

境界層および厚い拡散層近似を用いたループ管内の熱音響振動の安定性解析

大阪大学 大学院基礎工学研究科 兵頭弘晃, 杉本信正

Hiroaki Hyodo, Nobumasa Sugimoto

Department of Mechanical Science, Graduate School of Engineering Science,
University of Osaka

1. はじめに

壁面に沿って温度勾配を与えた流路内の気体は、粘性や熱伝導性による拡散があるにもかかわらず不安定化し発振することがある。このような現象は熱音響現象とよばれており、熱エネルギーと音の力学的エネルギーの相互変換が行われている。気体が発振すると熱エネルギーが気体の運動エネルギーに変換されたことになり、原動機的作用とみなすことができる。逆に気体を強制振動させると熱輸送が発生し周りの壁面が冷える現象もあり、これはヒートポンプ的作用とみなすことができる。この熱音響現象を利用した熱機関が注目を集め、現在様々な研究が行われている。最近ではループ管路を用いた熱音響式熱機関が考案され、ループ管路に進行波を発生させてより高効率の熱機関が実現できることが示されている[1,2]。しかしこれらの研究は実験的取り扱いが多く、現象の理解とそれに基づいた最適な設計には理論の確立が必要とされている。

これまでの理論研究として、壁面に接した拡散層の厚さが管路の径に比べて十分薄いとすると境界層理論が展開され、タコニス振動等の古典的な熱音響現象が定量的に記述できることが明らかにされている[3-5]。しかし、最近の熱音響式熱機関では、薄い平板を積層したものや、多くの狭い管路の束からなるいわゆるスタックとよばれるものを使用している。境界層理論はそのような流路の狭いスタックの中でも比較的流路径が大きい領域に対して十分適用できることが分かっているが、スタック中においてさらに流路径が小さくなったときに境界層理論は適用できなくなる。

最近、拡散層の厚さが管径に比べて薄いという制限を排除し、変動の管軸方向の変化の代表長さが管径に対して十分長いという細管近似の下で、線形理論の範囲であるが一般的に成り立つ熱音響波動方程式が導出された[6]。この方程式は、温度変化のある気体の中を伝播する超過圧に対する 1 次元波動方程式に、拡散効果による履歴効果を考慮した微積分方程式で一般に与えられるが、拡散層の厚さに対する流路径の大小に応じて近似することができる。

本研究ではスタックを挿入したループ管路を用いた熱音響式熱機関を考え、流路径が狭いスタックに対しては、拡散層厚さに対して流路径が小さい場合に近似した拡散・波動方程式を、スタック以外の領域に対しては、流路径が大きいと近似した波動方程式をそれぞれ適用する。ループ管の各領域における波動方程式の解析解を求め、それらを各領域の境界で接合条件を課して結ぶことで周波数方程式を求める。周波数方程式をみたす実数の周波数があればそれが不安定化の臨界条件を与える。以下においては、この臨界条件を導出するとともに、臨界振動状態についても議論する。

2. 解析モデル

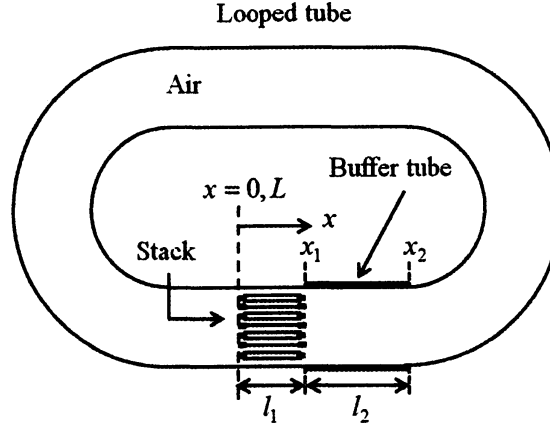


図 1: ループ管のモデル.

図 1 のようなスタックを挿入したループ管路を考える．ループ管路は一定断面積の流路とするが，スタックの細管の総断面積とその外側の断面積は異なるものとする．スタックの左端を室温 T_0 に保ち，右端を高温 T_1 に保つ．高温端から温度が室温まで下がる区間をバッファ（緩衝）チューブと呼び，その断面積は他の常温領域の管のそれに等しい．ループ管に沿って x 軸を図 1 のようにとり， $0 \leq x \leq x_1$ をスタック， $x_1 \leq x \leq x_2$ をバッファチューブ， $x_2 \leq x \leq L$ を温度一定の流路とし， $x=L$ でループを一周する．

スタックの外部では，拡散層厚さに対して流路長 R が大きいとする境界層理論を用いた熱音響波動方程式

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{2a_e^2 \sqrt{\nu_e}}{R} \left[C \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \right) + (C + C_T) \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] = 0 \quad (2.1)$$

に従うものとする．式中の $-1/2$ 階微分は以下のように定義される．

$$\frac{\partial^{-1/2} p'}{\partial t^{-1/2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{p'(x, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau. \quad (2.2)$$

ここで p' は超過圧力， a_e は気体の局所断熱音速， ν_e は気体の動粘度である．また C, C_T は定数であり，比熱比 γ およびプラントル数 Pr を用いて，それぞれ

$$C = 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}}, \quad C_T = \frac{1 + \beta}{2} + \frac{1}{\sqrt{Pr} + Pr} \quad (2.3)$$

と定義される．ここで β は，気体の粘性率，熱伝導率の温度依存性を表す，以下の式で定義される指数である：

$$\frac{k_e}{k_0} = \left(\frac{T_e}{T_0} \right)^\beta, \quad \frac{\mu_e}{\mu_0} = \left(\frac{T_e}{T_0} \right)^\beta. \quad (2.4)$$

スタック内部の気体に対しては拡散層厚さに対してスタック流路長 R_s が小さい場合の拡散・波動方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ & + \left[\frac{1}{6} \gamma - \frac{\gamma-1}{8\gamma} \text{Pr} \right] \frac{R_s^2}{\nu_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \right) - \left[\frac{1}{6} (2 + \beta + \text{Pr}) - \frac{\gamma-1}{8\gamma} \text{Pr} \right] \frac{\alpha_e R_s^2}{\nu_e T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

を用いる。ここで α_e は

$$\alpha_e = \frac{a_e^2 R_s^2}{8\gamma \nu_e} \quad (2.6)$$

で定義される拡散率である。

3. 周波数方程式の導出

ループ管の各領域に対して解析解を導出し、それらに各領域の接合箇所では接合条件を課すことで周波数を決定する方程式が得られる。

3.1 スタック内の解析解

スタック内に適用された拡散・波動方程式(2.5)は、スタック内の圧力勾配に対して

$$\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} = g(t) T_e(x) \quad (3.1.1)$$

の形を仮定する。ここで $g(t)$ は任意の時間の関数である。これを式(2.5)に代入することでスタック内の温度分布が次のような形に定まる

$$\frac{T_e}{T_0} = \left(1 - \frac{x}{x_\infty} \right)^{\frac{2}{1+2\beta}}, \quad x_\infty = \frac{R_s}{1+2\beta} \sqrt{\frac{1}{3} (1 + \beta + \text{Pr})} \frac{\alpha_0}{\nu_0} \quad (3.1.2)$$

この温度分布は $x=0$ の回りで展開するとほぼ直線に近い。分布(3.1.2)に対する解は

$$p' = \frac{\lambda T_0}{a_0} g \left(\sqrt{\frac{T_e}{T_0}} - 1 + c \right), \quad \Gamma = \sqrt{\frac{8(1 + \text{Pr} + \beta)}{3\gamma}} \quad (3.1.3)$$

となる。ここで、 c は任意の定数である。流路断面にわたって平均化した速度 $\bar{u}'$ は

$$\bar{u}' = -\frac{\gamma T_e}{a_e^2} \left(g - \frac{R_s^2}{6\nu_e} \frac{dg}{dt} \right) \quad (3.1.4)$$

で与えられる。

3.2 バッファークューブ内の解析解

スタックの高温端から温度がスタックの低温側の温度 T_0 まで下がる温度分布の形を

$$\frac{T_e}{T_0} = \left(1 - \lambda \frac{x - x_2}{l_2} \right)^2, \quad \lambda = \sqrt{T_1/T_0} - 1 \quad (3.2.1)$$

の放物型温度分布に従うと仮定する。調和振動 $p' = P(x) \exp(i\alpha t)$ を仮定すると、境界層理論を用いた波動方程式(2.1)は

$$(1-2C\delta_e)a_e^2 \frac{d^2 P}{dx^2} + [1-2(C+C_T)\delta_e] \frac{a_e^2}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{dP}{dx} + \omega^2 P = 0 \quad (3.2.2)$$

の圧力振幅方程式に帰着する．ここで δ_e は

$$\delta_e = \frac{1}{R} \left(\frac{v_e}{i\omega} \right)^{1/2} \quad (3.2.3)$$

で定義される無次元拡散層厚さ ($\delta_e \ll 1$) である．式(3.2.2)を

$$X \frac{d}{dx} \left(X \frac{dF}{dx} \right) + \alpha X \frac{d}{dx} \left(\frac{a_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} F \right) + YF = 0 \quad (3.2.4)$$

の形に δ_e の 1 次のオーダーで一致するように帰着させると，式中の文字は次のような形に決まる．

$$F = ZP, \quad X = a_e(1-C\delta_e), \quad Z = a_e \left[1 - \frac{1}{1+\beta} \left(2C_T - C - \frac{\beta}{2} C \right) \delta_e \right], \quad \alpha = -\frac{1}{2} \quad (3.2.5)$$

$$Y = \omega^2 + \left[a_e \frac{d\Omega}{dx} + \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \Omega^2 \right] \left(C_T - \frac{\beta}{4} C \right) \delta_e, \quad \Omega \equiv \frac{a_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx}, \quad (3.2.6)$$

式(3.2.4)に対して複素座標 $X d/dX \equiv a_0 d/d\xi$ を導入すると

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{\lambda}{l_2} \frac{dF}{d\xi} + \left[\frac{\omega^2}{a_0^2} + 4 \left(\frac{C_T}{C} - \frac{\beta}{4} \right) \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\lambda^2}{l_2^2} \left(1 - \lambda \frac{x-x_2}{l_2} \right)^{1+\beta} b \right] F = 0 \quad (3.2.7)$$

の常微分方程式を得る．この方程式は δ_0 に関する逐次近似で解くことができ，

$$p' = \frac{1}{Z} \left[B^+ e^{ik^+ \xi} + B^- e^{ik^- \xi} - 2i \frac{C_{T\beta}}{C} \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\lambda(1+\lambda)^{1+\beta}}{l_2} \left(\frac{B^+}{k_\beta^+} e^{ik^+ \xi} + \frac{B^-}{k_\beta^-} e^{ik^- \xi} \right) e^{-(1+\beta)\lambda\xi/l_2} b \right] e^{i\alpha x} \quad (3.2.8)$$

$$\bar{u}' = -\frac{1-2\delta_e}{i\omega\rho_e} \frac{dP}{dx} e^{i\alpha x} \quad (3.2.9)$$

が得られる．式中の文字は

$$b = C \frac{1}{R} \sqrt{\frac{v_0}{i\omega}}, \quad C_{T\beta} = C_T - \frac{\beta}{4} C \quad (3.2.10)$$

$$k^\pm \equiv \frac{i\lambda}{2l_2} \pm \frac{\psi}{l_2}, \quad \psi = \sqrt{\frac{\omega^2 l_2^2}{a_0^2} - \frac{\lambda^2}{4}}, \quad k_\beta^\pm = (1+\beta) \left(k^\pm + i \frac{\beta\lambda}{2l_2} \right) \quad (3.2.11)$$

$$\xi \approx \frac{l_2}{\lambda} \left\{ \log(1+\lambda) - \log\eta + \frac{1}{1+\beta} \left[(1+\lambda)^{1+\beta} - \eta^{1+\beta} \right] b \right\}, \quad \eta = 1 - \lambda \frac{x-x_2}{l_2} \quad (3.2.12)$$

で定義される．

3.3 温度一定流路内の解析解

スタックとバッファチューブ以外の領域では温度が T_0 で一定とみなせるものとする．このとき調和振動に対して式(2.1)は

$$(1-2C\delta_0)a_0^2 \frac{d^2 P}{dx^2} + \omega^2 P = 0 \quad (3.3.1)$$

となり、その解は

$$p' = (D^+ e^{ikx} + D^- e^{-ikx}) e^{i\omega t}, \quad k = \frac{\omega}{a_0 \sqrt{1-2b}} \quad (3.3.2)$$

となり、平均速度は(3.2.9)の関係式を用いて表される。

3.4 周波数方程式

ループ管における各接合箇所での圧力と質量流量の連続を課すことにより以下の周波数方程式が得られる：

$$(I^+ e^{ik^* \xi} + I^- e^{-ik^* \xi}) [e^{ik(L-l_2-l_1)} + e^{-ik(L-l_2-l_1)}] + (J^+ e^{ik^* \xi} + J^- e^{-ik^* \xi}) [e^{ik(L-l_2-l_1)} - e^{-ik(L-l_2-l_1)}] + K = 0, \quad (3.4.1)$$

ここで具体的な形は省略するが、係数 $I^\pm, J^\pm, K$ は管径に比した無次元拡散層厚さ

$$b = \frac{C}{R} \sqrt{\frac{\nu_0}{i\omega}} \ll 1, \quad \frac{\omega R_s^2}{6\nu_0} \ll 1 \quad (3.4.2)$$

の1次の項まで考慮している。これらの係数を無視すると、(3.4.1)は

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{1+\lambda} \Gamma \phi [2\sigma_1 \sin \phi \cos \sigma_2 + (2\psi \cos \phi - \lambda \sin \phi) \sin \sigma_2] \\ & + i \left\{ 2\psi \sqrt{1+\lambda} [1 + (1+\lambda)^{-2}] + 2\sigma_1 \left(\frac{1}{1+\lambda} + 1 \right) \sin \phi \sin \sigma_2 \right. \\ & \left. - \left[2\psi \left(\frac{1}{1+\lambda} + 1 \right) \cos \phi - \lambda \left(\frac{1}{1+\lambda} - 1 \right) \sin \phi \right] \cos \sigma_2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

になる。式中の文字は

$$\sigma_1 = \frac{\omega l_2}{a_0}, \quad \sigma_2 = \frac{\omega(L-l_2-l_1)}{a_0} \quad (3.4.4)$$

$$\psi = \sqrt{\sigma_1^2 - \frac{\lambda^2}{4}}, \quad \phi = \frac{\psi}{\lambda} \log(1+\lambda), \quad \varphi = \frac{\pi R^2}{N\pi R_s^2} \quad (3.4.5)$$

である。ここで $\varphi(>1)$ は空隙率でスタックの全流路断面積と外側の流路断面積の比である。周波数方程式を満たす実数の角周波数があればそれが臨界条件を与えるが、(3.4.3)は実数解をもたない。したがって、臨界条件は無視した小さい量によって支配されることになる。

4. 臨界条件

4.1 空隙率の及ぼす影響

周波数方程式が実数解をもつような温度比 λ と角周波数 ω の組み合わせを数値解析によって求めることで臨界条件を計算した。ループ管路の各部の長さをバッファチューブの長さを $l_2=600\text{mm}$ 、外側の流路半径を $R=20\text{mm}$ 、温度一定流路の長さを $L-l_2-l_1=2.16\text{mm}$ ま

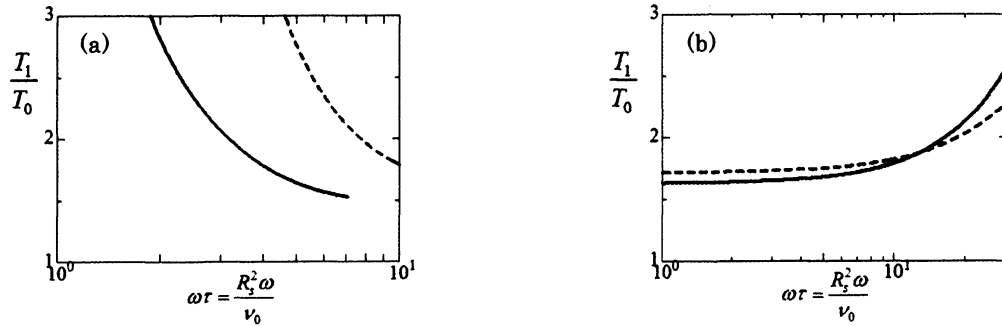


図 2： 気体が不安定化する臨界条件

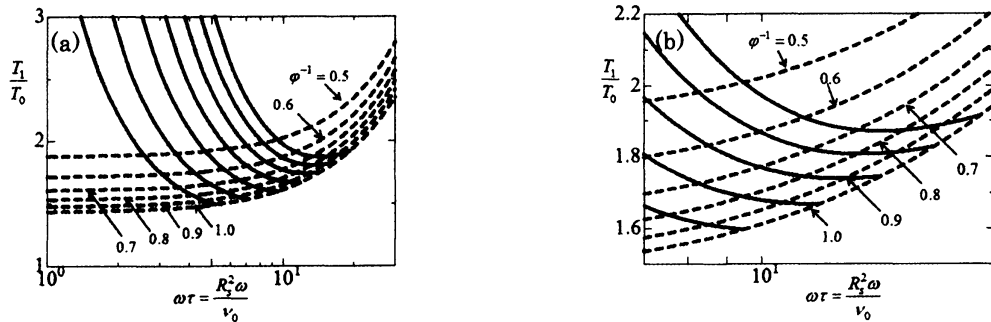


図 3： 空隙率を変化させた臨界曲線と一定に保った臨界曲線. (b)は(a)の拡大図である.

た $\beta=0.5$ とした. ここでスタックの長さは(3.1.2)式よりスタックの両端での温度比が決まることで自動的に決定される. よってループ管の全体の長さは臨界条件によってわずかに変化する.

得られた臨界条件の角周波数 ω , スタック管半径 R_s , 温度比 T_1/T_0 の関係をプロットすると図 2 の臨界曲線が得られる. 図中の実線はループ管に沿って圧力が 1 波長モード, 破線が 2 波長モードの臨界条件を示す. 曲線の下側が安定領域, 上側が不安定領域となる. 2 波長モードでは角周波数が 1 波長モードに対して約 2 倍となるため同じ $\omega\tau$ の値に対して R_s や空隙率 ϕ の値は異なることに注意したい. 図 2(a)の臨界条件はスタックの細管の数を一定とし, 空隙率を管半径の自乗に比例して変化させる. はじめにスタックの管半径を $R_s=0.3\text{mm}$, 空隙率 $\phi^{-1}=0.67$ として周波数方程式を満たすような温度比 λ と角周波数 ω の解を 1 波長モードと 2 波長モードについて得ることができる. これから R_s をわずかにずらして次の解を得る. これを繰り返すことで臨界曲線を得ることができる. 空隙率の定義より図 2(a)においては 1 波長モードの臨界曲線は $\phi>1$ の領域のみプロットしている.

一方図 2(b)は, スタックの管半径は変化させるが空隙率を $\phi^{-1}=0.67$ に保った場合の臨界条件を示す. 臨界温度比は管半径が小さいところではあまり変化していないことが見られ, 空隙率が臨界条件に大きく影響することが分かる. 図 3(a)は様々な空隙率とスタック管半径の値の組み合わせに対し, 1 波長モードについて空隙率を変化させる臨界曲線を実線, 空隙率を一定に保つ臨界曲線を破線でプロットしている. 図 3(b)はその一部分を拡大した

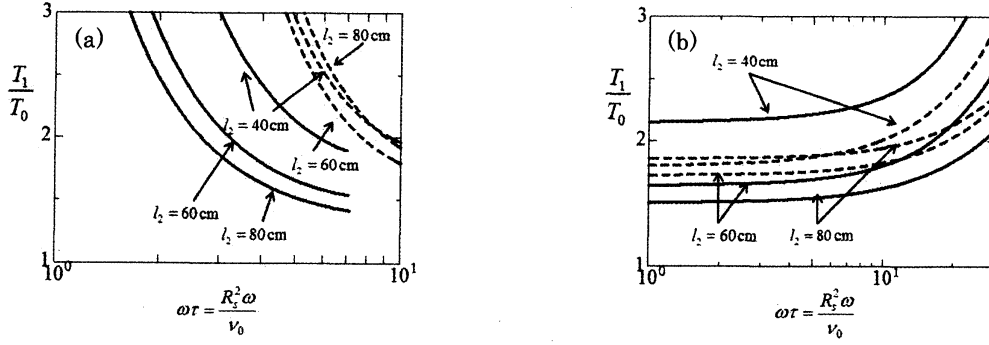


図 4： 異なるバッファチューブの長さに対する臨界条件

図である。実線が破線と交わったところでは、実線の場合の空隙率を読み取ることができる。

4.2 バッファチューブ長さの影響

バッファチューブの長さの変化が臨界条件に及ぼす影響を調べる。ループ管の幾何形状を $R=20\text{mm}$ 、バッファチューブの長さを 400mm 、 600mm 、 800mm とし、温度一定流路とバッファチューブを合わせた長さが 2.76m になるように設定する。空隙率を変化させたとき、一定に保ったときに対して臨界条件をプロットするとそれぞれ図 4(a)と図 4(b)のような臨界条件が得られる。1 波長モードに対しバッファチューブの長さが長いほど臨界温度比が低くなる傾向が見られ、実験等で得られている結果と定性的に一致する。しかし 2 波長モードに対しては臨界温度比の変化は 1 波長モードとは異なりその増減の仕方も小さい。

5. 気体の臨界振動と進行波の出現

得られた臨界条件を用いると、管路に沿った圧力分布を求めることができる。図 5 は、図 2(a)において $\omega\tau=4.6$ の場合の圧力分布を 8 分の 1 周期ごとにプロットしたものである。圧力分布には明確な節や腹が無く、進行波が発生していることが見られる。これはループ管に沿って輸送されるエネルギーフラックスを計算することでも確かめられる。エネルギーフラックスは圧力と速度の積の時間平均により得られ温度一定流路に対して、

$$\begin{aligned} \bar{I} = & -\frac{1}{2\rho_0 a_0} \left[|D^+|^2 e^{-2k_2 x} - |D^-|^2 e^{2k_2 x} \right. \\ & \left. + \left(|D^+|^2 e^{-2k_2 x} - |D^-|^2 e^{2k_2 x} \right) \left(1 - \frac{2}{C} \right) b |\cos \Theta - 2|D^+||D^-| \left(1 - \frac{2}{C} \right) b |\sin(2k_1 x + \theta^+ - \theta^-) \sin \Theta \right]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

ここで k_1, k_2, θ, Θ は

$$k = k_1 + ik_2, D^\pm = |D^\pm| e^{i\theta^\pm}, b = |b| e^{i\Theta} \quad (5.2)$$

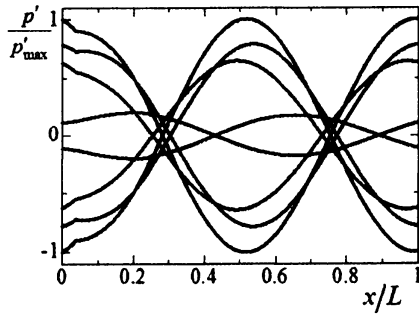


図 5: ループ管路にわたる圧力分布

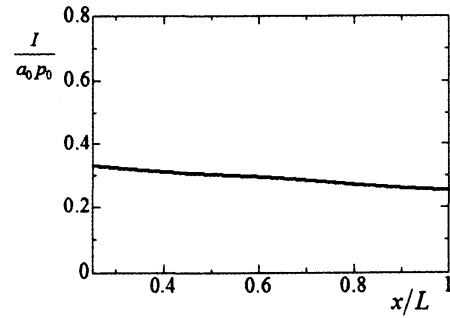


図 6: エネルギーフラックスの分布

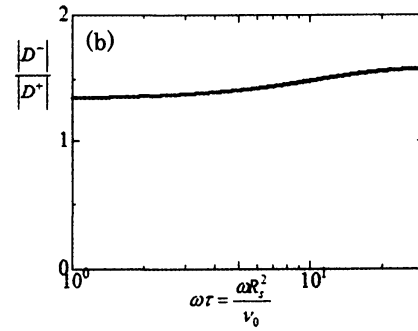
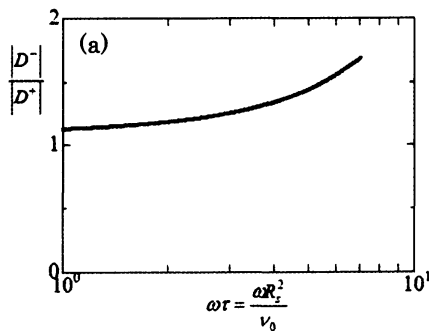


図 7: 臨界条件上での振幅比の変化 (a)は流路数を一定にして流路半径を変化させた場合, (b)は空隙率を一定にして流路半径を変えた場合

で定義される. $|D^+|=1$ とし, 図 5 における温度一定流路に対するエネルギーフラックスの空間分布をプロットすると図 6 が得られる. 図 6 のようにエネルギーフラックスが正の値をとるとき, x の正の方向へ向かう波の振幅が大きく, 全体として冷たいほうから熱いほうへと向かう進行波が発生していることが分かる.

式(5.1)から明らかにされるようにエネルギーフラックスの大きさは主に振幅 D^+ の大きさによって左右され, その差が大きいほうがより大きなエネルギーフラックスを得ることができる. そこで臨界条件上での振幅比の大きさを調べ, より大きな振幅比を得ることができる条件を探す. 1 波長モードについて, 図 2(a)の空隙率を変化させた臨界条件と図 2(b)の空隙率を一定に保った臨界条件上での振幅比をプロットすると図 7(a), 図 7(b)が得られる. 流路半径を小さくするに従って振幅比が小さくなる傾向が見られる. 空隙率を変化させたときの方が振幅比の変化も大きくなり, 空隙率が振幅比の大きさにも大きく影響していることが分かる. 図 7(a)では管半径が大きくなるにつれて, 空隙率は 1 に近づき, 振幅比も大きく増加する. より大きな振幅比を出すためには, 言い換えればより進行波成分を大きくするためには空隙率を 1 に近づけた方がいいことがわかる. つまり流路がより密に詰められたスタックを用いたほうが出力を得やすいことになる.

6. 結論

流路径に対する拡散層の厚さに着目し，その大きさに応じて近似した熱音響波動方程式を用いてループ管を用いた熱音響式熱機関に対する臨界条件を導出した．スタック内の気体に対しては拡散層が厚い場合の拡散・波動方程式を，スタックの外部の領域に対しては境界層理論を用いた熱音響波動方程式を適用することにより，ループ管内の気体の不安定化に対する臨界条件を理論によって得ることができた．この臨界曲線は実験で求められている左の枝に対応すると考えられる[7]．

臨界条件はスタック流路径と与える温度比だけではなく，空隙率というパラメータが重要になることが分かった．またループ管内の圧力分布により管内には進行波が発生し，それはスタックの低温側から高温側の向きにループ管路を伝播することが確認された．ループ管を流れるエネルギーフラックスは圧力と速度の積より求まるので進行波成分が大きいほど，よりエネルギーを得やすいことになる．臨界条件上での振幅比を調べることで進行波成分の大きさにも空隙率が大きくかかわっており，空隙率を1に近づけ，より密なスタックを使うことで進行波成分を大きくすることができることが明らかになった．

参考文献

- [1] T. Yazaki, A. Iwata, A. Maekawa, & A. Tominaga, "Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube," *Phys. Rev. Lett.* **81**, pp.3128-3131 (1998).
- [2] S. Backhaus & G. W. Swift, "A thermoacoustic Stirling heat engine: Detailed study," *J. Acoust. Soc. Am.* **107**, pp.3148-3166 (2000).
- [3] 杉本信正：境界層理論から見た熱音響振動とその安定性解析，ながれ，**24**，pp.381-393 (2005).
- [4] N. Sugimoto & M. Yoshida: "Marginal condition for the onset of thermoacoustic oscillations of a gas in a tube", *Phys. Fluids*, **19**, 074101 (2007).
- [5] N. Sugimoto & D. Shimizu: "Boundary-layer theory for Taconis oscillations in a helium-filled tube", *Phys. Fluids*, **20**, 104102 (2008).
- [6] N. Sugimoto: "Thermoacoustic-wave equation for gas in a channel and tube subject to temperature gradient," *J. Fluid Mech.*, **658**, pp.89-116 (2010).
- [7] Y. Ueda & C. Kato: "Stability analysis of thermally induced spontaneous gas oscillations in straight and looped tubes," *J. Acoust. Soc. Am.*, **124**, pp.851-858 (2008).