

信用イベント発生強度モデルによるクレジットサイクルの変動要因の分析

筑波大学／三井物産デジタル・アセットマネジメント株式会社 廣中 純

Jun Hironaka

University of Tsukuba／Mitsui & Co. Digital Asset Management, Ltd.

【Abstract】

本研究では、日本のクレジット市場で観測可能なファクター[マクロ要因および過去の信用イベント発生実績(格付機関による発行体格付の変更件数, 企業の倒産件数)]のほか, 市場で直接観測することができないファクター(frailty)の存在を仮定し, これらを考慮した信用イベント(格上げ・格下げ)の発生しやすさ(発生強度)を表すモデルを提案する。

信用イベントのうち, 「格上げ」「格下げ」の各発生強度を表すモデルのパラメーターは, インサンプル期間(1998年4月1日～2022年12月31日)において95%有意水準で統計的に有意であるとの結果を得た。またアウトオブサンプル期間(2013年1月1日～2023年6月30日)では, 「格上げ」の発生強度を表すモデルのパラメーターのみ95%有意水準で統計的に有意であるとの結果が示された。

次に, 信用イベントが「格下げ」である場合について, ①全てのファクター(マクロ要因, 過去の信用イベントの影響, frailty の3つ), ②マクロ要因のみ, ③マクロ要因+過去の信用イベントの影響のみ, ④マクロ要因+frailty のみ, で構成される各モデルについて, パラメーターの推定値および時間変更後の強度に対する適合度検定(ポアソン分布テスト)を実施した結果, 全てのファクターにより構成されるモデルはその適合度に高い有意性が見られた。特に, 過去の信用イベントの影響および frailty はともにモデルのパラメーターの推定値に大きく影響を及ぼすと考えられる。

次に, 「クレジットサイクル(本研究では「総与信・GDP 比率」とする)」の変動要因を探るため, 「過去の信用イベントの影響+frailty」とクレジットサイクルとの関連性について, 1)レジーム・スイッチモデルによる, 「過去の信用イベントの影響+frailty」と総与信・GDP 比率のレジーム推移の比較, 2)インパルス応答関数による, 総与信・GDP 比率の構成要素にショックを与えた場合における「過去の信用イベントの影響+frailty」に及ぼす影響の有無, および 3) 総与信・GDP 比率を構成する要素(GDP・総与信額)を状態空間モデルで表した場合における各成分[水準(level)・傾き(slope)]と「過去の信用イベントの影響+frailty」との間における, グレンジャーの意味での因果性の存在の有無, の3点から検証を行なった。

まず 1)について, 総与信・GDP 比率と「過去の信用イベントの影響+frailty」は異なるレジーム推移の傾向を示した。次に 2)については, 「GDP の水準成分」「総与信額の傾き成分」「総与信・GDP 比率の水準成分・傾き成分」は「過去の信用イベントの影響+frailty」に長期的に影響を及ぼす点を示された。最後に 3)については, 「GDP の水準成分」「総与信額の傾き成分」「総与信・GDP の水準成分・傾き成分」について, 「過去の信用イベントの影響+frailty」とグレンジャーの意味での因果性が見られた。

1. はじめに

銀行等の金融機関は、バーゼル規制の下で、自社が保有する信用リスクのあるポートフォリオ(以下「信用ポートフォリオ」という)について、デフォルト確率、デフォルト時損失(Loss Given Default, LGD)、景気後退期を考慮した LGD および信用 VaR(Value at Risk)等の信用リスク量を算出する。2007 年に顕在化したサブプライム問題や、2008 年 9 月のリーマン・ブラザーズの破綻を契機に拡大した世界的な金融・経済危機における状況を踏まえ、金融機関の自己資本比率の安定的な維持を目的に導入されたバーゼルⅢでは、金融機関に対して自己資本の質・量の改善や景気後退期に取り崩しが可能となる追加的な資本の積み増し(資本バッファ)等を要請¹する。こうした新しい規制が金融機関の経営戦略や信用ポートフォリオのリスク量の算出プロセスに及ぼす影響は大きいと考えられる。

しかしながら、金融機関の自己資本比率は経済や金融環境に大きく左右されるため、その水準を安定的に維持することは容易ではない。例えば景気拡大期(好況期)においては、自己資本比率を高い水準に維持できるため、金融機関は過度にリスクを取ることが可能となる。一方、景気後退期(不況期)には、債務者のデフォルト確率やデフォルト時損失が悪化、金融機関のリスク・アセットの増加に伴う自己資本比率の低下を通じて、企業や個人に対する貸出等の信用供与が抑制される。その結果、景気の変動がより増幅される傾向にある点が指摘されている²。また、バーゼルⅢにてリスク・アセットのアウトプット・フロアが導入されたことにより、先進的内部格付手法を採用する金融機関のリスク・アセットが増大し、結果として自己資本比率が低下する可能性がある。そのため金融機関にとって、格付機関による格付を利用した標準的手法に基づくリスク・アセットの管理をより重視せざるを得ない状況となっている。一方、格付機関は、投資対象の信用リスクを判断する際の基準となる格付方式として、短期的な景気変動に左右されない「スルー・ザ・サイクル(Through-the-Cycle, TTC)格付³」を採用している。これはバーゼルⅢにおける格付の考え方に準拠するものである⁴。

以上により、金融機関はバーゼルⅢへの対応のため、格付機関による格付、金利・株価等のマクロ要因や、日本のクレジット市場(社債市場等)全体の信用リスクの変動、すなわち、「クレジットサイクル(例: 総与信・GDP 比率に代表される、金融機関による信用供与額の拡大・縮小のトレンド)」を踏まえた信用ポートフォリオのリスク管理を行なう必要があると考える。

本研究は、上記を踏まえた信用ポートフォリオ管理方法として、Yamanaka et al.(2012)や Azizpour et al.(2018)で示された強度モデルを拡張し、市場で観測可能なファクター[マクロ要因および過去の信用イベントの影響(企業の倒産時における負債総額)]のほか、市場で直接観測することができないファクター(それを *frailty* と名付ける)の存在を仮定し、これらを考慮した信用イベントの発生しやすさ(発生強

¹ 主な内容は次の通り。①自己資本の質および量の改善策としての最低自己資本比率の引き上げ(最低所要普通株等 Tier1 比率および Tier1 比率の最低水準を、各々 4.5%、6.0%に引き上げ)、②国際的に活動する銀行に対する流動性基準の導入[流動性カバレッジ比率(LCR)、安定調達比率(NSFR)]の導入、③レバレッジを抑制するレバレッジ比率の導入、④好況時に、ストレス時に取り崩しが可能な資本バッファを積み立て、⑤ストレス・テストの高度化。

² プロシクリシティ(景気変動増幅効果)という。

³ スルー・ザ・サイクル格付は、格付の対象となる債務者の直近の決算状況ではなく、長期の景気変動の影響を勘案して決定される。そのため、景気の局面に応じて、格付毎のデフォルト確率を変動させる(そのため、ある債務者に付与された格付は景気の局面に関わらず一定)という特徴がある。一方、格付機関の従来の格付手法であるポイント・イン・タイム(Point-in-Time, PIT)格付は、債務者の直近の決算期の状況を重視して決定される。PIT 格付は、景気の局面に応じて債務者格付が変動する(景気悪化局面では格下げ傾向、景気改善局面では格上げ傾向となる)点に特徴がある。

⁴ 2017 年 12 月に公表されたバーゼルⅢの最終規則では、外部格付を利用した標準的手法に基づくリスク・ウェイトの管理がより重視されることとなった。そのため、本研究における信用イベントの発生しやすさ(格付変更の発生しやすさ)を表現するモデルは、バーゼルⅢの主旨に則った信用リスク管理手法の 1 つを提示するものとする。

度)を表すモデル(以下「モデル」という)を提案する。またモデルにより、日本のクレジット市場における「クレジットサイクル」の変動要因の説明を試みる。

具体的には、まず、信用イベント(格上げ・格下げ)をクレジットサイクルの代理変数と仮定したうえで、各々の信用イベントの発生しやすさ(発生強度)を表すモデルを構築、そのパラメーターを推定する。次に、モデルを構成するファクター(マクロ要因、過去の信用イベントの影響、*frailty*)の組み合わせの違いによる、モデルの説明力の差異に対する検証(尤度比検定)を行なう。また、クレジットサイクルの変動要因を探るため、「過去の信用イベントの影響+*frailty*」とクレジットサイクルとの関連性について、1)レジェーム・スイッチモデルによる、「過去の信用イベントの影響+*frailty*」とクレジットサイクルのレジェーム推移の比較、2)クレジットサイクルを構成する要素(GDP および総与信額)を状態空間モデルで表した場合における各成分[水準(level)・傾き(slope)]と「過去の信用イベントの影響+*frailty*」との間で、グレンジャーの意味での因果性の存在の有無、および 3)インパルス応答関数による、クレジットサイクルの構成要素にショックを与えた場合における「過去の信用イベントの影響+*frailty*」に及ぼす影響、の 3 点から検証を行なう。

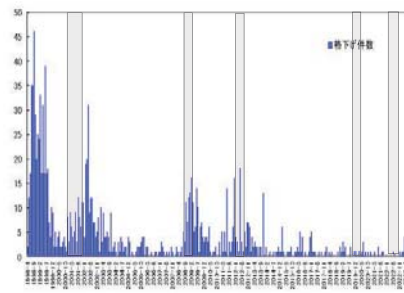
日本のクレジット市場におけるクレジットサイクルの例として、日本銀行が公表する「総与信・GDP 比率」を挙げることができる⁵。総与信・GDP 比率は、同行が公表する資金循環統計における企業・家計等に対する民間金融機関貸出等の合計値を GDP で除した数値として定義される。

図 1 は、1998 年 4 月末から 2024 年 3 月末における、総与信・GDP 比率の推移(左図、四半期)、および株式会社格付投資情報センター(R&I)が公表する発行体格付のうち、格下げ件数の推移(右図、月次)を示したものである。また、図中の網掛けは「景気後退期」を表しており、「内閣府が公表する景気動向指数のうち Composite Index の値が 3 期以上にわたり連続して下落した期間」と定義する(総与信・GDP 比率が上昇している期間⁶が「景気後退期」に相当)。

(図 1) 総与信・GDP 比率の推移(左図)および格下げ件数(R&I)の推移(右図)



(出所) 日本銀行「資金循環統計」、内閣府「国民経済計算」



(出所) Bloomberg

金融機関の総与信額は、上記の期間を通じてほぼ一定の水準で推移する一方で、GDP は景気動向により変化するため、これが日本のクレジットサイクルの変動要因となっていると考えられる。そのため、

⁵ 金融システムレポートにて公開している。なお各国の中央銀行が公表するクレジットサイクルの定義もほぼ同様である。

⁶ 図 1 の網掛け部分(景気後退期)は、各々、1997 年第 4 四半期-1998 年第 3 四半期:アジア通貨危機時、2001 年第 1 四半期-2002 年第 1 四半期:ネットバブル崩壊時、2008 年第 2 四半期-2009 年第 1 四半期:リーマン・ショック時、2011 年第 1 四半期-同年第 2 四半期:東日本大震災時を示している。

金融機関にとって、クレジットサイクルを勘案した自社ポートフォリオの信用リスク管理を実施することは難しい。また、格下げ件数が増加している期間は景気後退期とほぼ一致していることが見て取れる。

以上より、日本のクレジット市場全体のクレジットサイクルは、格付機関による信用イベント(格上げ・格下げ)にて代替することができると考えられる。⁷

2. 先行研究

次に、過去のデフォルト実績、経済指標等のマクロ要因や frailty をモデルのファクターとして、デフォルトの集積(default clustering)要因の説明や信用ポートフォリオの格付推移確率の推定を試みた先行研究を紹介する。

まず Koopman et al.(2009)は、Standard & Poor's による格付推移データおよび格付対象企業のデフォルト実績に基づき、マクロ要因(GDP・マネーサプライ・インフレ率等)と格付推移との関連性を検証し、格付の変更事象、特に「格下げ」と「デフォルト」に大きく影響するのは潜在変数(latent factor)、すなわち frailty であり、マクロ要因が格付変更に及ぼす影響は限定的であるとの分析結果を示した。

なお Koopman et al.(2009)では、格付推移の強度(ある企業の格付が特定の格付に推移する強度)を比例ハザード過程で表すとともに、frailty は AR(1)過程に従うと仮定した。

次に Duffie et al.(2009)は、金融機関を除く米国上場企業のデフォルト発生強度モデルを構築し、マクロ要因(米国株価指数・米国債利回り等)や Moody's による過去のデフォルト実績(対象期間:1974 年～2004 年)等の観測可能なファクターに加え、個別企業間のデフォルトの依存構造に強い影響を及ぼすと考えられる観測不可能な common dynamic latent ファクター、すなわち frailty の存在の有無について検証した。

Duffie et al.(2009)のモデルでは、個別企業のデフォルト発生強度は比例ハザード過程に、frailty は Ornstein - Uhlenbeck(OU)過程に各々従うと仮定した。これらの仮定に基づき、デフォルト発生強度の尤度関数を最大にするパラメーターの組み合わせを最尤法により推定し、個別企業に共通かつ観測不可能なファクター(frailty)の時系列の推移および条件付きの事後分布の推定を行なった。⁸

また Yamanaka et al.(2012)は、R&I による日本企業の格付変更データに基づき、日本経済全体の信用イベント(格上げ・格下げ・デフォルト)を表す強度モデルを提案した。なおモデルは自励的(self-exciting)過程に従い、かつ状態依存するものと仮定した⁹。

更に確率的細分化(random thinning)により、日本経済全体の信用イベントの発生強度を個別ポートフォリオの信用イベント発生強度に割り当てたうえで、個別ポートフォリオの信用 VaR 等のリスク量を推定した。

⁷ 日本銀行が公表する総与信額には、格付機関による格付が付与されていない企業に対する与信額が含まれており、これもクレジットサイクルを構成する要素であると考えられるが、本研究では考慮しない。また上場企業を含めた企業の信用状況の調査業務を行なう株式会社東京商工リサーチが公表する倒産データ(倒産時の負債総額が 1,000 万円以上の企業で構成)によると、2000 年 4 月以降の月間倒産件数は約 1,200 件に及ぶ。リーマン・ショック前後の月間倒産件数も大きな変化はないことから、与信先企業に対する金融機関の与信内容が変化しているものと考えられる。そのため、本研究におけるクレジットサイクル分析のためのデータには適さないと考えられる。また本研究では、クレジットサイクルの転換点の推定は行っていない。

⁸ 具体的には EM(Expectation-Maximization) algorithm を応用し、frailty のパラメーター k および h を推定するため、frailty のサンプル・パスを Markov Chain Monte Carlo の Gibbs Sampler にて生成する。

⁹ スタンフォード大学の Giesecke 教授を中心とするリサーチグループが提唱する「トップダウン・アプローチ」を信用リスクモデルの基本概念とする。トップダウン・アプローチでは、ポートフォリオを構成する個別債務者の信用リスクの特性をひとまず置き、ポートフォリオ内でデフォルトイベントがいつ発生するのかに着目する。

最後に、本研究で提案する信用イベント発生強度モデルを構築する際に参考とした Azizpour et al.(2018)では、Moody's による過去のデフォルト実績(対象期間:1970 年～2010 年)、マクロ要因および frailty の 3 つのファクターにて米国経済全体のデフォルト強度モデルを構築し、米国企業におけるデフォルト集積(default clustering)の源泉が、主として frailty とデフォルトの伝播(default contagion)にある点を明らかにした。なお末尾に、主な先行研究にて提案されたモデルのファクターである frailty の前提やマクロ要因の種類等をまとめた。

なお筆者が知る限り、日本のクレジット市場全体における信用リスクの変動を説明することを目的に、市場で観測可能なファクターに加え、市場で観測できないファクター(frailty)を考慮した信用イベントの発生強度モデルを提案した先行研究はこれまでに存在しないと考える。またクレジットサイクルの変動と frailty との関連性を検証する試みは、金融機関による資本バッファ規制への対応やシステミック・リスクの計測手法等への適用につながる可能性があることから、本研究は新規性を有すると思われる。

3. 信用イベント発生強度モデル

本章では、Koopman et al.(2009), Yamanaka et al.(2012)および Azizpour et al.(2018)¹⁰で提示された強度モデルを拡張し、観測可能なファクター(マクロ要因・過去の信用イベント)と観測不可能なファクター(frailty)を考慮した、信用イベントの発生強度を表すモデルを示す。

まず信用イベントの発生強度モデルの内容について説明する。フィルトレーション付きの完備確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ [$(\mathcal{F}_t)$:完全フィルトレーション], $0 < T_1^i < T_2^i < \dots \in \{\mathcal{F}_t\}$ 適合理論点過程とする $(T_n^i$: イベント*i*の発生時刻)。また観測フィルトレーション $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ ¹¹の下での計数過程を $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n^i \leq t\}}$, λ_t^i を N_t^i に対する $\{\mathcal{F}_t\}$ 補正過程とすると、 $N_t^i - \int_0^t \lambda_s^i ds$ は局所マルチンゲールとなる。

また、R&I が Bloomberg 等を通じて公表する発行体格付の変更を「信用イベント[$i = 1$ (格上げ), $i = 2$ (格下げ)]」と見做し、「格上げ」「格下げ」の各信用イベントが発生する強度を表すモデルを考える。また、本研究において信用イベントと見做す「格付の変更」は、日本のクレジット市場全体の信用拡張・信用収縮(クレジットサイクル)の代理変数であると仮定する。

以上の前提に基づき、信用イベント発生強度 λ_t^i を次式で表す。

$$\lambda_t^i = \exp(a_0^i + \sum_{k=1}^d a_k^i X_{k,t}) + Y_t + \delta^i R_t \quad (1)$$

各々の変数は以下の通りとする。

X_t :マクロ要因(観測可能なファクター)¹²

$$\exp\left(a_0^i + \sum_{k=1}^d a_k^i X_{k,t}\right)$$

¹⁰ 本研究の軸となる filtered intensity の計算方法については、Azizpour et al.(2018)の working paper 段階のバージョンである Azizpour et al.(2012)に詳細に記述されている。また、本研究の理論面については、Giesecke and Schwenkler (2018)を参照した。

¹¹ 観測値は、「マクロ要因」「企業の倒産件数」の 2 種類である。

¹² 実質 GDP 成長率、鉱工業生産成長率、M3(マネーストック)、株価指数(TOPIX)の収益率、TOPIX ボラティリティ、日本国債イールドスプレッド(10 年物・1 年物)、社債イールドスプレッド(AAA 格・BBB 格)等。

Y_t : frailty (観測不可能なファクター)¹³

$$dY_t = z^i(c^i - Y_t)dt + \sigma^i \sqrt{Y_t} dW_t, \quad z, c \geq 0, \quad 2zc \geq 1$$

R_t : 過去の信用イベントの影響(観測可能なファクター)¹⁴

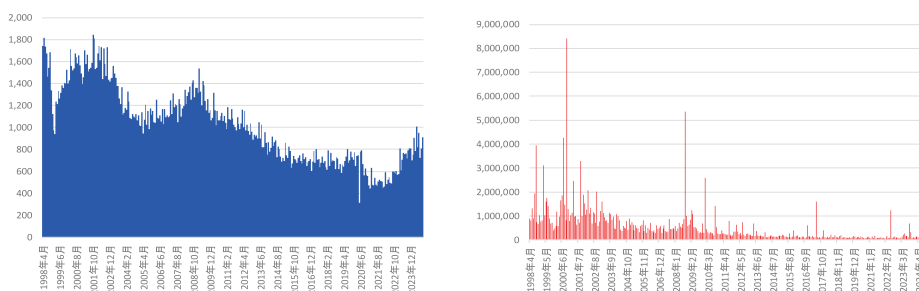
$$\delta \Sigma_{T_n \leq t} \exp(-\kappa^i(t - T_n)) U_n \quad U_n: \text{倒産時の負債総額(対数)}$$

マクロ要因のファクターは、格付変更件数(被説明変数)とファクターの候補(説明変数)とのポアソン回帰により、実質 GDP 成長率(ラグ:4)、AAA 格社債利回り、東証株価指数(TOPIX)の収益率、日本国債のイールドスプレッド(10 年物・1 年物)、社債のイールドスプレッド(AAA 格・BBB 格)、日本国債 3 ヶ月物利回りおよび TOPIX ボラティリティーの変化率の 7 種類を選択した(いずれも月次、実質 GDP 成長率は月次に補間)。

次に frailty は、Azizpour et al.(2018)に倣い、中心回帰性を有する Cox-Ingersoll-Ross 過程に従うものと仮定した。また、「過去の信用イベントの影響」を表す代理変数として、株式会社東京商工リサーチが公表する、倒産時の負債総額が 1,000 万円以上であった企業の負債総額を選択した。

図 2 は、東京商工リサーチが公表する月次の企業倒産件数(左)および負債総額(右、単位:百万円)の各推移である。これらより、図 1 の景気後退期(2001 年第 1 四半期～2002 年第 1 四半期、2008 年第 2 四半期～2009 年第 1 四半期等)には企業の倒産件数も増加していることが見て取れる。

(図 2) 企業倒産件数(左)および企業倒産時の負債総額(右) (1998 年 4 月-2023 年 6 月)



(出所) 東京商工リサーチ

¹³ Duffie et al.(2009)は、frailty が中心回帰性を持つ OU 過程に従うと仮定している。OU 過程では frailty が負値となる可能性がある点を踏まえ、本研究では frailty を Cox-Ingersoll-Ross(CIR)モデルに類似する形とした。なお、Azizpour et al.(2018)では、CIR モデルのパラメーターであるボラティリティー項 σ の有無がパラメーター推定値に及ぼす影響は極めて小さいことが示されている。

¹⁴ 過去の信用イベントの影響は Hawkes 過程に従い、ある企業の信用力の変化が他の企業に伝搬すると仮定する。また 1 日に複数件の信用イベントが同時に発生した場合においても、これらは互いに独立に発生したものと見做す。

以上より、本研究における信用イベント発生強度モデルは、「マクロ要因」「frailty」「過去の信用イベントの影響」の3ファクターで構成されるものとする。

次に、信用イベント発生強度モデルのパラメーターの推定方法について説明する。

(1)式に基づく下記の尤度関数 $\mathcal{L}_\tau(\theta)$ を最大にするパラメーターを最尤法により推定する。

$$\mathcal{L}_\tau(\theta) \propto \mathbb{E}^*[1/Z_\tau | \mathcal{G}_\tau], \quad \mathbb{E}[Z_\tau | \mathcal{G}_\tau] = 1 \quad (2)$$

推定すべきパラメーターのセットは、 $\theta = (a_0, a_k, b, z, c, \delta, \kappa)$ である $[(a_0, a_k)$:マクロ要因, (b, z, c) : frailty, (δ, κ) : 過去の信用イベントの影響].

(2)式における $\mathbb{E}^*$ は、Radon-Nikodym 微分による測度変換

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = Z_t = \exp\left(-\int_0^t \log(\lambda_{s-}) dN_s + \int_0^t (1 - \lambda_t) ds\right)$$

で定義される、パラメーター θ を所与とした場合の $\mathbb{P}^*$ (リスク中立確率)の下での期待値となる。

モデルのデータは観測値のみを含み、frailtyを含んでいない。そのため、Azizpour et al.(2012) の Proposition 4.1 に基づき、観測フィルトレーションを条件とするフィルター付きの強度 (filtered intensity) h_t に変換する[(3)式]¹⁵。

$$h_t = \mathbb{E}(\lambda_t | \mathcal{G}) = \mathbb{E}^*(\lambda_t / Z_t | \mathcal{G}) / \mathbb{E}^*(1 / \lambda_t | \mathcal{G}), \quad a. s. \quad (3)$$

なお、 h_t の具体的な形は以下の通りである。

$$h_t^i = \frac{\mathbb{E}_\theta^*(\lambda_t^i \exp(\int_0^t \log(\lambda_{s-}^i) dN_s + \int_0^t (1 - \lambda_s^i) ds) | \mathcal{G}_t)}{\mathbb{E}_\theta^*(\exp(\int_0^t \log(\lambda_{s-}^i) dN_s + \int_0^t (1 - \lambda_s^i) ds) | \mathcal{G}_t)}, \quad a. s. \quad (4)$$

Azizpour et al.(2018)に従い、(4)式を下記の(5)式にて計算する。

$$\mathbb{E}^*(u(\lambda_t) / Z_t | \mathcal{G}_t) = \exp(t) \mathbb{E}^*(u(\lambda_t) \phi(T_{N_t}, t) \prod_{n=1}^{N_t} \lambda_{T_n}^- \phi(T_{n-1}, T_n) | \mathcal{G}_t) \quad (5)$$

ただし、

$$\Pi_t = u(\lambda_t) \exp\left(\int_0^t \log(\lambda_{s-}) dN_s\right)$$

$$\phi(m, n) = \Phi(m, n) \exp\left(-\int_m^n [e^{a(1, X_s)} + \delta \sum_{T_n \leq s} \exp(-\kappa(s - T_n)) U_n] ds\right)$$

¹⁵ λ_t の事後平均(posterior mean)であり、観測フィルトレーションへの射影(optional projection)となる。

$$\Phi(m, n) = \frac{I_q(\sqrt{Y_m Y_n})^{\frac{4l \cdot e^{-0.5l(n-m)}}{1-e^{-l(n-m)}}}}{I_q(\sqrt{Y_m Y_n})^{\frac{4z \cdot e^{-0.5z(n-m)}}{1-e^{-z(n-m)}}}} \cdot \frac{le^{-0.5(1-z)(1-e^{-z(n-m)})}}{z(1-e^{-z(n-m)})} \cdot e^{(Y_m + Y_n) \left[\frac{z(1+e^{-z(n-m)})}{1-e^{-z(n-m)}} - \frac{l(1+e^{-l(n-m)})}{1-e^{-l(n-m)}} \right]}$$

$$l = \sqrt{z^2 + 2b} \quad I_q: \text{修正ベッセル関数}$$

尤度関数 $\mathcal{L}_\tau(\theta)$ のパラメーターを推定後、時間変更を行なったフィルター付きの強度 h_t に対して適合度検定(ポアソン分布テスト)を行い、強度 h_t が標準ポアソン過程に従うか否かを確認する。¹⁶

次に、「格上げ」「格下げ」の各モデルのパラメーターについて、①全てのファクター(マクロ要因, frailty, 過去の信用イベントの影響), ②マクロ要因のみ, ③マクロ要因と過去の信用イベントの影響, および④マクロ要因と frailty で構成される 4 パターンのモデルを設定し、各々について標準誤差の推定および時間変更に対する適合度検定を行い、95%水準で統計的有意性を検定する。

なお、上記①～④のモデルの具体的な形は以下の通りである。

- ① $\lambda_t^i = \exp(a_0 + \sum_{k=1}^d a_k X_{k,t}) + Y_t + \delta R_t$
- ② $\lambda_t^i = \exp(a_0 + \sum_{k=1}^d a_k X_{k,t})$
- ③ $\lambda_t^i = \exp(a_0 + \sum_{k=1}^d a_k X_{k,t}) + \delta R_t$
- ④ $\lambda_t^i = \exp(a_0 + \sum_{k=1}^d a_k X_{k,t}) + Y_t$

また尤度比検定により、frailty や過去の信用イベントの影響を考慮する場合と考慮しない場合におけるモデルの説明力を検証する。アウトオブサンプル期間(2013 年 1 月 1 日～2023 年 6 月 30 日)についても同様に検証を行なう。

なお、モデルのパラメーター推定に用いたデータは Bloomberg より取得した。また発行体格付変更データは、R&I が公表する日本国内企業の発行体格付の変更履歴データとした¹⁷

4. 推定結果

本章では、前章で示した方法に基づいて行なったモデルのパラメーター推定結果等を示す。

まず、信用イベント別のモデルのパラメーター推定結果は 次頁の表 1 の通りとなった。

¹⁶ C_t を $A_t = \int_0^t h_s d_s$ の右連続の逆関数とすると、計数過程 N_{C_t} は確率測度 $\mathbb{P}$ およびフィルトレーション $(\mathcal{G}_{C_t})$ について標準ポアソン過程となる(cf. Azizpour et al. (2018) Appendix B).

¹⁷ R&I 以外の格付機関[Moody's, Standard & Poor's, 日本格付研究所(JCR)等]も日本企業の発行体格付を公表しているが、R&I による日本企業の発行体格付数が最も多いため、本研究のデータとして採用した。

(表 1) 信用イベント別モデルのパラメーター推定結果

信用イベント	推定対象	a_0 (定数)	a_1 (GDP成長率)	a_2 (AAA格)	a_3 (TOPIXリターン)	a_4 (JGB10Y - JGB1Y)	a_5 (AAA格 - BBB格)	a_6 (JGB 3M)
格上げ	パラメータ	-1.421	0.063	-0.051	0.031	-0.023	0.043	-0.015
	標準誤差	(0.503)	(0.022)	(0.024)	(0.004)	(0.009)	(0.021)	(0.008)
格下げ	パラメータ	-1.698	-0.219	0.011	-0.021	0.014	-0.027	0.031
	標準誤差	(0.602)	(0.036)	(0.005)	(0.007)	(0.005)	(0.009)	(0.009)

信用イベント	推定対象	a_7 (TOPIXボラティリティー)	z	c	σ	δ	κ
格上げ	パラメータ	0.055	2.925	0.002	0.175	-0.013	0.034
	標準誤差	(0.032)	(1.369)	(0.001)	(0.087)	(0.008)	(0.020)
格下げ	パラメータ	-0.047	4.006	0.005	0.215	0.014	0.060
	標準誤差	(0.016)	(1.823)	(0.002)	(0.092)	(0.007)	(0.030)

※マクロ要因は、ステップワイズ変数減少法により、AIC が最小となる組合せとした。

表 1 より、「格上げ」「格下げ」の各場合について、「マクロ要因」「frailty」および「過去の信用イベントの影響」に関するパラメーターは、95%の有意水準で概ね統計的に有意であるとの結果を得た。また観測可能ファクターのうち実質 GDP 成長率は、「格上げ」「格下げ」の全ての信用イベントについて、95%の有意水準で統計的に有意であった点に加え、他のマクロ要因ファクターと比較し、モデルに対する寄与度も大きいと推定された。

表 2 は、信用イベントが「格下げ」である場合について、①全てのファクター、②マクロ要因のみ、③マクロ要因+過去の信用イベントの影響のみ、④マクロ要因+frailty のみ、の各々で構成されるモデルについて、パラメーターの推定値および適合度検定(ポアソン分布テスト)の結果を示している。これによると、「マクロ要因」「frailty」「過去の信用イベントの影響」の全てのファクターを含むモデルは、適合度検定に基づき統計的有意性が最も高いとの結果が得られた。また実質 GDP 成長率は、①全てのファクター、②マクロ要因のみ、および③マクロ要因+過去の信用イベントの影響のみ、で構成される各モデルにおいて説明力の高いファクターである点、また「過去の信用イベントの影響+frailty」は、寄与度が高いファクターの組み合わせである点が示された。

(表 2) モデル別のパラメーター推定値(信用イベント:格下げ)

	①: マクロ要因 + 過去の信用イベントの影響 + frailty	②: マクロ要因	③: マクロ要因 + 過去の信用イベントの影響	④: マクロ要因 + frailty
a_0 : 定数	-1.698 (0.602)	-1.013 (0.147)	-1.223 (0.489)	-1.200 (0.361)
a_1 : GDP成長率	-0.219 (0.036)	-0.157 (0.043)	-0.108 (0.029)	-0.093 (0.028)
a_2 : AAA格イールド	0.011 (0.005)	0.007 (0.002)	0.009 (0.005)	0.008 (0.003)
a_3 : TOPIXリターン	-0.021 (0.007)	-0.018 (0.010)	-0.017 (0.008)	-0.016 (0.007)
a_4 : JGB10Y - JGB1Yスプレッド	0.014 (0.005)	0.015 (0.007)	0.013 (0.006)	0.012 (0.005)
a_5 : AAA格 - BBB格スプレッド	-0.027 (0.009)	-0.020 (0.008)	-0.021 (0.007)	-0.019 (0.006)
a_6 : JGB 3Mイールド	-0.031 (0.009)	-0.029 (0.014)	-0.027 (0.013)	-0.025 (0.011)
a_7 : TOPIXボラティリティー	-0.047 (0.016)	-0.035 (0.012)	-0.032(0.015)	-0.029 (0.015)
z	4.006 (1.823)	—	—	3.421 (1.512)
c	0.005 (0.002)	—	—	0.003 (0.001)
σ	0.215 (0.092)	—	—	0.103 (0.081)
δ	0.014 (0.007)	—	0.012 (0.006)	—
κ	0.060 (0.030)	—	0.047 (0.023)	—
AIC	-52.04	-38.65	-42.22	-40.78
適合度検定	0.000	0.007	0.002	0.005
対数尤度	43.02	30.14	36.75	34.23

表 3 は、表 2 と同様に信用イベントが「格下げ」である場合について、マクロ要因を含むベンチマークモデルに対して、①マクロ要因+過去の信用イベントの影響のみ、②マクロ要因+frailty のみ、および③全てのファクターで構成されるモデルを、 各々代替モデルとして尤度比検定を行なった結果を示す。

(表 3) 各モデル間の尤度比検定(信用イベント:格下げ)

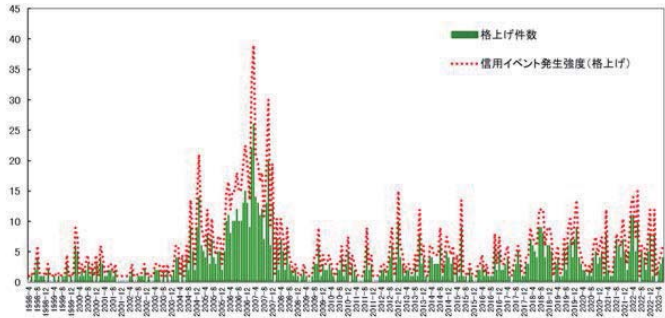
ベンチマークモデル	マクロ要因	マクロ要因	マクロ要因	マクロ要因 + frailty
代替モデル	マクロ要因 + 過去の信用イベントの影響	マクロ要因 + frailty	全ファクター	全ファクター
検定統計量	13.22	8.18	25.76	17.58
自由度	2	3	5	2
p 値	0.002	0.004	0.000	0.056

表 3 より、frailty を含むモデルを代替モデルとして尤度比検定を行なった場合には、いずれも統計的に有意であることが示された。

以上により、R&I による日本企業の格付変更履歴データを用いたモデルのパラメーター推定値、適合度検定および尤度比検定の各結果を踏まえると、日本のクレジット市場において frailty の存在が示唆されると考えられる。¹⁸ また、frailty を含む全てのファクターにより構成されたモデルは、日本のクレジット市場の変動をより良く説明できる可能性があると考えられる。特に「過去の信用イベントの影響」と「frailty」は、信用イベントの発生のしやすさを説明するファクターとして統計的有意性を有する点は、Azizpour et al.(2018)で示された結果と整合的であると考えられる。

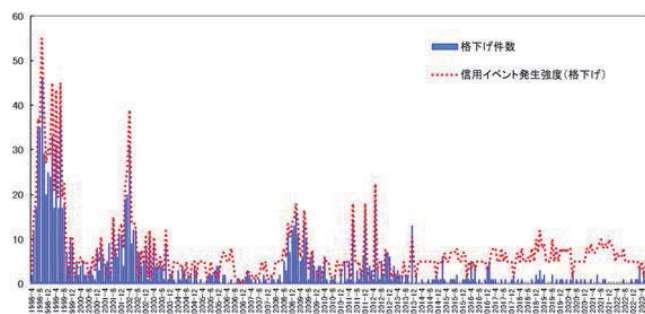
上記の結果を踏まえた、「格上げ件数と格上げ発生強度」および「格下げ件数と格下げ発生強度」の各推移を図 3 および図 4 に示した。提案する信用イベント発生強度モデルは、インサンプル期間において「格上げ件数」「格下げ件数」の推移を概ね捉えていると考えられる。なおアウトオブサンプル期間について、格下げ発生強度の推移が格下げ件数のそれとは異なる時期が見られる(2014 年以降)。

(図 3) 格上げ件数と格上げ発生強度の推移 (1998 年 4 月～2023 年 6 月)



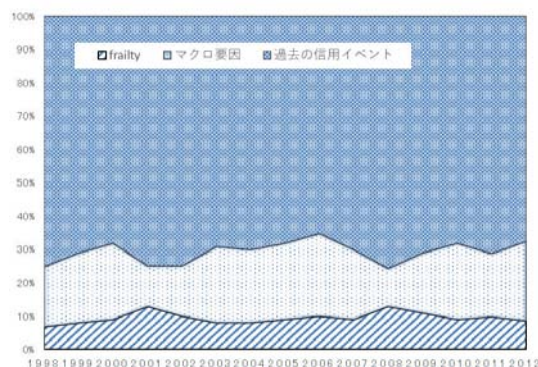
¹⁸ 「格上げ」および「デフォルト」の場合もほぼ同様の結果が得られた。

(図 4) 格下げ件数と格下げ発生強度の推移 (1998 年 4 月～2023 年 6 月)



また図 5 は、格下げ発生強度モデルのパラメーター推定値に基づき、当該モデルの期待値(事後平均)を算出したうえで、「マクロ要因」「frailty」「過去の信用イベントの影響」の各々について、1998 年から 2012 年までの間における各ファクターの構成比の月次推移を示す。図 5 を見る限り、景気後退期において「過去の信用イベントの影響」および「frailty」の構成比が高くなるため、これらが日本のクレジット市場におけるクレジットサイクルの変動に何らかの影響を及ぼしている可能性があると思定される。ただしその影響度の推定にあたっては、更に精緻な検証を要する。

(図 5) 格下げ発生強度の構成比推移 (1998 年～2012 年)



※「過去の信用イベントの影響」の構成比は、他のファクターに比較して相対的に高い水準で推移している。特に景気後退期(例: 2001 年, 2008 年)には顕著な傾向を示している。

5. クレジットサイクルの変動要因

本章では、クレジットサイクルの変動要因の検証を試みる。まず、主な先行研究について紹介する。

Amato and Furfine(2004)は、景気循環(ビジネスサイクル)と格付の変更との関連性の有無を検証した。次に Koopman et al. (2009)は、common latent factor(frailty)と GDP 成長率との間の相互依存性を検証した。また Koopman et al.(2011)は、景気拡大期および景気後退期における frailty の変動要因のモデル化を行なった。

クレジットサイクルの変動に大きく影響を与えるファクターは GDP 成長率であると結論付けている先行研究が多いと考えられる。

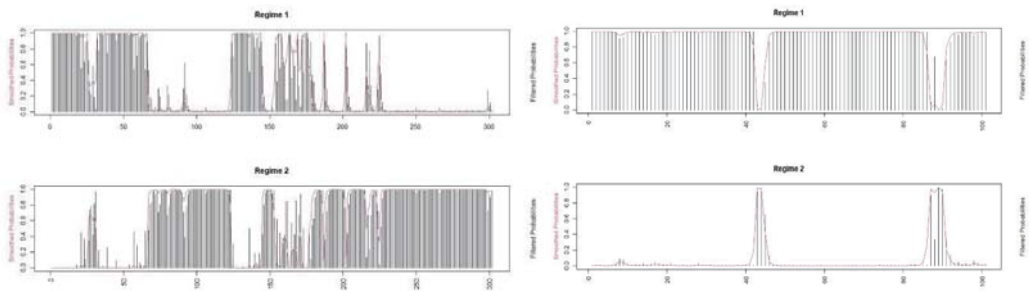
本章では、日本のクレジット市場におけるクレジットサイクルを表す「総与信・GDP 比率」に影響を及ぼす可能性があると考えられる「過去の信用イベントの影響+frailty」と総与信・GDP 比率との関連性について、1)レジーム・スイッチモデルによる「過去の信用イベントの影響+frailty」と総与信・GDP 比率のレジーム推移の比較、2)総与信・GDP 比率を構成する要素(GDP、総与信)を線形ガウス状態空間モデルで表現した場合における各成分[水準(level)・傾き(slope)]と「過去の信用イベントの影響+frailty」との間における「グレঞ্জヤーの意味での因果性」の存在の有無、および 3)インパルス応答関数による、クレジットサイクルの構成要素にショックを与えた場合における「過去の信用イベントの影響+frailty」の変化の推移、の 3 点から検証を行なう。

まず Hamilton(1994)に基づき、2 状態のレジーム(レジーム 1: 景気拡大期, レジーム 2: 景気後退期)を仮定する。以下の式に基づき尤度関数を最大化することにより、パラメーターの推定を行なう。

$$Y_t^i = \phi_{11} + \phi_{21}Y_{t-1}^i + \phi_1\varepsilon_t, \quad S_t = 1 \quad (\text{レジーム 1})$$
$$Y_t^i = \phi_{12} + \phi_{22}Y_{t-1}^i + \phi_2\varepsilon_t, \quad S_t = 2 \quad (\text{レジーム 2})$$

図 6 は、「過去の信用イベントの影響+frailty」(「格下げ」の場合)と、日本におけるクレジットサイクルである「総与信・GDP 比率」の各レジームの推移を示す(対象期間:1998 年 4 月 1 日 - 2012 年 12 月 31 日)。また表 4 は、各レジーム・スイッチモデルのパラメーター推定値を示す。

(図 6) レジームの推移「過去の信用イベントの影響+frailty」(格下げ) (左), 総与信・GDP 比率 (右)



レジーム 1: 景気拡大期(上) レジーム 2: 景気後退期(下) レジーム 1: 景気拡大期(上) レジーム 2: 景気後退期(下)

(表 4) パラメーター推定値等「過去の信用イベントの影響+frailty」(格下げ) (上), 総与信・GDP 比率 (下, 次頁)
(対象期間:1998 年 4 月 1 日～2012 年 12 月 31 日)

パラメーター	レジーム	推定値	標準誤差	t 値	p 値
ϕ_{11}	景気拡大(レジーム1)	3.648	0.955	3.821	0.000
ϕ_{12}	景気拡大(レジーム1)	0.647	0.071	9.080	0.000
ϕ_{21}	景気後退(レジーム2)	0.901	0.124	7.279	0.000
ϕ_{22}	景気後退(レジーム2)	0.076	0.063	1.204	0.229

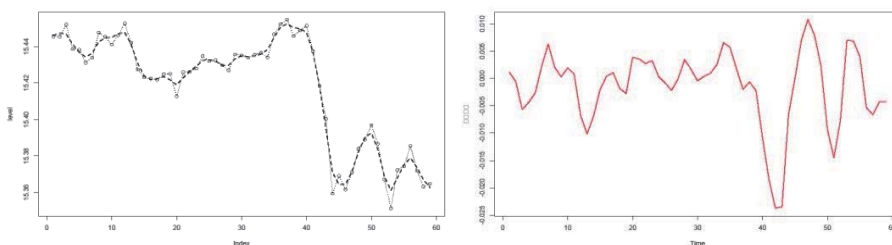
パラメーター	レジーム	推定値	標準誤差	t値	p値
φ_{11}	景気拡大(レジーム1)	0.039	0.014	2.745	0.006
φ_{12}	景気拡大(レジーム1)	0.967	0.011	92.076	0.000
φ_{21}	景気後退(レジーム2)	0.447	0.336	1.330	0.184
φ_{22}	景気後退(レジーム2)	0.692	0.250	2.770	0.006

上記より、「過去の信用イベントの影響+frailty」のレジーム推移と総与信・GDP 比率のレジーム推移とは異なる傾向であることが示された。また「過去の信用イベントの影響+frailty」および総与信・GDP 比率におけるレジーム 2(景気後退期)のパラメーターについて 95%有意水準で統計的に有意ではないとの結果が示された(表 4)。これは、各々に景気後退期の特徴を示していない期間が存在することを意味しており、その背景や要因については更に検証を要する。

次に、総与信・GDP 比率の構成要素である「GDP」「総与信額」(いずれも対数値)「総与信・GDP 比率」が、「過去の信用イベントの影響+frailty」の挙動に及ぼす影響について検証する(対象期間:1998 年 4 月 1 日～2012 年 12 月 31 日)。具体的には、まず 1)「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」の各々について、2 次のトレンドを有する線形ガウス状態空間モデル(linear Gaussian state space model)の、平滑化状態における「水準(level)」および「傾き(slope)」の 2 成分に分解(図 7)し¹⁹、2) 各成分が「過去の信用イベントの影響+frailty」の挙動に及ぼす影響をインパルス応答関数により定量的に把握するとともに、3)各成分・「過去の信用イベントの影響+frailty」間におけるグレンジャーの意味での因果性(Granger causality)の存在の有無の検定を行なう。

(図 7)「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」の平滑化状態における各成分の推移

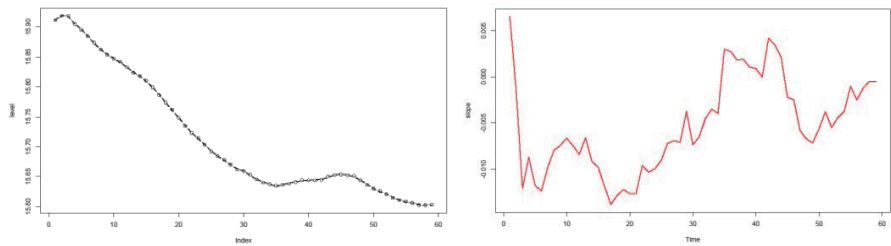
(a) GDP(対数値)



※左図の○線は原系列、破線は平滑化状態における水準成分、右図の実線(赤)は平滑化状態における傾き成分の推移を示す。

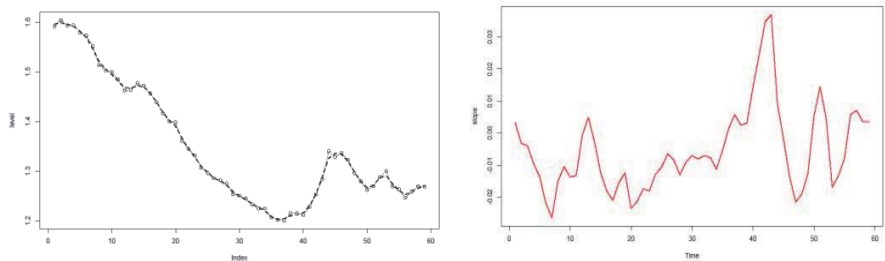
¹⁹ 「過去の信用イベントの影響+frailty」への中長期的な影響を検証するため、短期的な変動の要因である季節(seasonal)成分への分解は行わなかった。

(b) 総与信額(対数値)



※左図の○線は原系列、破線は平滑化状態における水準成分、右図の実線(赤)は平滑化状態における傾き成分の推移を示す。

(c) 総与信・GDP 比率



※左図の○線は原系列、破線は平滑化状態における水準成分、右図の実線(赤)は平滑化状態における傾き成分の推移を示す。

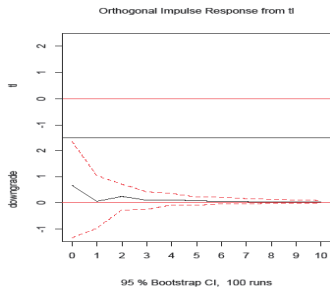
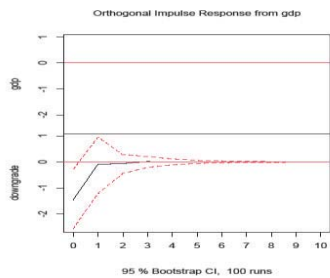
図 7 より、「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」は、景気後退期において「傾き成分」の変動が大きい点で共通している。

次に、「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」の各々について、「原系列」「水準成分」「傾き成分」の各々に対してショックを与えた場合における「過去の信用イベントの影響+frailty」に及ぼす影響をインパルス応答関数により検証した(図 8 および図 9).²⁰

(図 8) GDP および総与信額が「過去の信用イベントの影響+frailty」に及ぼす影響

(a) GDP →「過去の信用イベントの影響+frailty」

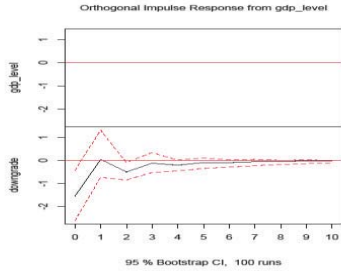
(b) 総与信額 →「過去の信用イベントの影響+frailty」



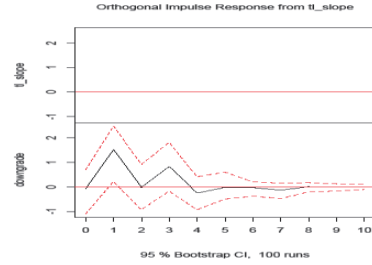
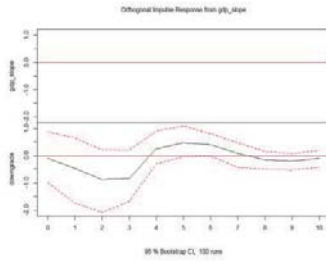
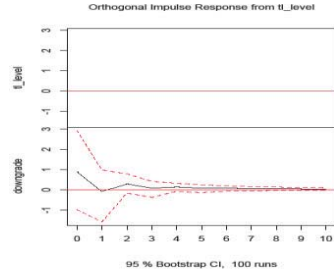
²⁰ 原系列および各成分が定常過程に従う点や共和分を考慮し、グレンジャー因果性・インパルス応答関数の推定を行なった。

(図 8 続き) GDP および総与信額が「過去の信用イベントの影響+frailty」に及ぼす影響
(上段: 水準成分, 下段: 傾き成分)

(a) GDP → 「過去の信用イベントの影響+frailty」

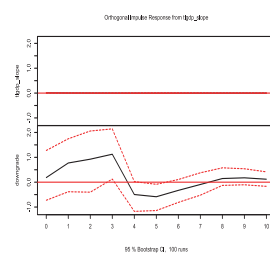
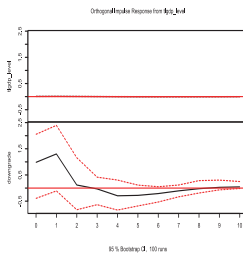
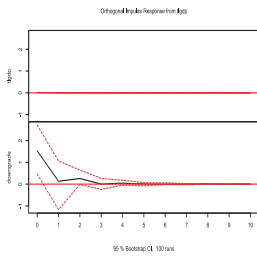


(b) 総与信額 → 「過去の信用イベントの影響+frailty」



※10 期先までの予測。なお破線は、95%の信頼水準を示す。

(図 9) 総与信・GDP 比率が「過去の信用イベントの影響+frailty」に及ぼす影響
(左図: 原系列, 中図: 水準成分, 右図: 傾き成分)



※10 期先までの予測。なお破線は、95%の信頼水準を示す。

図 8 および図 9 より, 「GDP の水準成分」「総与信額の傾き成分」「総与信・GDP 比率の水準成分・傾き成分」が「過去の信用イベントの影響+frailty」に及ぼす影響は長期に及ぶと想定される。

また、「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」の原系列および各成分(「水準成分」および「傾き成分」)から「過去の信用イベントの影響+frailty」に対する、あるいは「過去の信用イベントの影響+frailty」はから「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」の各原系列および各成分(水準成分および傾き成分)に対する、グレンジャーの意味での因果性の存在の有無について検定を行なった。表 5 はその結果である。

(表 5) グレンジャーの因果性

from to			ρ 値	from to			ρ 値
GDP	⇒	frailty	0.264	frailty	⇒	GDP	0.664
GDP_lebel	⇒	frailty	0.024	frailty	⇒	GDP_lebel	0.666
GDP_slope	⇒	frailty	0.134	frailty	⇒	GDP_slope	0.651
TL	⇒	frailty	0.345	frailty	⇒	TL	0.228
TL_lebel	⇒	frailty	0.349	frailty	⇒	TL_lebel	0.217
TL_slope	⇒	frailty	0.006	frailty	⇒	TL_slope	0.130
TLGDP	⇒	frailty	0.176	frailty	⇒	TL GDP	0.599
TLGDP_lebel	⇒	frailty	0.009	frailty	⇒	TLGDP_lebel	0.990
TLGDP_slope	⇒	frailty	0.001	frailty	⇒	TLGDP_slope	0.423

表 5 より、GDP の「水準成分」から「過去の信用イベントの影響+frailty」に対して、95%有意水準にてグレンジャーの意味での因果性があると考えられ、また、「総与信額の傾き成分」「総与信・GDP 比率の水準成分・傾き成分」から frailty に対して、99%有意水準にてグレンジャーの意味での因果性があると考えられる。なお「過去の信用イベントの影響+frailty」から「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」の各原系列および各成分に対しては、グレンジャーの意味での因果性は確認できなかった。

6. 結論および今後の課題

本研究では、信用イベント(格上げ・格下げ)の発生強度を表すモデルを提案する。モデルのファクターを「マクロ要因」「frailty」「過去の信用イベントの影響」の 3 つとした。信用イベントのうち、「格上げ」「格下げ」の発生強度を表すモデルのパラメーターの推定値は、インサンプル期間において 95%有意水準で統計的に有意であるとの結果が示された。一方、アウトオブサンプル期間においては、「格上げ」の発生強度を表すモデルのパラメーターのみ 95%有意水準で統計的に有意となった。また、「マクロ要因」「frailty」「過去の信用イベントの影響」の各ファクターを全て含むモデルの場合には、日本のクレジット市場の信用リスクの変動をより良く説明できる可能性があると考えられる。次に、レジーム・スイッチモデルにより、「過去の信用イベントの影響+frailty」と総与信・GDP 比率の関連性の検証を試みた結果、「過去の信用イベントの影響+frailty」と総与信・GDP 比率のレジームの推移は異なる傾向を示した。更に、「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」を状態空間モデルで表した場合における成分の一部について、frailty とグレンジャーの意味での因果性があると考えられる。

今後の課題として、(1)景気拡大期・景気後退期の転換点におけるモデルの有効性の検証、(2)発行体

格付けの格上げ件数や格下げ件数の推移との関連性があると考えられる **Composite Index** の変動に伴う、観測可能なファクターや **frailty** の中長期的な振る舞いに関する検証、および(3)非ガウス状態空間モデルによる、信用イベントの発生しやすいさの将来予測、の3点を挙げる。

(1)については、まず景気拡大・景気後退の転換点を推定する必要がある。そのため、Bai(1997)によるブレイクポイント付き回帰に基づく企業倒産件数のレジーム分割と同様の方法により **Composite Index** のレジーム分割を行い、構造転換点を推定した(図 10)²¹

(図 10) 企業倒産件数のレジーム分割(左)と **Composite Index** のレジーム分割(右)

(2000 年 4 月 1 日-2012 年 12 月 31 日)

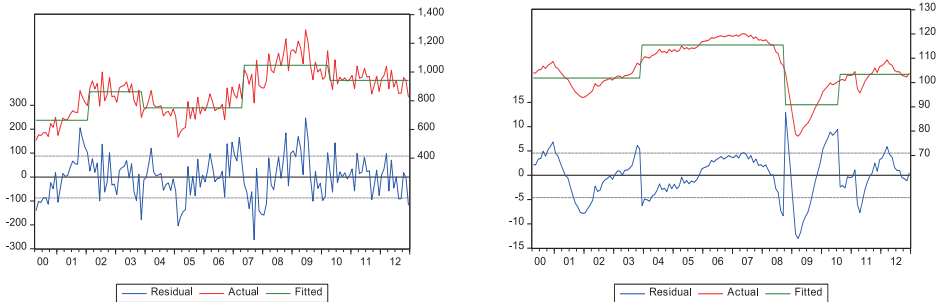


図 10 より、企業倒産件数が増加(減少)傾向を示す局面では、**Composite Index** が下落(上昇)する傾向にあると推定される。そのため、企業倒産件数を「過去の信用イベントの影響」の代理変数とする場合には、**Composite Index** の構造変換点との関連性を踏まえた景気拡大期・景気後退期の転換点を推定することが可能となると考えられる。(2)および(3)についても、今後継続的に検証していくこととする。

以 上

²¹ 格下げ件数および GDP についても同様にブレイクポイント付き回帰によるレジーム分割を試みたが、構造転換点を有意に推定することができなかった。

【参考文献】

- [1] 近江崇宏・野村俊一「点過程の時系列解析」, 統計学 One Point 14, 共立出版, 2019 年
- [2] 野村俊一「カルマンフィルタ」, 統計学 One Point 2, 共立出版, 2016 年
- [3] Amato and Furfine (2004), “Are credit ratings procyclical?”, *Journal of Banking & Finance*, 28, 2641-2677
- [4] Amihud (2002), “Illiquidity and stock returns: cross-section and time-series effects”, *Journal of Financial Markets* 5, 31-56
- [5] Azizpour, Giesecke and Schwenkler (2018), “Exploring the Sources of Default Clustering”, *Journal of Financial Economics* 129, 154-183
- [6] Bai (1997), “Estimating multiple breaks one at a time”, *Economic Theory*, 13, 315-352
- [7] Delloye, Fermanian and Sbair (2006), “Dynamic frailties and credit portfolio modelling”, *Risk*, October 2006, 100-105
- [8] Duffie, Eckner, Horel and Saita (2009), “Frailty Correlated Default”, *Journal of Finance*, vol.64, 2089-2123
- [9] Giesecke and Schwenkler (2018), “Filtered likelihood for point processes”, *Journal of Econometrics* 204, 33-53
- [10] Hamilton (1994), “Time Series Analysis”, *Princeton University Press*
- [11] Koopman, Kraussl, Lucas and Monteiro (2009), “Credit cycles and macro fundamentals”, *Journal of Empirical Finance*, vol.16, 42-54
- [12] Koopman, Lucas and Schwaab (2011), “Modeling frailty-correlated defaults using many macroeconomic covariates”, *Journal of Econometrics*, 162, 312-325
- [13] Yamanaka, Sugihara and Nakagawa (2012), “Modeling of Contagious Credit Events and Risk Analysis of Credit Portfolios”, *Asia Pacific Financial Markets*, vol.19, 43-62

(参考) 主な先行研究における frailty の種類およびマクロ経済変数のパラメーター

先行研究	frailtyの種類	発行体格付データ	マクロ経済変数(パラメーター)の種類	分析の対象
Dell'aye et al. (2006)	Gamma 分布に従う確率変数	Standard and Poor's	米国鉱工業生産成長率 , S&P500 収益率, 米国債イールドスプレッド (3ヶ月・10 年), FFレート (3ヶ月)	米国企業(金融機関を除く)の格付推移およびデフォルト率
Koopman et al. (2009)	AR(1)過程	Standard and Poor's	GDP 成長率, 米国債イールドスプレッド (1年・10 年), 事業性ローン残高増加率 , M2 成長率, インフレ率 , FFレート , 米国債と社債 (BB格)スプレッド , S&P500 収益率, S&P500 ボラティリティ	米国企業(金融機関を除く)の格付推移
Duffie et al. (2009)	Ornstein-Uhlenbeck (OU)過程	Moody's	米国短期国債 (3ヶ月物)レート , S&P500 収益率	米国企業(金融機関を除く)のデフォルトの集積
Azizpour et al. (2012)	Cox-Ingersoll-Ross(CIR) 過程	Moody's	GDP 成長率, 鉱工業生産成長率 , S&P500 収益率, S&P500 ボラティリティ , 米国短期国債 (3ヶ月物)レート , 米国債イールドスプレッド (1年・10 年), 米国債 (10年物)利回り , 社債イールドスプレッド (1年・10 年), 社債 (AAA格)利回り	米国企業(金融機関を除く)のデフォルトの集積

※本研究で用いたマクロ経済変数の候補については、上記の先行研究を参考とした。

University of Tsukuba
Tokyo 112-0012
JAPAN

Mitsui & Co. Digital Asset Management, Ltd.
Tokyo 103-0012
JAPAN

E-mail address: jhironaka0817@gmail.com

筑波大学／三井物産デジタル・アセットマネジメント株式会社 廣中 純

【謝辞】

本研究は、京都大学数理解析研究所を認定拠点とする共同利用・共同研究による成果です。
ここに記して深く御礼申し上げます。