見える典型的な株価の変動。(a)のグラフの一部の拡大である。

Fig.10 ダイナミクスEq.(5)によるシミュレーションの株価の変動のフーリエスペクトル。全ての条件はFig.9と同様。

Fig.11 ダイナミクスEq.(5)によるシミュレーションの株価の変動(a)とそれに摂動を加えた変動(b)との比較。(b)は(a)の10万回目の取引のときにランダムに選んだ5人のディーラーの B_i を0.5%だけ変えたものである。条件はFig.9と同様。

Fig.12 Fig.11の2つのシミュレーションのハミング距離の時間発展の両対数表示。

(a)



(b)

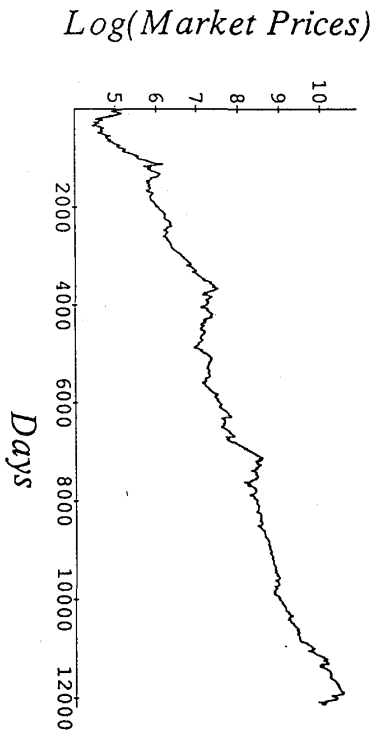


Fig.1 Hirabayashi et al.

Log(Power)

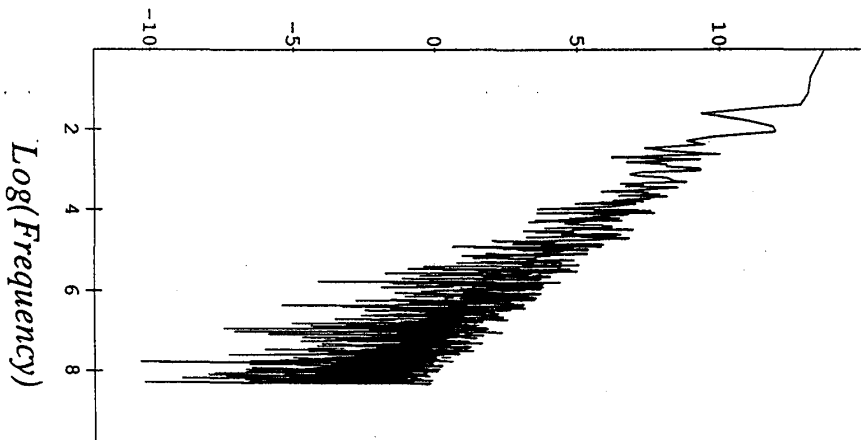


Fig.2 Hirabayashi et al.

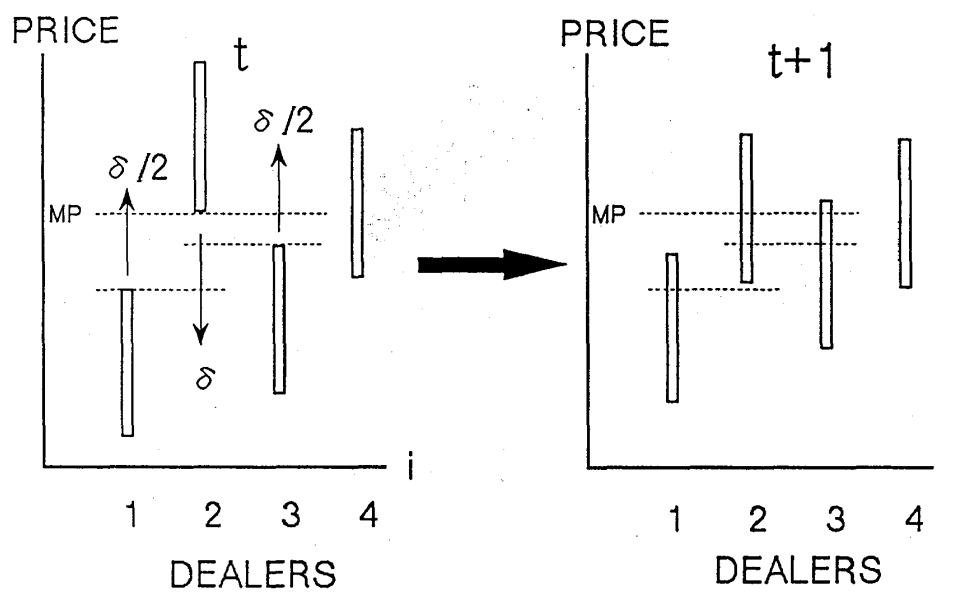


Fig.3 Hirabayashi et al.

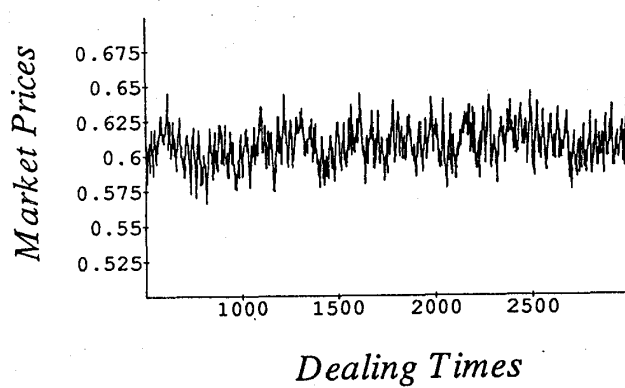


Fig.4 Hirabayashi et al.

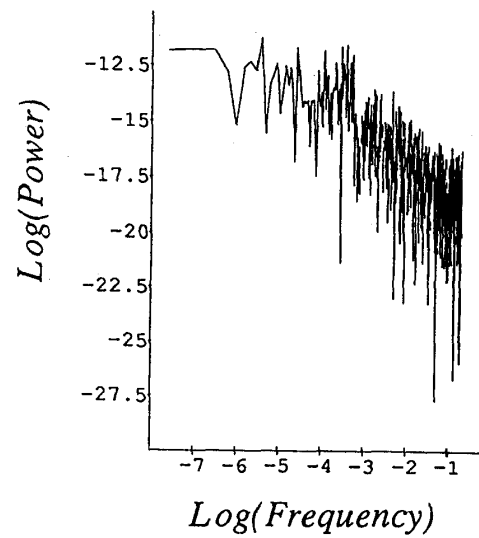


Fig.5 Hirabayashi et al.

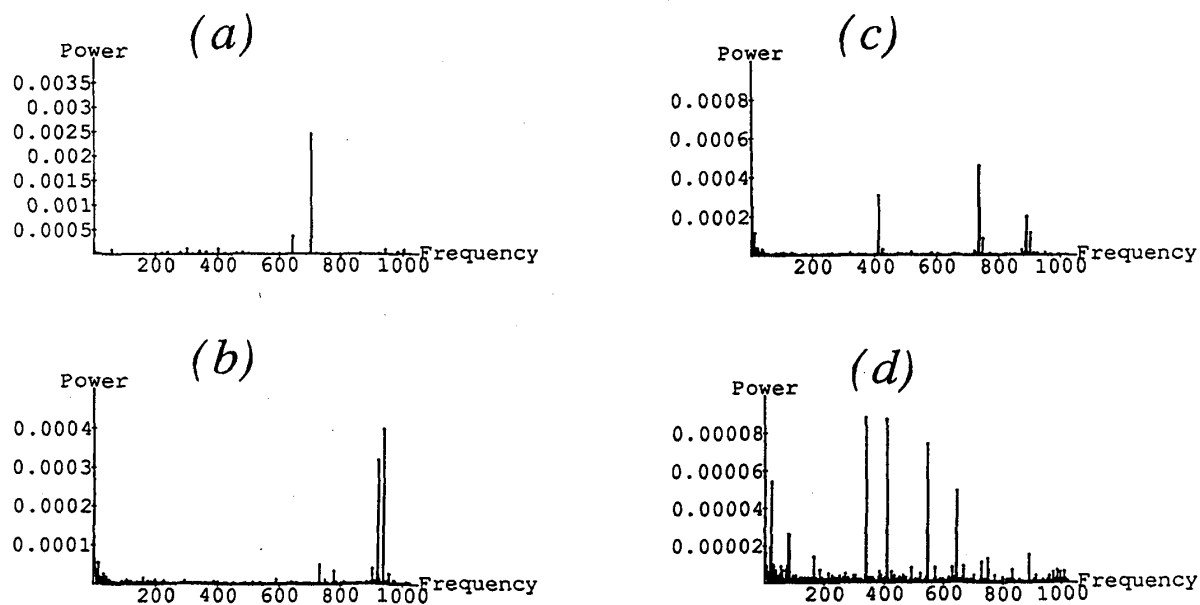


Fig.6 Hirabayashi et al.

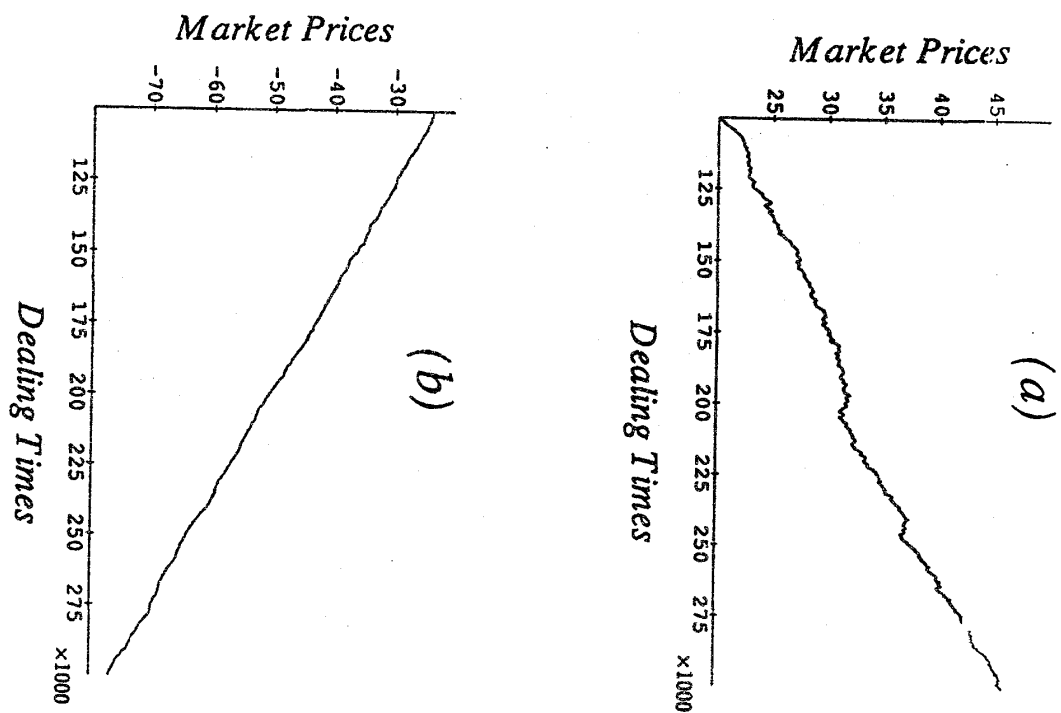


Fig.7 Hirabayashi et al.

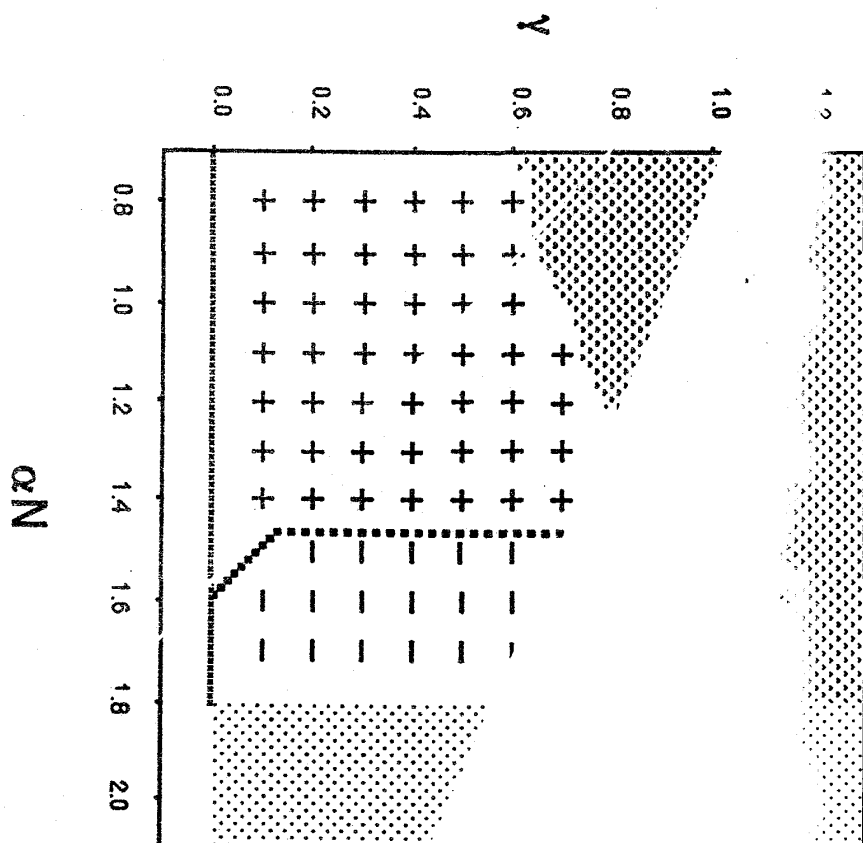


Fig.8 Hirabayashi et al.

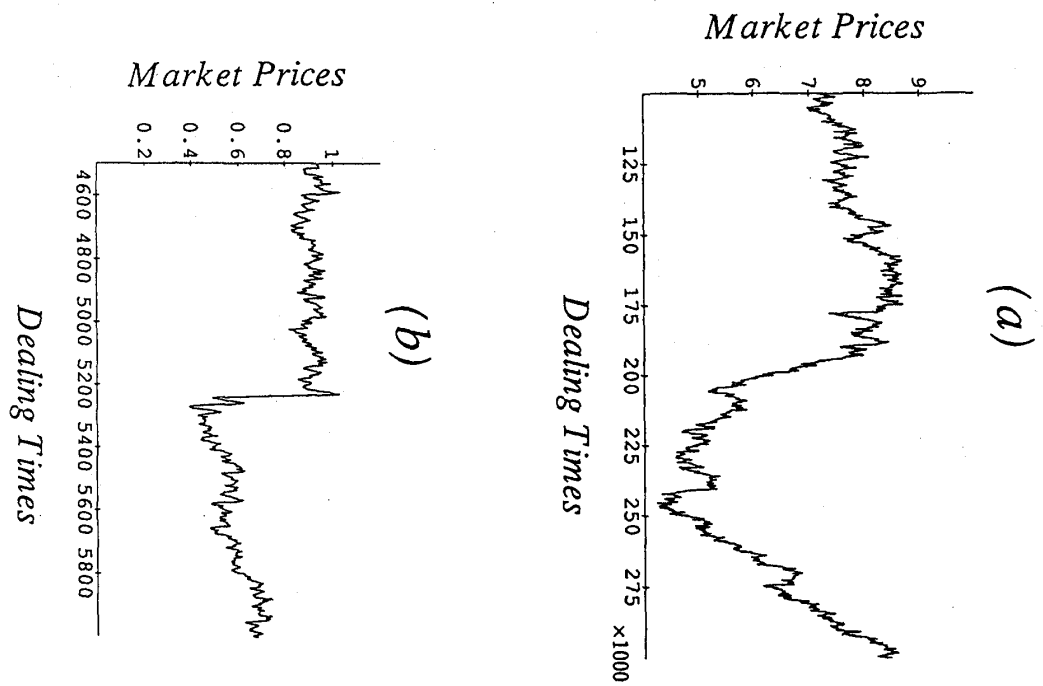


Fig.9 Hirabayashi et al.

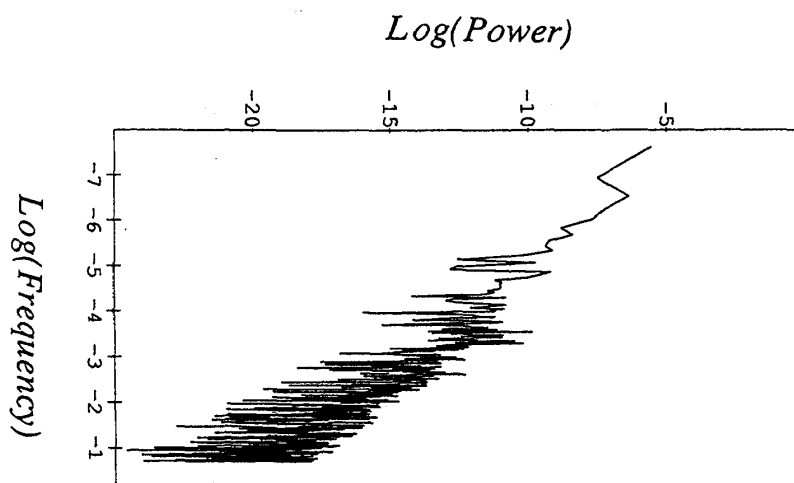


Fig.10 Hirabayashi et al.

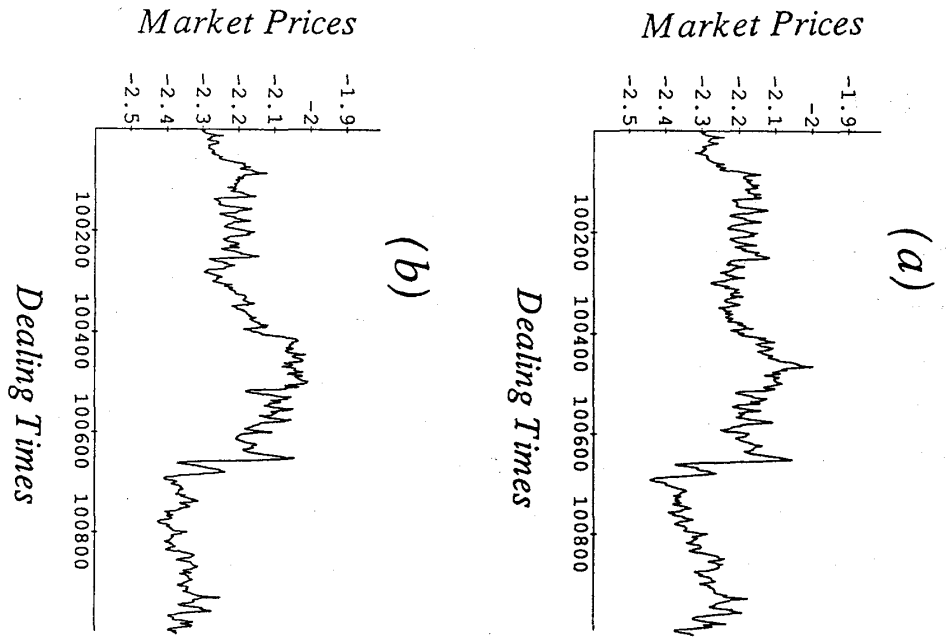


Fig.11 Hirabayashi et al.

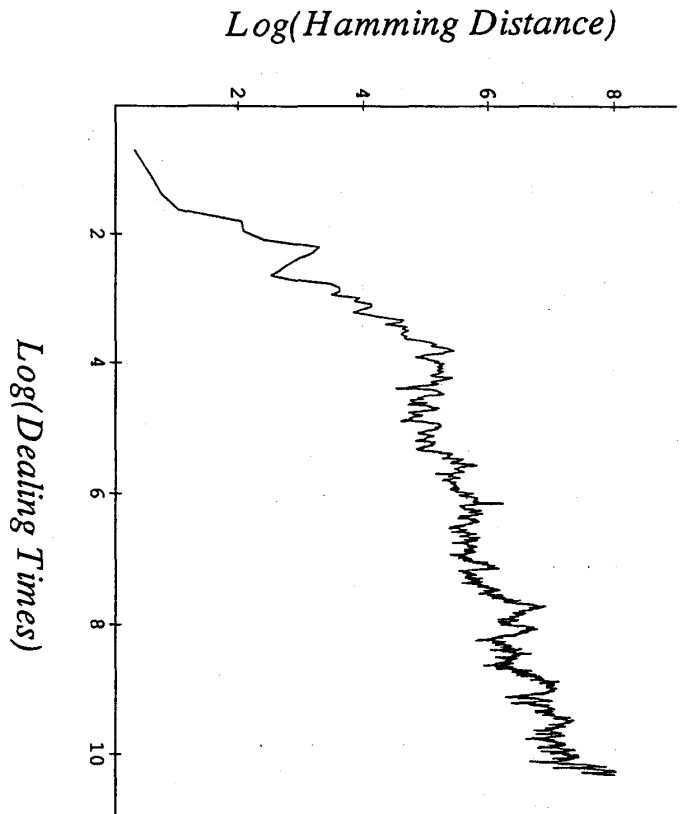


Fig.12 Hirabayashi et al.