

2. 磁氣軸受及びその數學的解析

小 龜 淳， 片 瀬 彬

The Magnetic Suspension and its Mathematical Analysis

Jun Kokame and Akira Katase

(K. Kimura Laboratory)

The mathematical analysis of the magnetic suspension mechanism which suspends the ferromagnetic substances freely in a magnetic field was investigated, and the vertical stability of the suspended material was discussed. The self-damping function of the mechanism against the vertical oscillation of the suspended material (a rotor) caused by any kinds of disturbances was observed experimentally and ensured theoretically. Some numerical relations between the circuit constants, e.g. the inductance of the field coil, the amplification factor of the circuit, the mass of the rotor, and other factors must be satisfied in order to realize the stable self-damping suspension. These conditions were deduced theoretically and certified by the experiments. In the case of the 30gr rotor suspended in the magnetic field of a coil (current 70mA), the vertical oscillation of about 10 cycles was damped perfectly within 1 sec. The theoretical considerations concluded that the vertical displacement of the suspended rotor is only 0.02cm when the coil current changes 1% of its amounts. The possibility of using the mechanism for magnetic ballance and the detector of changes in the gravitation constant was also discussed.

1. 緒 言

1937年 Virginia 大學の F. T. Holmes が、自動的に強さを變え得る磁場内で、強磁性を有する物体を無觸接の状態で支持し得る可能性を指適し、その爲に必要な二、三の機構を發表すると同時に、この試みの成功を示した。¹⁾ Holmes は、磁氣的支持の可能性を論ずるに當つて、幾分誤りを侵しているようであるが、²⁾ 免も角もこの方面の初歩を開拓し、その後同大學の J. W. Beams の許で種々改良が加えられ、磁氣的支持によつて支えられた回轉体による超高速度回轉の研究が進められている。³⁾⁻⁵⁾ 吾々の許では數年來この方面の研究を行つてをり、その中間結

果は既報の通りである。^{10a-10e)} この様な磁氣懸吊 (magnetic suspension) によつて支えられた回轉体は、他との觸接が皆無であり、その回轉軸を通常の軸受の様に mechanical な制約によつて嚴密に定められてないから、高速度の回轉体としては、かえつて他の如何なるものよりも安定且つ滑らかに回轉する。この意味から本機構を“磁氣軸受”と呼ぶのが妥當であると考え、

扱、磁氣軸受によつて支持された回轉体が、果して空間の一點に安定に靜止するものであるかどうか、或はある平衡點のまわりに微小な上下振動を續けつつ支持されるのではないか、更に外部からの disturbance に對しての安定度如何等については、實驗的には満足すべき結果が確かに與えられるが、末だその定量的な解析は一度も行はれていない。回轉体の安定度を數學的に取扱ふことは、この機構の他方面への應用——例えば感度の良い磁氣天秤として、或は回轉体を安定な分析用ローターとして使用すること等——の可能性を論ずる場合必要であり、一方それ等の設計の目安にも有用であると考えられるので、磁氣軸受の機構を以下に述べる様に解析し、實驗結果と比較検討して二三の結論を得た。

2. 磁氣軸受の機能と構造

磁氣軸受の機能を、“容量變化利用”の回路に基いて簡単に説明する (Fig. 1 参照. “Q” 變化利用の回路等にあつても、全く同様な論議が進められる.) ^{4) 10d) 11)} Field Coil と共軸に置かれた鐵軸を有する回轉体 R は、金屬管 T と金屬板 P の間に air condenser を形成し、發振器から導かれ T - R - P 間を流れる

高周波電流の強さは、 R の上下につれて増減する。この變化を増巾檢波し、出力管の陽極電流を R の上下に即應して制禦するのであるが、出力管の負荷になつてゐる field coil を流れる電流は、 R が平衡位置を離れて上昇す

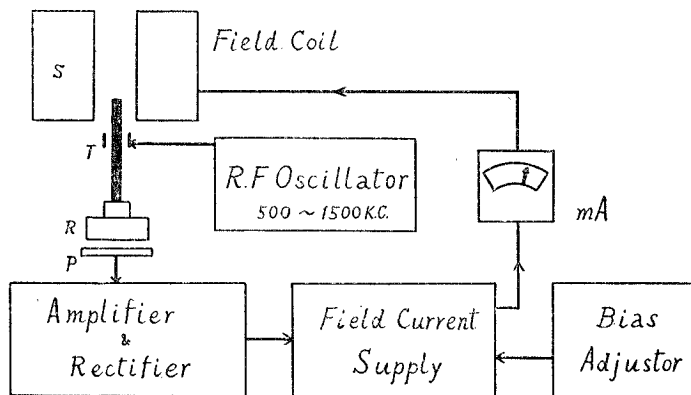


Fig. 1. Block diagram of the apparatus.

れば減少し、降下すれば増加して、回轉体が空間の平衡位置から動くことを妨げる方向に作用する様になつてゐる。また、bias adjustor によつて出力管の grid bias を加減し、平衡點の高さを上下約 1cm に亘つて任意の位置に選定する事が出来る。本装置では、回轉体の左右動に對しては自動調節の工夫がほどこされてないが、回轉体軸は自ら coil の軸上を外れることは無く、外から機械的な振動を與へても、振動運動は二、三秒内で止む。殊に、回轉中、この

方向の自由度は殆ど問題にならない。吾々の解析は、回路自体の機能に由来する回轉体の上下方向の運動について行つたものである。

3. 等價回路及び回轉体の運動方程式

解析の對稱とした磁氣軸受回路は Fig. 2 に示す通りで、主要部分は power tube 及びその負荷回路である。増巾檢波部は、linear に動作し、又 input signal に對し、特にその位相を進めるべき細工は附されてない。

無論低周波部分の増巾は直流増巾である。Fig. 3 は、

inductance- L 、内部抵抗 r の coil- S を負荷とする出力管についての等價回路である (μ, ρ は夫々真空管の増巾率及び内部抵抗)。ここで μe_0 は、回轉体が平衡位置にある時、0 の値をとり、その點からの上下變位に應じて変動する起電力となる。回

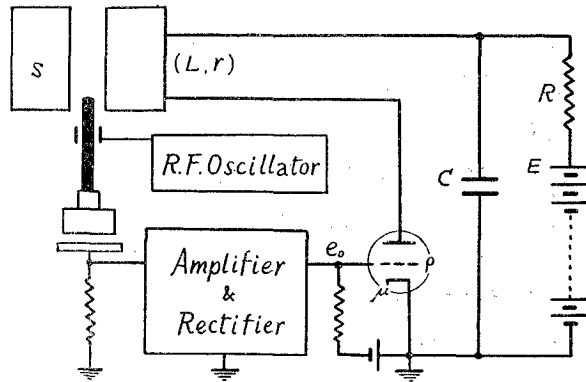


Fig. 2. Circuit diagram of the magnetic suspension apparatus.

轉体 R の位置 x に應じ、 μe_0 が如何に變化するかを調べる爲に x を變動し、夫々に對應する出力 i_1 の陽極電流を測定した結果を Fig. 4 に示す。三本の曲線は、bias adjustor の三つの位置に對應するもので(1)及び(3)は夫々釣合の上限位置及び下限位置に回轉体を懸吊さす時の bias 電壓を固定して、 x の變化に應ずる i の變化を各々もとめたものである。同様に曲線(2)は、その間の

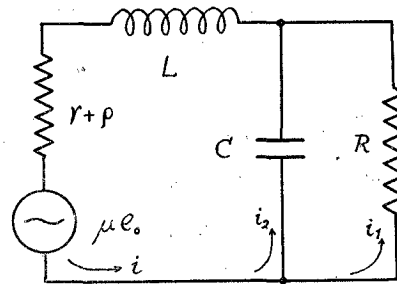


Fig. 3. The equivalent circuit.

安定位置に回轉体を支持した場合に對應するもので、その際回轉体の位置 x と coil を流れる電流 i は、點 P によつて代表される。回轉体がこの位置で上下動を行う時、時間の關係を無視すれば(これを決めるのが實は方程式(1)である)、 x と i はこの曲線の示す通りの對應關係を以て變動する。従つて μe_0 は x の一次函數にはならないが、 x の變位を微小な範圍に止めるならば、圖中の θ を用いて、 $\mu e_0 \approx -(r+\rho+R)x \tan \theta \equiv -kx$ と考えてよい。以上の考察から、等價回路について次の關係を得る。

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ \frac{1}{C} \int i_2 dt = R i_1 \\ L \frac{di}{dt} + i(\gamma + \rho) + i_1 R = \mu e_0 = -kx \\ k = (\gamma + \rho + R) \tan \theta \end{cases}$$

i_1, i_2 を消去して

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \left[\frac{1}{RC} + \frac{\gamma + \rho}{L} \right] \frac{di}{dt} + \left[\frac{\gamma + \rho}{RCL} + \frac{1}{CL} \right] i + \frac{k}{LCR} x + \frac{k}{L} \frac{dx}{dt} = 0 \dots\dots(1)$$

一方回轉体に働く力は、重力 Mg 、及び
之と方向反對の、magnet による吸引力
である。二力が釣合つている時回轉体の
位置を $x=0$ 、coil を流れる電流を I と
すれば、 x の變動に應ずる I の増減分が
 i であり、その時回轉体に作用する total
の力 f は x と i の函數になる。 x を pa-
rameter として f v s. i の關係、及び
 i を parameter として f v s. x の關係
を裝置について實測し
てみると夫々 Fig. 5
及び Fig. 6 の如くなる
から、相當良い近似に
於て、 $f = F_i \cdot i + F_x \cdot x$
とおいてよいことがわ
かる。

F_i, F_x は夫々常數で
曲線の傾斜から決定さ
れる。従つて質量 M の
回轉体の運動方程式は、coil に近づく方向を x の正方向に決め、

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = F_i \cdot i + F_x \cdot x \dots\dots(2)$$

(1), (2) 兩式より i を消去すれば、 x について次の式を得、これが回轉体の上下運動の式である。

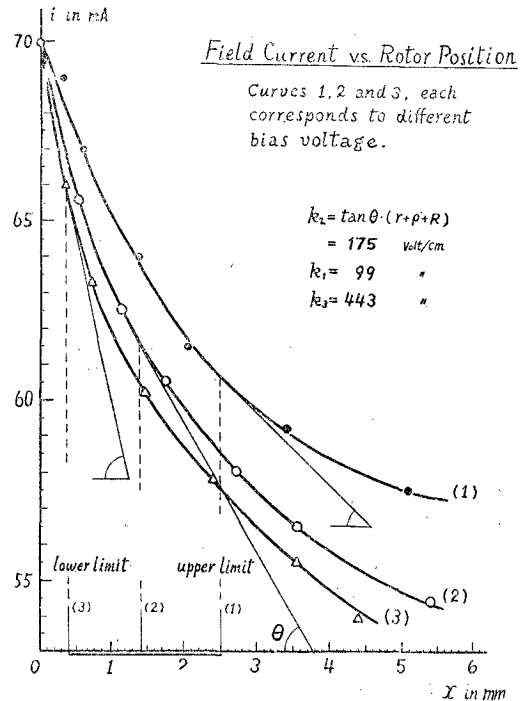


Fig. 4. Relations between the field current and the rotor position.

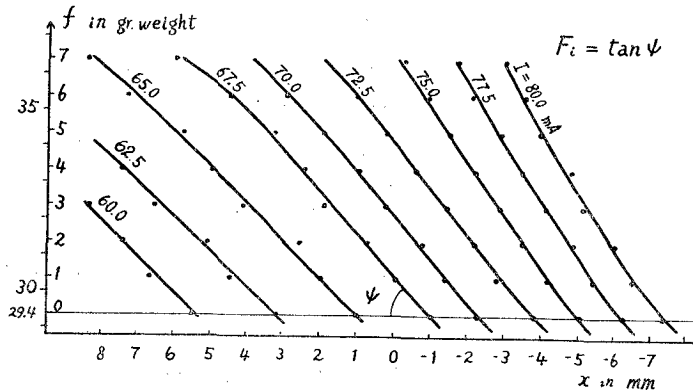


Fig. 5. f v s. x curve.

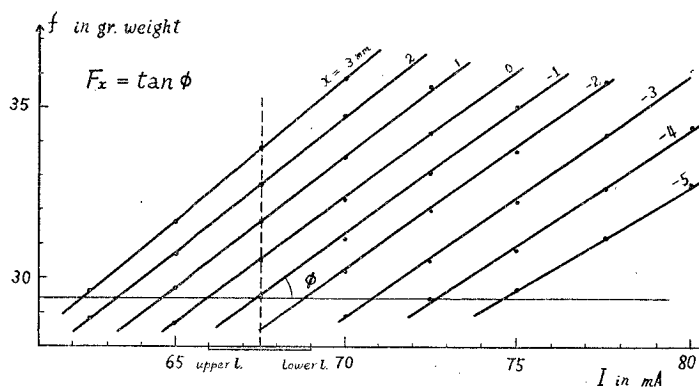


Fig. 6. f v s. I , curve.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 x}{dt^4} + \left[\frac{1}{RC} + \frac{\gamma + \rho}{LC} \right] \frac{d^3 x}{dt^3} + \left[\frac{\gamma + \rho + R}{LCR} - \frac{F_x}{M} \right] \frac{d^2 x}{dt^2} \\ + \left[\frac{F_i k}{ML} - \frac{F_x}{M} \left(\frac{1}{RC} + \frac{\gamma + \rho}{L} \right) \right] \frac{dx}{dt} + \left[\frac{F_i k}{MLCR} - \frac{F_x}{M} \frac{\gamma + \rho + R}{LCR} \right] x = 0 \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

4. 方程式の解

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{RC} + \frac{\gamma + \rho}{L} \\ b &= \frac{\gamma + \rho + R}{LCR} - \frac{F_x}{M} \\ c &= \frac{F_i k}{ML} - \frac{F_x}{M} \left(\frac{1}{RC} + \frac{\gamma + \rho}{L} \right) \\ d &= \frac{F_i k}{MLCR} - \frac{F_x}{M} \frac{\gamma + \rho + R}{LCR} \end{aligned}$$

とすれば (3) は

$$\ddot{\ddot{x}} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx + dx = 0 \quad \dots\dots\dots (3')$$

この一般解は

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^4 C_j e^{m_j t}, \quad C_j : \text{積分常数} \\ \left. \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{1}{2} a - \mu \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} a - \mu \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{2} Z - \nu \right)} \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{1}{2} a + \mu \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} a + \mu \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{2} Z + \nu \right)} \right\} \end{matrix} \right\} \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここで、

$$\mu = \pm \sqrt{Z + \frac{1}{4}a^2 - b}$$

$$\nu = \pm \sqrt{\frac{1}{4}Z^2 - d}$$

$$(\text{複数は } \mu\nu = \frac{1}{2}aZ - c \text{ なる如く選ぶ})$$

$$\text{但し } Z = \xi + \frac{b}{3} \text{ で}$$

ξ は次の三次式の實根である.

$$\xi^3 - \left(\frac{b^2}{3} - ac + 4d\right)\xi + \frac{1}{3}abc - 2\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \frac{8}{3}bd - a^2d - c^2 = 0$$

C_j は初期条件による積分常数であるが、一例として固体に、外部より Δx の變位を與え、その位置より自由運動させた時について求めておく.

初期条件:

$$t=0 \begin{cases} x = \Delta x \\ \dot{x} = -\frac{k\Delta x}{r+\rho+R} * \\ v = \frac{dx}{dt} = 0 \end{cases}$$

* (1)に於いて $x = \Delta x$ にした時の $t \rightarrow \infty$ に於ける定常部分

二根が real, 他の二根が imaginal になる場合には

$$\begin{aligned} C_1 &= \overline{(m_2 - m_1)[R\{m_3\}(m_1 + m_2) - R\{m_3^2\} - m_1 m_2]}^{-1} \\ &\quad \times \Delta x \left\{ m_1 [R\{m_3\}m_1 - R\{m_3^2\}] - [R\{m_3\} - m_1] \left(\frac{F_x}{M} - \frac{F_k k}{M(R + \rho + \gamma)} \right) \right\} \\ C_2 &= \overline{(m_1 - m_2)[R\{m_3\}(m_1 + m_2) - R\{m_3^2\} - m_1 m_2]}^{-1} \\ &\quad \times \Delta x \left\{ m_2 [R\{m_3\}m_2 - R\{m_3^2\}] - [R\{m_3\} - m_2] \left(\frac{F}{M} - \frac{F_k k}{M(R + \rho + \gamma)} \right) \right\} \\ C_3 &= C_4 = \frac{1}{2} [R\{m_3\}(m_1 + m_2) - R\{m_3^2\} - m_1 m_2]^{-1} \\ &\quad \times \Delta x \left\{ m_1 m_2 - \left(\frac{F}{M} - \frac{F_k k}{M(R + \rho + \gamma)} \right) \right\} \end{aligned}$$

但 $R\{m_3\}$ 及 $I\{m_3\}$ は夫々 m_3 の real, imaginary part であり, $R\{m_3\} = R\{m_4\}$, $I\{m_3\} = -I\{m_4\}$ である.

完全解は

$$x = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + 2C_3 e^{iI\{m_3\}t} \cos[I\{m_3\} \cdot t] \dots \dots \dots (5)$$

解の振動項の周期 $\bar{\nu}$ は

$$\bar{\nu} = \frac{I\{m_3\}}{2\pi}$$

5. 磁氣的支持可能なる爲の條件

回轉体が要求通り、空間の一點に支持可能であり且つ振動が減衰振動になる爲には、式(5)中の m_1 , m_2 及び $R\{m_3\}$ がすべて負でなくてはならぬ。この條件から、磁氣的支持が可能で、回轉体の振動数が常に自己減衰的である爲に、回路常數 ($L, \rho, C, \mu, \dots$), 回轉体の質量 M , 或は回路の増巾度 k 等の間に成立すべき関係が見出される。即ち (4) より

1) 自己減衰振動 (安定に磁氣懸吊可能) である爲の條件

$$\frac{1}{2}a \mp \mu > 0 \quad \text{i.e., } Z < b$$

而して i) $\frac{1}{2}Z \mp \nu > 0, \left(\frac{1}{2}a \mp \mu\right)^2 > 4\left(\frac{1}{2}Z \mp \nu\right)$

或は ii) $\left(\frac{1}{2}a \mp \mu\right)^2 < 4\left(\frac{1}{2}Z \mp \nu\right)$

2) 振動増大 (不安定, 磁氣懸吊不可能) になる場合

$$\text{I. } \frac{1}{2}a \mp \mu < 0 \quad \text{i.e., } Z > b$$

$$\text{II. } \frac{1}{2}a \mp \mu > 0, \quad \frac{1}{2}Z \mp \nu < 0$$

1) の i) で、不等號の代りに等號が成立する時は、定振巾の持續振動になる。

6. 實驗との比較

質量約30瓦の回轉体は、出力管 grid の bias を變化して上下約 0.5cmの範圍に亘つて平衡位置を變え得るが、その上限・下限では異つた経過で平衡が破れる。即ち回轉体が下限に近づくと序々に振動を始め (二・三サイクル程度), 更に bias を變えて回轉体を下げれば、振動の周期が短くなると共に振巾増大し、安定に支持困難になる。一方 bias を逆に上げ、回轉体を高く懸吊した場合には、振動は起らぬまま或位置を越えると吊上つてコイル壁に吸着される。この上下限の間の位置に bias を決めれば、回轉体は安定に支持され、外からの disturbance に基く振動も常に減衰する機能を示す。周期は數サイクル~10サイクル程度で、下限位置近くに位置する程早い、一秒以内には靜止する。

Fig. 4 に示した三つの曲線は、夫々磁氣的支持可能な上限下限及びその中間位置に回轉体の平衡點を與へる bias 電壓について、回轉体の位置 x と出力電流 $I+i$ を測定したものである。支持の位置 x に應じて、先述の常數 k が異なることは、圖より明らかである、種々の k 及びそれ

に對應する $(\gamma + \rho)$ を測定し、實際の回路常數を用ひ上述の計算を行つて振動の模様を調べれば、Table I の様になる。

Table I

	L	3.95	Henri			
	R	1441	Ohm			
	C	42	μ Farad			
	E	328	Volt			
	M	29.4	gr			
	Fi	$7.68_1 \times 10^5$	dyne/cm			
	Fx	$1.07_8 \times 10^4$	dyne/amp			
	I	II	III	IV	V	VI
k	1000	700	443	124	99	71.5
$\gamma + \rho$	3490	3490	3490	3541	3541	3732
a	900.1	900.1	900.1	913.0	961.0	961.3
$b \times 10^{-4}$	2.02 ₆	2.02 ₆	3.02 ₆	2.04 ₇	2.12 ₇	2.12 ₇
$c \times 10^{-6}$	6.28 ₉	4.30 ₀	2.60 ₂	0.485 ₈	0.302 ₀	0.116 ₉
$d \times 10^{-7}$	10.17 ₉	6.90 ₀	4.08 ₃	0.591 ₇	0.289 ₇	-0.011 ₈
$\xi \times 10^{-4}$	1.47 ₉	1.25 ₅	1.00 ₇	0.73 ₅	0.705	-0.77 ₆
$z \times 10^{-4}$	2.15 ₄	1.93 ₀	1.48 ₇	1.41 ₈	0.141	-0.06 ₇
$\mu \times 10^{-2}$	4.51 ₅	4.49 ₀	4.46 ₀	4.49 ₅	4.73	4.57 ₂
$\nu \times 10^{-2}$	3.77 ₅	4.94 ₀	5.38 ₆	6.65 ₈	6.86	4.80 ₃
$2m_1$	$1.4_2 + 167 i$	$-1 + 137 i$	$-14.0 + 108 i$	$-6.9 + 39.6 i$	$-8 + 28 i$	121.8
$2m_2$	$1.4_2 - 167 i$	$-1 - 137 i$	$-14.0 - 108 i$	$-6.9 - 39.6 i$	$-8 - 28 i$	-168.7
$2m_3$	-1.76×10^3	-1.76×10^3	-1.76×10^3	-1.78×10^3	-1.88×10^3	-1.87×10^3
$2m_4$	-33	-33	-32	-30.0	-30	-9.66
$\bar{\nu}$	13.2	10.8	8.6	3.2	2.2	—
	← increasing oscillation §. 5. 2), I	↔ constant oscillation	← decreasing oscillation §. 5. 1), i)		→	→ diverge §. 5. 2), II

實驗結果との比較は極めて満足すべきで、振動の周期、減衰の半減期或は下限位置に於ける減衰振動から増大振動への轉移、上限位置に於ける安定の破れ等は事實と全くよく一致してゐる。即ち下限位に接近するにつれ、 m_3 の實部は負の價で0に近ずき、遂に正になつて、 $e^{Rtmslt} \cos [I\{m_3\} \cdot t]$ は増大振動になる。上限位置を越えた點では、 m はすべて實數になり、従つて振動は起らないが、 m の一つが正實數になる爲、解は diverge し、懸吊不可能なることを示してゐる。参考の爲、 $k=175$ の時、回轉体の減衰振動の模様を §. 4 の例に基き算出、圖示する (Fig. 7)、これ等は良く觀測事實と一致する。

7. 結 論

上述の如く、回轉体の質量、回路の増巾度或は回路の諸常數等が、或る條件を満足する時は、常に磁氣的懸吊が可能であつて、而も何等かの原因で起つた回轉体の上下振動も、自ら減衰する。

例えば、質量 30gr の回

轉体は、field coil 中を流れる電流に $\frac{1}{100}$ の變化（即ち約 0.7 mA）を生じた場合、0.02cm の變化を生ずるに過ぎず、この際の振動も數分の一秒内には殆ど減衰し切るわけである。従つて上下動に對する安定度は極めて良好であると言える。この様な減衰作用を生ずる原因は、或周波數以下（今の場合 12~13 ∞ ）の signal に對しては、L, C, R の回路網（Fig.3 参照）に於いて、L を流れる電流——これが回轉体に働く力に關係する——の位相が、電壓 μe_0 （即ち回轉体の上下振動）の位相より進む爲と考えられ、事實振巾が増大する下限位置近傍では、回轉体の振動數はこの値に近くなり、計算結果と一致する。従つて C の大きさは振動の減衰に關係する重要な量となり、これが過少では安定支持困難となる。但し理論計算で C を全く除去した場合について解いてみると、回轉体の運動方程式は x について三階の微分方程式になり、やはり或る條件の下に減衰振動解が得られるが、實驗的には好結果を得ていない。

扱、回轉体に附加質量 ΔM が加はつた時、回轉体の變位及びその際の coil 電流の増加は次式を解いて調べる事が出来る。

$$\begin{cases} \frac{d^2 i}{dt^2} + \left[\frac{1}{RC} + \frac{\gamma + \rho}{L} \right] \frac{di}{dt} + \left[\frac{\gamma + \rho}{RCL} + \frac{1}{CL} \right] i + \frac{k}{LCR} x + \frac{k}{L} \frac{dx}{dt} = 0 \\ (M + \Delta M) \frac{d^2 x}{dt^2} = -\Delta M \cdot g + F_i \cdot i + F_x \cdot x \end{cases}$$

解は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = -\frac{\Delta M (\gamma + \rho + R)}{F_i k - F_x (\gamma + \rho + R)}$$

$$i = \frac{k \cdot \Delta M \cdot g}{F_i k - F_x (\gamma + \rho + R)}$$

また重力の加速度 “g” の變化 Δg に對して、 x, i が如何に變化するかは、上式で $\Delta M = M \times \frac{\Delta g}{g}$ において

$$x = -\frac{M (\gamma + \rho + R)}{F_i k - F_x (\gamma + \rho + R)} \Delta g$$

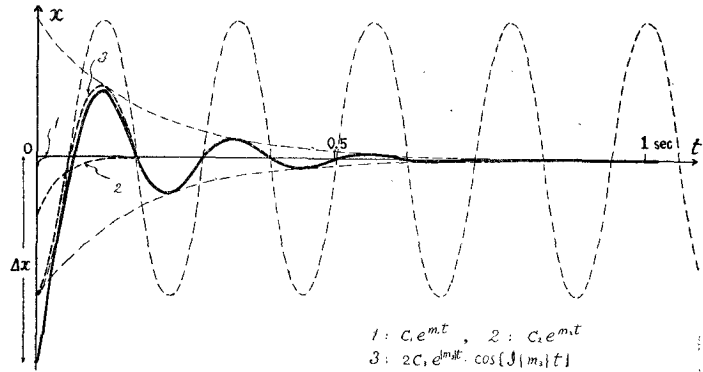


Fig. 7. Examples of the damping-oscillation of the rotor: $k=175$.

$$i = \frac{k \cdot M \cdot \Delta g}{F_i k - F_x (\gamma + \rho + R)}$$

現在使用の回路について計算してみると、 10^{-6}gr の附加に對して、 i は $4 \times 10^{-9}\text{A}$ 變化する。この程度ではなほ天秤としてそのまま用いるわけにはゆかないが、この割合を更新すれば、磁氣軸受装置はその回路に適當な考案を加えて微量質量を電流測定によつて計量することが可能であると考えられる。この方面の試みは一、二なされている様である。⁽¹²⁾⁽¹³⁾同様に重力の變化 Δg の測定についても、定壓電源の問題を解決出來れば、有用性が期待出來ると思われる。

本研究に當つて、絶えず有益な御教示と御助言を賜つた荒勝文策教授、木村毅一教授に深く感謝の意を表する次第である。

文 献

- 1) F. T. Holmes, Rev. Sci. Inst. 8, 444 ('37).
- 2) B. Arakatsu, A. Katase, J. Kokame, and S. Yano, 應用物理, vol. 18, 35 ('49).
- 3) C. Scudder Smith, Rev. Sci. Inst, 12, 15 ('41).
- 4) L. E. MacHattie, Rev. Sci. Inst. 12, 429 ('41).
- 5) J. W. Beams & J. L. Young III, Phys. Rev. 69, 537 ('46).
- 6) J. W. Beams, J. L. Young, and J. W. Moore, J. of App. Phys. 17, 886 ('46).
- 7) J. W. Beams & J. L. Young III, Phys. Rev. 71, 131L ('47).
- 8) E. C. Smith & J. W. Beams, Phys. Rev, 79, 222A ('50).
- 9) J. W. Beams, Rev. Sci. Inst. 21, 182 ('50).
- 10) B. Arakatsu, A. Katase, J. Kokame, and S. Yano,
 - a) Rep. of Inst. for Chem. Res. Kyoto Univ. 17, 87 ('49).
 - b) " " 18, 92 ('49).
 - c) " " 19, 31 ('49).
 - d) " " 21, 60 ('50).
 - e) " " 22, 67 ('50).
- 11) K. Kimura, J. Kokame, A. Katase, This bulletin. (in printing)
- 12) J. W. Clark, Rev. Sci. Inst. 18, 915 ('48).
- 13) J. W. Beams, Phys. Rev. 78, 471L ('50).

(昭和26年11月1日受理)