

L_2S^0 のホモトピー-群について

鳥取大教育 下村克己 (Katsumi Shimomura)

岡山大理 矢部敦子 (Atsuko Yabe)

§1. 導入

球面のホモトピー-群 $\pi_*(S^0)$ を決定する問題は、ホモトピー論における主問題の一つであり、それを求める方法も色々と考えられている。そのうちの一つとして一般 Adams スペクトル系列がある。この小論文では Brown-Peterson スペクトラムの局所化 $\mathbb{U}_2BP$ を基にしてつくられる Adams スペクトル系列による球面のホモトピー-群の計算を行っている。 $\mathbb{U}_2BP$ に基づいたスペクトル系列では、 $\pi_*(S^0)$ ではなく $\pi_*(L_2S^0)$ に収束している。ここに L_2S^0 は球面の $\mathbb{U}_2BP$ に関する Bousfield 局所化である。いままで既に、 $\mathbb{U}_2BP$ 、 $\mathbb{U}_1BP$ に関する局所化 L_0S^0 、 L_1S^0 のホモトピー-群は '70 年代までに決定されていた。また mod p Moore 空間 M に対しては、'86 年の論文 [14], [16] により、 $p \geq 5$ のとき LM のホモトピー-群が与えられている。

$\pi_*(L_2S^0)$ の計算は、Miller, Ravenel, Wilson [6] により導入され

たクロマティックスペクトル系列と、Bockstein スペクトル系列を用いて行う。ここでは変環定理により $U_2^1BP_*$ の Ext と $E(2)_*$ の Ext は同型だから、 U_2^1BP のかわりに $E(2)$ を用いて計算を行う、という。(ここでは $E(2)$ は $E(2)_* = \mathbb{Z}_{(p)}[U_1, U_2, U_2^{-1}]$ となる Johnson-Wilson スペクトラムを表す。) Bockstein スペクトル系列による $H^*M_0^2$ ($M_0^2 = U_2^1BP_*/(p^{\infty}, U_2^{\infty})$) の計算結果 (28 参照) は [6] で述べられているように、球面のホモトピー一群の α 族、 β 族の積に関する様々な結果、及び γ 族の分解可能性等への応用が考えられる。また Ravenel [10] により $LX = L_2S^0 \wedge X$ が示されているのでホモトピー一群 $\pi_*(L_2S^0)$ の結果は L_2 局所化されたスペクトラムのホモトピー圏の理解の第一歩ともなっている。これらの応用に関しては今後の課題としておく。

ここでは、計算の道具、計算の流れがわかるように細かい計算部分及び証明抜きで荒筋を書いていく。

2. 主結果

$E(2)$ をより大きい素数 p における Johnson-Wilson スペクトラムとする。そのホモトピー一群は $E(2)_* = \mathbb{Z}_{(p)}[U_1, U_2, U_2^{-1}]$ である。このとき、 $\pi_*(L_2S^0)$ に収束する Adams-Novikov スペクトル系列が得られることが知られている。(cf. [2], [10])
その E_2 項は

$$H^{s,t}E(2)_* = \text{Ext}_{E(2)_*(E(2))}^{s,t}(E(2)_*, E(2)_*)$$

である。ここで L_2 は $E(2)$ に関する Bousfield 局所化関手を意味している。 $i+n \leq 2$ に対し、次で定義される余加群 N_n^i, M_n^i について考える。

$$M_n^i = U_{n+i}^{-1} N_n^i, \quad N_n^{2-n} = M_n^{2-n}$$

$$N_0^0 = E(2)_*, \quad N_1^0 = E(2)_*/(p), \quad N_0^1 = E(2)_*/(p^\infty)$$

$$N_2^0 = E(2)_*/(p, U_1), \quad N_1^1 = E(2)_*/(p, U_1^\infty), \quad N_0^2 = E(2)_*/(p^\infty, U_1^\infty)$$

このとき、我々の目的である E 項が $H^*M_0^s$ となる $H^{s,t}E(2)_*$ に収束するクロマティックスペクトル系列が得られる。 $s < 2$ に対し E 項は、[6]において既にわかっている。 $H^*M_0^2$ を決定するために、 $n=0,1$ に対し E 項が $H^*M_{n+1}^{1-n}$ となる $H^*M_n^{2-n}$ に収束する U_1 -, mod p -Bockstein スペクトル系列を用いて計算する。 Ravenel は次のことを示した。

$$\text{定理 2.1 ([9]) } H^*M_2^0 = \mathbb{F}_p[U_2, U_2^{-1}]\{1, h_0, h_1, g_0, g_1, h_0g_1\} \otimes E\{s\}$$

ここで $\mathbb{F}_p$ は標数 p の素体で、 $\mathbb{Z}/p$ と同一視する。 また、 $R\{s\}$ は s により生成される R 加群を、 $E(s)$ は s により生成される外積代数を意味している。 U_1 -Bockstein スペクトル系列により定理 2.1 を用い $H^*M_1^i$ を計算する。 わかりやすくするため、 Hopkins, Mahowald 等が行っているように、生成元の形はそれを代表するコサイクルの最初の項で書く。

$$X = \mathbb{F}_p[U_1]\{U_2^{sp^n}/U_1^{qn} \mid n \geq 0, s \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}\}$$

$$X_{\infty} = F_p \{ \gamma/U_i^j \mid j > 0 \} \cong F_p[U_i, U_i^{-1}] / F_p[U_i]$$

$$Y_0 = F_p[U_i] \{ U_2^m \ell_0 / U_i^{A_n+2} \mid m \in \mathbb{Z}(0), n = \nu_p(m) \}$$

$$Y_1 = F_p[U_i] \{ U_2^m \ell_0 / U_i^{A'_n+2} \mid m \in \mathbb{Z}(2), n = \nu_p(m) \}$$

$$Y = F_p[U_i] \{ U_2^{tp-1} \ell_1 / U_i^{p-1} \mid t \in \mathbb{Z} \}$$

$$Y_{\infty} = F_p \{ \ell_0 / U_i^j \mid j > 0 \} \cong F_p[U_i, U_i^{-1}] / F_p[U_i]$$

$$G = F_p[U_i] \{ U_2^{sp^n - (p^{n-1}-1)/(p-1)} g_1 / U_i^{a_n}, U_2^s g_0 / U_i \mid n \geq 1, \$$

$$s+1 \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z} \}$$

とおく。ここより $\nu_p(m) = \max \{ k \mid p^k \mid m \}$ よりある整数 a_n, A_n, A'_n は

$$a_0 = 1, \quad a_n = p^n + p^{n-1} - 1$$

$$A_n = (p+1)(p^n-1)/(p-1)$$

$$A'_n = (p+1)(p^{n+1} - p^n + (p^n-1)/(p-1))$$

より与えられ、また整数の部分集合 $\mathbb{Z}(0), \mathbb{Z}(2)$ は次より与えられる。

$$\mathbb{Z}(0) = \{ m \mid m = sp^2, p \nmid s(s+1) \}$$

$$\mathbb{Z}(2) = \{ m \mid m = (sp^2-1)p^n \}$$

このとき H^*M_1 の構造は次のようになる。

定理 2.2 ([6], [16], [14])

$$H^*M_1 = (X \oplus X_{\infty} \oplus Y_0 \oplus Y_1 \oplus Y \oplus Y_{\infty} \oplus G) \otimes E(\mathbb{Z})$$

ここより mod p -Bockstein スペクトル系列を用い、次のようなことを得た。

定理 2.3 加群 H^*M_0 は

$$(X_\infty^\infty \oplus Y_{0,c}^\infty \oplus G_\infty^\infty) \otimes E(\zeta) \oplus X^\infty \oplus X_{\zeta,c}^\infty \oplus Y_{0,c}^\infty \oplus Y_{1,c}^\infty \oplus Y_c^\infty \oplus G^\infty$$

と同型である。

ここで先の加群は次のように定義される。0次元のものとして、

$$X^\infty = \mathbb{Z}_{(p)} \{ U_2^{sp^i} / p^{i+1} U_1^j \mid n \geq 0, s \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}, i \geq 0, j \geq 1, p^i | j \leq a_{n-i} \}$$

$$\text{かつ } p^{i+1} \nmid j \text{ 又は } a_{n-i-1} < j \}$$

$$X_\infty^\infty = \mathbb{Z}_{(p)} \{ 1 / p^{i+1} U_1^j \mid i = \nu_p(j) \geq 0 \}$$

1次元のものとして、

$$X_{\zeta,c}^\infty = \mathbb{Z}_{(p)} \{ U_2^{sp^i} / p^{i+1} U_1^j \mid s \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}, j > 0, p^i | j \leq a_{n-i} \text{ かつ}$$

$$p^{i+1} \nmid j \text{ 又は } j > a_{n-i-1} \text{ として } k \geq 0 \text{ であり}$$

$$s = (p^{k+1} - 1) \text{ に対し } p^{k+1} | j \text{ ならば } p^{i+1} | j \}$$

$$Y_{0,c}^\infty = \mathbb{Z}_{(p)} \{ U_2^{sp^i} h_0 / p^{i+1} U_1^{kp^i+1} \mid p \nmid s(s+1), k=0 \text{ に対し } i=n,$$

$$k > 0 \text{ に対し } kp^i+1 \leq a_{n-i}+2,$$

$$\text{もし } p \nmid k \text{ ならば } kp^i+1 > a_{n-i}, \text{ その他の}$$

$$\text{場合 } kp^i+1 > a_{n-i-1}+2 \}$$

$$Y_{1,c}^\infty = \mathbb{Z}_{(p)} \{ U_2^{(cp^i-1)p^n} h_0 / p^i U_1^{kp^i+1} \mid k=0 \text{ ならば } l=n+1,$$

$$k > 0, kp^i > a_{n-i} \text{ に対して}$$

$$p^{n+2}-p^n < kp^i < p^{n+2}-p^n + a_{n-i+1}+2 \text{ に対し } l=i > 0$$

$$\text{かつ } p \nmid k \text{ ならば } p^{n+2}-p^n + a_{n-i}+2 \leq kp^i$$

$$l=0 \text{ かつ } p \nmid k+p^{n-i} \text{ 又は } kp^i \leq p^{n+2}-p^n,$$

$0 < i \leq n$ 2"あり $p \nmid k + p^{n-i}$ に対し $l = i+1$

$i = n, k \leq p^2 - 1, p \mid k+1$ かつ $k \neq p^2 - p - 1$ に

対し $l = n+2$

$i = n$ かつ $k = p^2 - p - 1$ ならば $l = n+3$ }

$Y_c^\infty = \mathbb{Z}_{(p)} \{ U_2^{p^{i-1}} h_i / p^e U_1^j \mid j < p-1 \text{ ならば } l=1, p \nmid e \text{ かつ}$

$j = p-1 \text{ ならば } l=2 \}$

$Y_{\infty, c}^\infty$ は $\{ h_0 / p^j U_1 \mid j > 0 \}$ により生成される $\mathbb{Q} / \mathbb{Z}_{(p)}$ に

同型な加群

また次のものを考える。

$Y_{0, c}^{\infty, \mathcal{G}} = \mathbb{Z}_{(p)} \{ U_2^{sp^k} h_0 / p^{i+1} U_1^{kp^{i+1}+1} \mid p \nmid s(s+1), k \neq 0, i \geq 0 \text{ に対し}$

$A_{n-i-1} + 1 < kp^{i+1} \leq A_{n-i} + 1 \}$

$Y_{1, c}^{\infty, \mathcal{G}} = \mathbb{Z}_{(p)} \{ U_2^{(sp^i+1)p^n} h_0 / p^{i+1} U_1^{kp^{i+1}+1} \mid k \neq 0, i \geq 0 \text{ に対し}$

$p^{n+2} - p^n + A_{n-i-1} + 1 < kp^{i+1} \leq p^{n+2} - p^n + A_{n-i} + 1 \}$

$G_c^\infty = \mathbb{Z}_{(p)} \{ U_2^{sp^n} g_0 / p^{n+1} U_1, U_2^{sp^n - (p^{n-1}-1)/(p-1)} g_1 / p^e U_1^j \mid$

$p \nmid s+1, 0 < j \leq a_n$

$s = up^i \in \mathbb{Z}(0)$ ならば $p^{i+1} \nmid j + A_{n-i-1} + 1,$

$s = up^i \in \mathbb{Z}(2)$ ならば $p^i \nmid j + A_{n-i} + 1,$

$n=0, \nu_p(s) = i$ ならば $l = i+1$

$n \geq 1, \nu_p(j + A_{n-1} + 1) = i$ ならば $l = i+1 \}$

G_c^∞ は $\{ g_0 / p^j U_1 \mid j > 0 \}$ により生成される $\mathbb{Q} / \mathbb{Z}_{(p)}$

これにより

$$G^\infty = G_c^\infty \oplus Y^\infty$$

$$Y^\infty = (Y_{0,c}^\infty \oplus Y_{1,c}^\infty) \otimes \mathbb{Z}_p \{ \}$$

である。

この定理の系として、クロマティックスペクトル系列により Adams-Novikov スペクトル系列の E_2 項 $H^*E(2)_*$ を得る。さらに $s > 4$ に対し $E_2^s = 0$ なので、それはつづれ、群の拡大問題も起こらない。それ故 E_2 項は $L_2 S^0$ のホモトピー群と同型になる。こうして次の主定理を得た。

定理 2.4 $\pi_*(L_2 S^0)$ は $H^*E(2)_*$ に同型であり、それは

$$\begin{aligned} & \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \{ U_1^{sp^i} / p^{i+1} \mid i \geq 0, s \geq 0, p \nmid s \} \oplus X^\infty \\ & \oplus Y_{0,c}^\infty \oplus Y_{1,c}^\infty \oplus Y_c^\infty \oplus X^\infty \oplus (X^\infty \otimes \mathbb{Z}_p \{ \}) \\ & \oplus Y^\infty \oplus G_c^\infty \oplus (Y_{\infty,c}^\infty \otimes \mathbb{Z}_p \{ \}) \oplus G_0^\infty \\ & \oplus (G_0^\infty \otimes \mathbb{Z}_p \{ \}) \end{aligned}$$

と同型である。

生成元の次数は定理 9.1 から次のように読みとれる。ここでホモトピー元 $\xi \in \pi_*(L_2 S^0)$ は、 $\xi \in \pi_*(L_2 S^0)$ ならば次数 $|\xi|$ を持ち、 $|\xi| = t$ と書く。このとき最初の $\mathbb{Z}_p$ の元は 0 であり、他の元に対しては

$$|U_1^j / p^{i+1}| = j\delta - 1$$

$$|U_2^m / p^i U_1^j| = m(p+1)\delta - j\delta - 2$$

$$|U_2^m h_0 / p^i U_1^j| = m(p+1)\delta + \delta - j\delta - 3$$

$$|U_2^{p-1}g_1/p^i U_1^j| = (p+1)\delta - \delta - j\delta - 3$$

$$|U_2^m g_0/p^i U_1^j| = m(p+1)\delta + \delta - j\delta - 4$$

$$|U_2^m g_1/p^i U_1^j| = m(p+1)\delta - \delta - j\delta - 4$$

そして $z \otimes \zeta$ という形をした生成元に対しては

$$|z \otimes \zeta| = |z| - 1$$

である。

§3. ホップ擬代数

E は環スペクトラムとし、 $E_* = E_*(S^0)$ を意味しているとす
る。 E の $E_*(E)$ ホモロジーが E_* 上平坦ならば、対 $(E_*, E_*(E))$ は
普通の意味において (cf. [1], [11]) ホップ擬代数となる。とし
て $E_*(E)$ 余加群の圏においてホモロジー代数をすることができ
る。(cf. [11, A1])

それぞれの素数 p においてそのようなスペクトラム E と
して、Brown-Peterson スペクトラム BP 及び非負整数 $n \geq 0$ の
Johnson-Wilson スペクトラム $E(n)$ を得る。ここで $E(n)$ が環ス
ペクトラムであるかどうかはわからないが、任意のスペク
トラム X に対し $E(n)_*(X) = E(n)_* \otimes_{BP_*} BP_*(X)$ なので、 $BP_*(BP)$ の構造
より誘導されるホップ擬代数 $(E(n)_*, E(n)_*(E(n)))$ を得る。こ
こで BP_* の $E(n)_*$ への作用は $h_k (k \geq n)$ を 0 にすることにより与えら
れる。また h_k とは Hazewinkel の元で、次の多項式の生成元で

ある。

$$(3.1) \quad BP_* = \mathbb{Z}_{(p)}[U_1, U_2, \dots], \quad E(n)_* = \mathbb{Z}_{(p)}[U_1, \dots, U_n, U_n^{-1}] \quad (n > 0)$$

$$n=0 \text{ に対して } E(0)_* = \mathbb{Q} \text{ とする。 (cf. [11])}$$

これらの余作用環は

$$(3.2) \quad BP_*(BP) = BP_*[t_1, t_2, \dots], \quad E(n)_*(E(n)) = E(n)_* \otimes_{BP_*} BP(BP) \otimes_{BP_*} E(n)_*$$

である。[7] (cf. [11]) により、これらのスペクトラムに関するホップ擬代数の構造写像の公式を得る。 $E(n)$ に関するホップ擬代数の構造は BP_* のものから導かれる。だからここで BP の構造射を考察する。左単位元 $\eta_L: BP_* \rightarrow BP_*(BP)$ は包含写像 $BP_* \subset BP_*(BP)$ である。このとき $BP_*(BP)$ は η_L により左 BP_* 加群である。右単位元 $\eta_R: BP_* \rightarrow BP_*(BP)$ に対しては次の Landweber の公式がある。また同様に $BP_*(BP)$ は η_R により右 BP_* 加群となる。

$$(3.3) \quad \eta_R(U_n) \equiv U_n + U_{n-1} t_1^{p^{n-1}} - U_{n-1}^p t_1 \pmod{I_{n-1}}$$

但し、 I_n は BP_* の素イデアル $I_n = (p, U_1, \dots, U_{n-1})$ である。

$$E(n)_*(E(n)) \text{ については、 } E(n)_*(BP) = E(n)_* \otimes_{BP_*} BP_*(BP) = E(n)_*[t_1, t_2, \dots]$$

に注意して

$$E(n)_*(E(n)) = E(n)_*(BP) \otimes_{BP_*} E(n)_* = E(n)_*[t_1, t_2, \dots] / (\eta_R(U_i) : i > n)$$

を得る。

(A, Γ) でホップ擬代数 $(BP_*, BP_*(BP))$ または $(E(2)_*, E(2)_*(E(2)))$ とする。このとき余加群 M の Ext 群 $H^*M = \text{Ext}_\Gamma^*(A, M)$ は、余複体 (Ω^*M, d_*) のホモロジーにより計算することが出来る。

U_* 局所化 $BP_*(BP)$ 余加群 M に対し、同型写像

$$\text{Ext}_{BP_*(BP)}^{**}(BP_*, M) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_{E(2)_*(E(2))}^{**}(E(2)_*, E(2)_* \otimes_{BP_*} M)$$

が存在することが [5] で示されている。この加群を H^*M と表す。

余加群 M の余様複体は、 $s \geq 0$ に対し次数つき $\mathbb{Z}_0$ 加群

$$\Omega_r^{s,*} M = M \otimes_A \Gamma \otimes_A \cdots \otimes_A \Gamma \quad (\Gamma \text{ は } s \text{ 回}) \quad \text{と、} \quad d_{s+1} d_s = 0 \quad \text{となる微分}$$

$$d_s: \Omega_r^{s,*} M \rightarrow \Omega_r^{s+1,*} M \quad \text{との対} \quad (\Omega_r^{s,*} M, d_s) \quad \text{を} \quad \text{ある。} \quad d_s \text{ につい}$$

ては次の (3.4) によって帰納的に定義される。

$$(3.4) \quad d_0(m) = \psi(m) - m \otimes 1$$

$$d_1(m \otimes x) = \psi(m) \otimes x - m \otimes \Delta(x) + m \otimes x \otimes 1$$

$$d_s(m \otimes x \otimes x_{s-1}) = d_1(m \otimes x) \otimes x_{s-1} - m \otimes x \otimes d_{s-1}(x_{s-1})$$

$$m \in M, \quad x \in \Gamma, \quad x_s \in \Omega_r^s A = \Gamma \otimes_A \cdots \otimes_A \Gamma \quad (s \text{ 回})$$

ここで $\psi: M \rightarrow M \otimes_A \Gamma$ は M の余加群構造写像である。

§4. クロマティックスペクトル系列

この節ではまた、環スペクトラム $BP, E(2)$ を考える。そして E によってそれらのスペクトラムを意味することにする。このときもし X が連結ならば E に関する X の Bousfield 局所化のホモトピー群 $\pi_*(L_E X)$ に収束する Adams-Novikov スペクトル系列を得る。(cf. [1], [2]) 連結 p 局所化スペクトラム X に対し $L_{BP} X = X$ に注意する。 E_2 項は $H^* E_*(X) = \text{Ext}_{E_*(E)}^*(E_*, E_*(X))$ である。Landweber のフィルトレーション定理 [4] により E_2 項は

H^*E_*/I_k の計算により導かれる。ここで I_k は E_* の不変素イデアル $(p, v_1, \dots, v_{k-1})$ を意味しており、 $E=E(2)$ のとき $k \leq 2$ とする。 Ext 群 H^*E_*/I_k はまた、Toda-Smith スペクトラム $V(k-1)$ が存在するならばそれらのホモトピー群 $\pi_*(L_{\mathbb{F}}V(k-1))$ を計算するための Adams-Novikov スペクトル系列の E_2 項でもある。

Miller, Ravenel, Wilson [6] は Ext 群 H^*E_*/I_k を計算するためにクロマティックスペクトル系列を用いている。

クロマティックスペクトル系列の定義を与えておく。まず $N_k^0 = E_*/I_k$ とおき、 N_k^s が定義されていると帰納的に仮定する。このとき $M_k^s = \bigcup_{k+s}^{-1} N_k^s$ と定義し、これは [5] により N_k^s の余加群構造から導かれる余加群構造を持つ。 N_k^{s+1} は包含写像 $N_k^s \subset M_k^s$ の余核でありそれはまた、誘導された余加群構造を持つ。言い換えると、余加群の短完全列

$$(4.1) \quad 0 \longrightarrow N_k^s \xrightarrow{\subset} M_k^s \longrightarrow N_k^{s+1} \longrightarrow 0$$

がある。

(4.1) の短完全列に関し H^* を施して次の長完全列を得る。

$$(4.2) \quad 0 \rightarrow H^0 N_k^0 \rightarrow H^0 M_k^0 \rightarrow H^0 N_k^1 \xrightarrow{\delta_0} H^1 N_k^0 \rightarrow \dots \xrightarrow{\delta_{s-1}} H^s N_k^0 \rightarrow H^s M_k^0 \rightarrow \dots$$

ここで s はそれぞれ非負整数である。これらの完全列により与えられる完全対から得られるスペクトル系列をクロマティックスペクトル系列と言う。 E_1 項は $E_1^{s,t} = H^t M_k^s$ であり収束先の加群は求めたい Ext 群 $H^{s,t} N_k^0 = H^{s,t} E_*/I_k$ である。 E_1 項を計算

するために, Miller, Ravenel, Wilson は Bockstein スペクトル系列を導入した。ここで Bockstein スペクトル系列とは, 次の短完全列に H^* を施して得られる完全対により, 定義されるものである。

$$0 \longrightarrow M_{k+1}^{s-1} \xrightarrow{\varphi} M_k^s \xrightarrow{U_k} M_k^s \longrightarrow 0$$

ここで φ は $\varphi(x) = x/U_k$ により定義される余加群写像である。Bockstein スペクトル系列は E_1 項 $H^*M_{k+1}^{s-1}$ を持ち $H^*M_k^s$ に収束する。Bockstein スペクトル系列を研究する際, 我々の場合は $(k, s) = (0, 2)$ であるが, 主に次を用いる。

補題 4.3 [6, 注意 3.11] 完全対の写像を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{\delta_{t-1}} & H^*M_1^t & \xrightarrow{\varphi} & B^t & \xrightarrow{p} B^t \xrightarrow{\delta_t} H^{t+1}M_1^t \xrightarrow{\varphi_*} \cdots \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & & & & & & \end{array}$$

$$0 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta_{t-1}} H^*M_1^t \xrightarrow{\varphi} H^*M_0^t \xrightarrow{p} H^*M_0^t \xrightarrow{\delta_t} H^{t+1}M_1^t \xrightarrow{\varphi_*} \cdots$$

B^t が p 核れ群ならば φ は同型である。

帰納法の第 1 段階は Morava の定理である。

$$(4.4) [9] \quad p \geq 2 \text{ ならば } H^*M_1^0 = F_p[U_1, U_1^{-1}] \otimes E(t_1)$$

$$p \geq 3 \text{ ならば } H^*M_2^0 = F_p[U_2, U_2^{-1}] \{1, t_1, t_1', g_0, g_1, g_0 t_1'\} \otimes E(\{x\})$$

ここで $E(x)$ は $\{x\}$ で生成される外積代数, $F\{b_i\}$ は基底 $\{b_i\}$ を持つ F ベクトル空間を意味している。また元 $g_i, \{x\}$ は次で与えられる。

$$(4.5) \quad g_0 = U_2^{-1}(t_1 \otimes t_2' + t_2 \otimes t_1'), \quad g_1 = U_2^{-1}(t_1 \otimes t_2' + t_2 \otimes t_1')^p = U_2^{-1}g_0^p$$

$$\zeta_2 = U_2^{-1} t_2 + U_2^{-p} (t_2^p - t_1^{p+p}) - U_2^{p-1} U_3 t_1^p \in \Omega_1^1 A$$

第2段階は次のようである。

(4.6) [6] $p > 2$ ならば $t > 1$ に対し $H^* M_0 = 0, H^1 M_0 = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_p$ 、これ

の位数 p^j の部分群は

$$y_{1,j} = - \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k U_1^{-k} t_1^k}{k^{p^{j+1}-k}}$$

により生成される。そして

$$H^0 M_0 = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_p \oplus \sum_{i \geq 0, (p, s)=1} (\mathbb{Z}/p^{i+1}) \langle U_1^{sp^i} / p^{i+1} \rangle$$

ここで $\langle x \rangle$ は生成元が x の G と同型な群を意味している。

$H^* M_1$ の結果を述べるためにもう少し生成元を導入しておく。ここより BP 上 $\mathbb{Z}$ はなく $E(2)$ 上で考え、ホップ代数 (A, Γ) は $(E(2)_*, E(2)_*(E(2)))$ を意味する。生成元 $x_n \in \Omega_1^0 A$ は次の (4.7) により帰納的に定義される。

$$(4.7) \quad x_0 = U_2, \quad x_1 = U_2^p, \quad x_2 = x_1^p - U_1^{p-1} U_2^{p^2-p+1}$$

$$x_n = x_{n-1}^p - 2 U_1^{a_n-p} U_2^{p^n-p^{n-1}+1} \quad (n \geq 2)$$

余剰複体の微分 d_0 に対し $\mathbb{Z}$ は

$$(4.8) [6] \quad \text{mod } (p, U_1^{2+a_i})$$

$$d_0(x_i) \equiv U_1 t_1^p \quad (i=0), \quad \equiv U_1^p U_2^{p-1} (t_1 + U_1 (U_2^{-1} (t_2 - t_1^{p+1}) - \zeta_2)) \quad (i=1)$$

$$\equiv 2 U_1^{a_i} U_2^{(p-1)p^{i-1}} \sigma_{i-1} \quad (i > 1)$$

先の生成元 σ_n は

$$\sigma_n = t_1 - \frac{1}{2} U_1 \zeta_2^{p^n}$$

である。生成元 ζ_2 は $i \geq 0$ に対し $\Omega_1^1 A / (p, U_1)$ 内で ζ_2^i にホモロ-

γ'' である。

(4.10) [15] $\Omega_r^1 A / (P, U_1)$ の ζ_2 にホモロ - γ'' であるような余剰複体 $\Omega_r^1 A / (P^{(1)}, U_1^{mp})$ のコサイクル ζ が存在する。

このことにより ζ^{p^i} も含め、 $\Omega_r^1 A / (P, U_1)$ において ζ_2 とホモロ - γ'' とはるような $\Omega_r^1 A / (P^{(1)}, U_1^{mp})$ のコサイクルを ζ と表す。また次の記号を用いる。

$$(4.11) \quad \sigma = \zeta_1 - \frac{1}{2} U_1 \zeta$$

このとき σ は $\Omega_r^1 A / (P, U_1)$ において任意の n に対し σ_n にホモロ - γ'' である。

整数の集合 $\mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$ を3つの部分に分ける。

$$(4.12) \quad \mathbb{Z}_0 = \{s \mid s \in \mathbb{Z}, p \nmid s(s+1)\}, \quad \mathbb{Z}_1 = \{sp-1 \mid s \in \mathbb{Z}, p \nmid s\}$$

$$\mathbb{Z}_2 = \{sp^2-1 \mid s \in \mathbb{Z}\}$$

また、 $\mathbb{Z} - \{0\}$ を次の3つに分ける。

$$(4.13) \quad \mathbb{Z}(i) = \{m \mid m = sp^n, n \geq 0, s \in \mathbb{Z}_i\} \quad (i=0, 1, 2)$$

$m \in \mathbb{Z}(0) \cup \mathbb{Z}(2)$ に対し $\Omega_r^1 A$ の生成元 $y_m = U_2^m \zeta_1 + U_1 \bar{y}_m$ を導入する。 y_m は

$$(4.14) \quad d_1(y_m) = -S_m U_1^{A(m)} U_2^{e(m)} g_1 \quad \text{mod } (P, U_1^{A(m)+1})$$

を満たす [16] に定義されているものである。ここで $m = sp^n$, $p \nmid s$ に対し S_m は次のものに等しい。

$$(4.15) \quad S_m = \binom{s+1}{2} \quad (n=0, m \in \mathbb{Z}(0)), \quad = 1 \quad (n=0, m \in \mathbb{Z}(2)) \\ = \frac{(s+1)^n}{2} \binom{s+1}{2} \quad (n>0, m \in \mathbb{Z}(0)), \quad = \frac{(s+1)^n}{4} \quad (n>0, m \in \mathbb{Z}(2))$$

$m = sp^n$, $p \nmid s$ に対して次のように整数 $e(m)$, $A(m)$ を定義する。

$$(4.16) \quad e(m) = \begin{cases} m - (p^n - 1)/(p - 1) & (m \in \mathbb{Z}(0)) \\ m - p^n(p - 1) - (p^n - 1)/(p - 1) & (m \in \mathbb{Z}(2)) \end{cases}$$

$$(4.17) \quad A(m) = A_n + 2 \quad (m = sp^n, m \in \mathbb{Z}(0)), \quad = A'_n + 2 \quad (m = sp^n, m \in \mathbb{Z}(2)) \\ = \infty \quad (m = 0)$$

$m \in \mathbb{Z}(0) \cup \mathbb{Z}(2)$ に対し y_m を $y_m \equiv U_2^m t_1 \pmod{(p, U_1)}$ かつ y_m/U_1^j ($j \leq A(m)$) がコサイクルとなるものとして与える ([16])。また V を次で定義する。

$$(4.18) \quad pU_1V = U_2^p + U_1^p t_1^p - U_1^{p^2} t_1^p - (U_2 + U_1 t_1^p - U_1^p t_1)^p$$

$n \geq 0$ に対しては [14] で導入された $\Omega_1^2 A/(p, U_1^{a_n})$ のコサイクル G_n がある。これは次を満たすものがある。

$$(4.19) \quad G_0 \equiv g_0, \quad G_n \equiv U_2^{-(p^{n-1})/(p-1)} g_1 \pmod{(p, U_1)} \quad n > 0$$

いくつかの記号を準備しておく。

$$k(1)_* = F_p[U_1], \quad K(1)_* = U_1^{-1} k(1)_* = F_p[U_1, U_1^{-1}]$$

$$k(1)_* \{x/U_1^j \mid x \in A\} : x/U_1^j \text{ によつて生成された } k(1)_*/(U_1^j)$$

に同型である巡回 $k(1)_*$ 加群の直和

$$k(1)_* \{x/U_1^{\infty} \mid x \in A\} : F_p \text{ 基底 } \{x/U_1^j \mid j > 0\} \text{ を持つ } k(1)_*/k(1)_*$$

に同型な加群の直和

次の $k(1)_*$ 加群を考える。

$$X = k(1)_* \{x_n^s/U_1^{a_n} \mid n \geq 0, s \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}\}$$

$$X_{\infty} = k(1)_* \{1/U_1^{\infty}\}$$

$$Y_0 = k(1)_* \{ y_m / U_i^{A_m} \mid m \in \mathbb{Z}(0), n = U_p(m) \}$$

$$Y_1 = k(1)_* \{ y_m / U_i^{A_m} \mid m \in \mathbb{Z}(2), n = U_p(m) \}$$

$$Y = k(1)_* \{ U_2^{tp} V / U_i^{p-1} \mid t \in \mathbb{Z} \}$$

$$Y_\infty = k(1)_* \{ t_i / U_i^\infty \}$$

$$G = k(1)_* \{ \chi_n^s G_n / U_i^{a_n} \mid n \geq 0, s+1 \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z} \}$$

このとき [6][16][4] において得られた H^*M_i の構造は次である。

$$(4.20) \quad H^*M_i = (X \oplus X_\infty \oplus Y_0 \oplus Y_1 \oplus Y \oplus Y_\infty \oplus G) \otimes E(\zeta)$$

§5. Coker S_0 .

この節では短完全列 $0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_i \xrightarrow{p} M_i \rightarrow 0$ に関する連結準同型 $S_0: H^*M_0 \rightarrow H^*M_i$ について考える。 S_0 の像は [6, 命題 6.9] において与えられている。まず結果を H^*M_i の基底を用いてもう一度書き出しておく。

補題 5.1 連結準同型 $S_0: H^*M_0 \rightarrow H^*M_i$ は $0 \leq i \leq k, 1 \leq m \leq a_{k-i}$

であり、 $s \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}, j = mp^i$ において、生成元 $\chi_{itk}^s / p^{it} U_i^j$ を次の

ものに移す。

$$-y_s / U_i^2 + (s-1) U_2^s \} / 2 U_i \quad k=0$$

$$-m y_{spit+1} / U_i^{j+1} - m \chi_{it+1}^s \} / 2 U_i^j - s U_2^{spit+1} V / U_i^{j-1} + \dots \quad k=1$$

$$-m y_{spit+2} / U_i^{j+1} - m \chi_{it+2}^s \} / 2 U_i^j + s y_{spit+1} / U_i^{j-p} + s U_2^{spit+1} V / U_i^{j-p-2} + \dots \quad k=2$$

$$-m y_{spit+k} / U_i^{j+1} - m \chi_{it+k}^s \} / 2 U_i^j + 2s y_{(spit+1)p+k-2} / U_i^{j-a_{k-1}} + \dots \quad k>2$$

これと [6] に与えられている H^*M_0 の構造、(4.20) にある H^*M_i の

の構造より次の $\text{Coker } S_0$ に関する命題 5.6 を得る。そのために次の記号を用意する。

$$Z_0 = \{x/p^i U_j \mid x \in A, j \in J, i \in I\}$$

これは生成元 $x/p^i U_j$ ($x \in A, j \in J, i \in I$) により生成される Z/p^i に同型な巡回 Z_p 加群の直和を意味している。

$$(5.2) \quad X^\infty = Z_p \{x_n^s / p^{i+n} U_j \mid n \geq 0, s \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}, i \geq 0, j \geq 1,$$

$$p^i | j \leq a_{n-1} \text{ かつ } p^{i+1} \nmid j \text{ 又は } a_{n-1} < j\}$$

$$X_\infty = Z_p \{1/p^{i+n} U_j \mid i = U_p(j) \geq 0\}$$

これらの記号のもと

$$(5.3) \quad [6, \text{定理 6.1}] \quad H^0 M_0^\infty = X^\infty \oplus X_\infty$$

が成り立つ。また (4.20) より

$$(5.4) \quad H^1 M_1^\infty = (X \oplus X_\infty) \oplus \mathbb{Z}/p \{ \zeta \} \oplus \gamma_0 \oplus \gamma_1 \oplus \gamma_\infty \oplus \gamma$$

が成り立つ。さらに $\mathbb{Z}(2)$ の部分集合を

$$(5.5) \quad \mathbb{Z}_2^i = \{t p^{i+2} - 1 \mid t \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}\}$$

と定義する。但し i は非負整数。このとき $\bigcup \mathbb{Z}_2^i = \mathbb{Z}_2$ が成り立ち $\mathbb{Z}_2^i \cap \mathbb{Z}_2^j = \emptyset$ ($i \neq j$) が成り立つ。

命題 5.6 $\delta_0: H^0 M_0^\infty \rightarrow H^1 M_1^\infty$ の余核は次のコサイクルで代表される基により、 $\mathbb{Z}$ によるベクトル空間である。

$$I) \quad t/p U_i, \zeta/p U_j \quad (j \geq 1)$$

$$II) \quad y_{sp^n}/U_j : s \in \mathbb{Z}_0 \cup \mathbb{Z}_2, n \geq 0, j \leq A(sp^n)$$

$$p^i | j-1 \text{ ならば } j=1 \text{ 又は } j-1 > a_{n-1}$$

但し $s \in \mathbb{Z}_2^*$ ならば " $p^{k+1} \nmid j + a_{n+1}$ 又は $j > a_{n+2} - a_{n+1}$ " である。

Ⅲ) x_n^s / U_i^j : $s \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $1 \leq j \leq a_n$,

$s \in \mathbb{Z}$ 又は $s \in \mathbb{Z}_2^*$ かつ $p^{k+1} \mid j$ に対し $p^k \mid j$ ならば " $j > a_{n-1}$ "

Ⅳ) $U_i^{sp} V / U_i^j$: $s \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq p-1$, $j=p-1$ ならば " $p \mid s+1$ "

5.6. δ_i の計算

$H^i M_i$ の元の δ_i 像の計算をしなければならぬ。 x/U_i^j は命題 5.6 で与えられた $\delta_i: H^i M_i \rightarrow H^i M_i$ の余核の元の 1 つとする。このとき $x(j, 1) = x/pU_i^j$ は $H^i M_i$ の零ではない生成元である。帰納的に、 $p x(j, l) = x(j, l-1)$ とするようには零ではない生成元 $x(j, l) \in H^i M_i$ が存在するとする。 $\delta_i(x(j, l)) = 0$ ならば、 $d_i(x(j, l)/p) = d_i(p)$ とするようにはコチェイン p が存在する。 $x(j, l+1) = x(j, l)/p - p$ とおくと、 $x(j, l+1)$ はコサイクルであり、 $p x(j, l+1) = x(j, l)$ であることがわかる。このようにして、 $\delta_i(x(j, i)) \neq 0$ とするような整数 i (無限も含む) を持つまでこのことを行う。そうすればそれぞれの余核の元 x/U_i^j に対しそのような整数 i がみつかる。

また (4.20) の X の生成元について考える。但し $x_n^s \otimes x / U_i^j$ は $j \leq a_n$ のとき $-\frac{1}{2} x_n^s \otimes x / U_i^j$ によってバウンドされることに注意する。

補題 5.7 と

(6.1) $x \in H^{t+1} M_0^*$, $\delta_t: H^* M_0^* \rightarrow H^{t+1} M_1$ に対し

$$\delta_t(x \otimes \zeta) = \delta_{t-1}(x) \otimes \zeta$$

が言えることにより、

命題 6.2 連結準同型 $\delta_1: H^* M_0^* \rightarrow H^* M_1$ は、生成元

$x_{i+k}^s \zeta(j, i+1) = x_{i+k}^s \zeta / p^{i+1} U_1^j$ を次のものに移す。但し $s \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$,

$0 \leq i \leq k$, $1 \leq m \leq a_{k-i}$, $j = mp^i$ である。

$$-y_s \otimes \zeta / U_1^2 \quad k=0$$

$$-m y_{sp^{i+1}} \otimes \zeta / U_1^{j+1} - s U_2^{sp^{i+1}-p} V \otimes \zeta / U_1^{j-1} + \dots \quad k=1$$

$$-m y_{sp^{i+2}} \otimes \zeta / U_1^{j+1} + s y_{sp^{i+1}} \otimes \zeta / U_1^{j+1} + s U_2^{sp^{i+2}-p-1} V \otimes \zeta / U_1^{j-p-2} + \dots \quad k=2$$

$$-m y_{sp^{i+k}} \otimes \zeta / U_1^{j+1} + 2s y_{(sp^{i+1})p^{k-2}} \otimes \zeta / U_1^{j-a_{k-1}} + \dots \quad k>2$$

次に (4.20) の γ にある生成元について考える。その結果

より

命題 6.3 それぞれの整数 t に対しコサイクル

$$y_{tp}(0, 1) = U_2^{tp} V / p U_1^j, \quad y_{tp}(p-1, 2) = U_2^{tp} V / p^2 U_1^{p-1} - \frac{1}{2} U_2^{(t-1)p+1} t_1^{2p^2} / p^2 U_1$$

があり

$$\delta_1(y_{tp}(j, 1)) = \frac{j+1}{2} (x_1^{t+1} \zeta_1 / U_1^j + U_2^{tp} V \otimes \zeta / U_1^j) + \dots$$

$$\delta_1(y_{tp}(p-1, 2)) = \frac{1}{2} (x_1^{t+1} \zeta_1 / U_1^{p-1} + U_2^{tp} V \otimes \zeta / U_1^{p-1}) + \dots$$

である。

$j=0$ の場合次のようになる。

命題 6.4 ([17, 命題 4.4]) $n \geq 0$, $p \nmid s$ とする $sp^n \in \mathbb{Z}(0) \cup \mathbb{Z}(2)$ に

対し次を満たすコサイクル $y_{sp^n}(1, n+1)$ がある。

$$\delta_1(Y_{\text{spn}}(1, n+1)) = \frac{s}{2} (\lambda_0^{sp^n} \mathbb{G}_0 / U_1 - Y_{\text{spn}} \otimes \mathbb{G} / U_1)$$

命題 6.5 s, n, i, k は $s \in \mathbb{Z}_0, k \geq 1, n \geq i \geq 0, kp^i < A_{n-i} + 2$ である整数とし、 $m = sp^n$ とおく。このとき $0 \leq l \leq i+1$ に対し $Y_m(kp^i+1, l)$ はコサイクルである。この δ_1 像は $l \leq i$ では $\delta_1(Y_m(kp^i+1, l)) = 0$ であり、

$$\delta_1(Y_m(kp^i+1, i+1)) = \frac{k}{2} Y_m \otimes \mathbb{G} / U_1^{kp^i+1} + s \lambda_n \lambda_{n-i}^{sp^i} \mathbb{G}_{n-i} / U_1^{kp^i-A_{n-i}-1} \\ (-\frac{k}{2} \lambda_n \lambda_n^s \mathbb{G}_n / U_1^{k-A_{n-1}} \quad i=0 \text{ ならば}) + \dots$$

ここで $\lambda_n = \frac{(-1)^n}{n} (n > 1), = -\frac{1}{2} (n=1)$ である。そして ... 部分は $U_1^{k-2p^{n-1}}$ 倍で消える部分である。

これはまた、 $m \in \mathbb{Z}(2), i=0, kp^i < A_n + 2 (n = \nu_p(m))$ の場合にも成り立つ。

命題 6.6 t, j は $1 \leq j \leq p^t+1$ とする整数とする。このとき $1 \leq l \leq i+1$ に対し次のようになるコサイクル $Y_{tp^i-1}(j, l)$ が存在する。

$$\delta_1(Y_{tp^i-1}(j, 1)) = \frac{j}{2} Y_{tp^i-1} \otimes \mathbb{G} / U_1^j + \dots$$

$$\delta_1(Y_{tp^i-1}(kp, 2)) = \frac{k+1}{2} Y_{tp^i-1} \otimes \mathbb{G} / U_1^{kp}$$

$$\delta_1(Y_{tp^i-1}(p^t-p, 3)) = \frac{1}{2} Y_{tp^i-1} \otimes \mathbb{G} / U_1^{p^t-p}$$

命題 6.7 $t, n \in \mathbb{Z}, n > 0$ に対する整数 $m = (tp^t-1)p^n \in \mathbb{Z}(2)$ について考える。 i, k が $kp^i < p^{n+t}p^n + A_{n-i+1} + 2$ とする正整数ならば、 $0 \leq l \leq i$ に対し $Y_m(kp^i+1, l)$ はコサイクルであり、この δ_1 像は $l < i$ では $\delta_1(Y_m(kp^i+1, l)) = 0$ により与えられる。

とし

$$\delta_1(y_m(kp^i+1, i)) = -2\lambda_n \lambda_{n-i+1}^{(p-1)p^i} \zeta_{n-i+1} / \zeta_1^{kp^i - p^{n+2} + p^n - A_{n-i} - 1} + \dots$$

さらに $kp^i \leq p^{n+2} - p^n$ ならば次のようなコサイクルを得る。

$$\delta_1(y_m(kp^i+1, i+1)) = (k+p^{n-i}) y_m \otimes \zeta / 2 \zeta_1^{kp^i+1} + \dots$$

$$\delta_1(y_m(kp^{n+1}-p^n+1, n+2)) = (k+1) y_m \otimes \zeta / 2 \zeta_1^{kp^{n+1}-p^n+1} + \dots$$

$$\delta_1(y_m(p^{n+2}-p^{n+1}-p^n+1, n+3)) = y_m \otimes \zeta / 2 \zeta_1^{p^{n+2}-p^{n+1}-p^n+1}$$

…部分はいずれの指数の小さい部分である。

§ 7. $H^1 M_0^2$

補題 4.3 を § 6 の結果と合わせて適用すれば、§ 2 の記号を用いると

定理 7.1 $H^1 M_0^2$ は次と同型なある $\mathbb{Z}_p$ 加群である。

$$(7.2) \quad Y_{0,c}^\infty \oplus Y_{1,c}^\infty \oplus Y_{2,c}^\infty \oplus Y_{\infty,c}^\infty \oplus X_{0,c}^\infty \oplus X_{\infty,c}^\infty \otimes \mathbb{Z}_p \{ \zeta \}$$

が得られる。

§ 8. $H^2 M_0^2$

連結準同型 $\delta_2: H^2 M_0^2 \rightarrow H^2 M_1^2$ の計算を行う。

命題 8.1 ([17, 命題 4.1, 4.3])

$$\delta_2(\lambda_i^s \zeta_i / p \zeta_i^p) = -\frac{i+1}{2} \lambda_i^s \zeta_i \otimes \zeta / \zeta_i^p$$

$$\delta_2(\lambda_i^s \zeta_i / p^2 \zeta_i^{p-1}) = -\frac{1}{2} \lambda_i^s \zeta_i \otimes \zeta / \zeta_i^{p-1}$$

補題 8.2 $\lambda_i^s \zeta_n(j, l)$ がコサイクルであり、

$kp^i = j + A_{n-1} + 1 \leq A_n + 1$, $l \leq l+1$ とする。このとき

$$\delta_2(\chi_n^s G_n(j, l)) = \lambda \chi_n^s G_n \otimes \zeta / U_1^j$$

これを用いれば、[17, 命題 4.1] の一般化は次のようになる。

命題 8.3 n, s, i, j は $n \geq 1$, $i \geq 0$, $j, k \geq 0$, $p \nmid s+1$, $j \leq A_n$,

$kp^i = j + A_{n-1} + 1$ とする整数とする。このとき $0 < l \leq l+1$ に

対し $\chi_n^s G_n(j, l)$ はコサイクル $\mathbb{Z}^n$ あり

$$\delta_2(\chi_n^s G_n(j, l+1)) = -\frac{k}{s} \chi_n^s G_n \otimes \zeta / U_1^j$$

$\mathbb{Z}^n$ である。

また、[17, 命題 4.4, 補題 4.5] を用いることにより次の命題と系が示せる。

命題 8.4 $p \nmid s(s+1)$ とする整数 s, n に対し

$$\delta_2(\lambda_0^{sp^n} G_0 / p^{n+1} U_1) = \frac{s}{p} \lambda_0^{sp^n} G_0 \otimes \zeta / U_1$$

である。

系 8.5 任意の $j \geq 0$ に対し

$$\delta_2(G_0 / p^j U_1) = 0$$

である。

これらのことを補題 4.3 に適用して、 δ_2 の記号を用いると次が得られる。

定理 8.6 $H^1 M_0^\infty = Y_{\infty}^\infty \otimes G_0^\infty \oplus (Y_{\infty, c}^\infty \otimes \mathbb{Z}_p \{1\}) \oplus G_0^\infty$

δ_2 は Y_{∞}^∞ を $G_1 \otimes \mathbb{Z}_p \{1\}$ と同型にしこのことは (6.1) 命題 6.5, 6.7 より得られるが、 G_0^∞ は $(G_c - (G_0 / U_1)) \otimes \mathbb{Z}_p \{1\}$ に移す。

一方 $\delta_2(Y_{\infty} \otimes \mathbb{Z}(p)\{\zeta\}) = 0$ である。従って

補題 8.7 δ_2 の余核は $G_0 \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ によって生成される部分加群である。

補題 4.3 を用いることで、この補題と系 8.5 の系として次を得る。

定理 8.8 加群 $H^3 M_0$ は $G_0 \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ によって生成される $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(p)$ に同型である。

以上を要約して次を得る。

定理 8.9 加群 $H^* M_0$ は次と同型である。

$$(X_{\infty} \oplus Y_{\infty} \oplus G_{\infty}) \otimes E(\zeta) \oplus X^{\infty} \oplus X^{\zeta} \oplus Y_{\infty}^{\zeta} \oplus Y_{\infty}^{\zeta} \oplus Y_{\infty}^{\zeta} \oplus G^{\infty}$$

ここで $G^{\infty} = G_{\infty}^{\zeta} \oplus Y^{\zeta}$ である。

Y^{ζ} が G_{∞} に同型であることを注意すれば記号 G^{∞} は妥当である。

§ 9. $\pi_*(L, S^0)$

球面 S^0 の Bousfield 局所化のホモトピー群 $\pi_*(L, S^0)$ に収束する $E(2)$ -Adams-Novikov スペクトル系列について考える。

([1], [2], cf. [10])。このときスペクトル系列の E_2 項は

$$H^{s,t} A = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(A, A)$$

である。ここで (A, Γ) はスペクトラム $E(2)$ に関するホップ擬代数 $(E(2)_*, E(2)_*(E(2)))$ を意味している。長完全列 (4.2) があ

る。

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow H^0 N_0^* &\rightarrow H^0 M_0^* \rightarrow H^0 N_1^* \xrightarrow{\delta_0^*} H^1 N_0^* \rightarrow \dots \\
 &\rightarrow H^1 N_0^* \rightarrow H^1 M_0^* \rightarrow H^1 N_1^* \xrightarrow{\delta_1^*} H^{t+1} N_0^* \rightarrow \dots \\
 0 \rightarrow H^0 N_1^* &\rightarrow H^0 M_1^* \rightarrow H^0 M_0^* \xrightarrow{\delta_0} H^1 N_0^* \rightarrow \dots \\
 &\rightarrow H^1 N_0^* \rightarrow H^1 M_1^* \rightarrow H^1 M_0^* \xrightarrow{\delta_1} H^{t+1} N_0^* \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

これらの長完全列において、 $H^* N_0^* = H^* A$, 加群 $H^* M_0^*$, $H^* M_1^*$, $H^* M_0^*$ はわかっている。 $t > 1$ に対し $H^t M_0^* = 0$ なのぞ

$\delta_t: H^t M_0^* \rightarrow H^{t+1} N_0^*$ は $t > 1$ に対し同型ぞあり $t=1$ ぞは全射ぞある。 δ_1 の核は (4.5) より $H^1 M_0^* = Y_{\infty, c}$ なのぞ $Y_{\infty, c}$ ぞである。さらに上列における写像 $H^1 M_0^* \rightarrow H^1 M_1^*$ は単射となり次の完全列を得る。

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow H^0 N_1^* &\rightarrow H^0 M_1^* \xrightarrow{f} H^0 M_0^* \xrightarrow{\delta_0} H^1 N_0^* \rightarrow 0 \\
 0 \rightarrow H^1 M_1^* &\rightarrow H^1 M_0^* \xrightarrow{\delta_1} H^2 N_0^* \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

(4.5) と定理 8.9 より

$$\ker f = \mathbb{Z}_{(p)} \{ U_i^{sp^i} / p^{i+1} \mid i \geq 0, s \geq 0, p \nmid s \} \oplus \mathbb{Q} / \mathbb{Z}_{(p)}$$

$$\operatorname{Im} f = X_{\infty}^{\infty}$$

ぞある。さらに $H^t M_0^* = 0$ ($t > 0$), $= \mathbb{Q}$ (内部次数 $t=0$)

従って次を得る。

定理 9.1 $\pi_*(L_2 S^0)$ に対する Adams-Novikov スペクトル系

列の E_2 項 E_2^* は

$$(0) \quad E_2^* \cong \mathbb{Z}_{(p)}$$

$$(1) E_1^s \cong \mathbb{Z}_{(p)} \{ \omega_i^{sp^i} / p^{i+1} \mid i \geq 0, s \geq 0, p \nmid s \}$$

$$(2) E_2^s \cong X^\infty$$

$$(3) E_3^s \cong \gamma_{0,c}^\infty \oplus \gamma_{1,c}^\infty \oplus \gamma_c^\infty \oplus X\gamma_c^\infty \oplus (X^\infty \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \{ \gamma \})$$

$$(4) E_4^s \cong \gamma\gamma_c^\infty \oplus \gamma_c^\infty \oplus (\gamma_{\infty,c}^\infty \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \{ \gamma \}) \oplus \gamma_0^\infty$$

$$(5) E_5^s \cong \gamma_0^\infty \cong \mathbb{Q} / \mathbb{Z}_{(p)}$$

$$(6) E_t^s = 0 \quad (t > 5)$$

である。

素数 p は 3 より大きいものとする。 $\pi_*(L_2 S^0)$ に対する Adams-Novikov スペクトル系列は E_2 項から決まる。だから定理 9.1 はホモトピー一群の構造を与える。

参考文献

- [1] J. F. Adams, *Stable homotopy and generalised homology*, University of Chicago Press, Chicago, 1974.
- [2] A. K. Bousfield, The localization of spectra with respect to homology, *Topology* **18** (1979), 257–281.
- [3] M. Hikida and K. Shimomura, An exact sequence related to Adams-Novikov E_2 -terms of a cofiber, to appear.
- [4] P. S. Landweber, Associated prime ideals and Hopf algebras, *J. Pure and Applied Algebra*, **3** (1973), 175–179.
- [5] H. R. Miller and D. C. Ravenel, Morava Stabilizer Algebras and the localization of Novikov's E_2 -term. *Duke Math. J.* **44** (1977), 433–447.

- [6] H.R. Miller, D. C. Ravenel, and W. S. Wilson, Periodic phenomena in Adams-Novikov spectral sequence, *Ann. of Math.* **106** (1977), 469–516.
- [7] D. G. Quillen, On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, *Bull. A.M.S.* **75** (1969), 1293–1298.
- [8] D. C. Ravenel, The structure of BP_*BP modulo an invariant prime ideal, *Topology* **15** (1976), 149–153.
- [9] D. C. Ravenel, The cohomology of the Morava stabilizer algebras, *Math. Z.* **152** (1977), 287–297.
- [10] D. C. Ravenel, Localization with respect to certain periodic homology theories, *Amer. J. Math.* **106** (1984), 351–414.
- [11] D. C. Ravenel, *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, Academic Press, 1986.
- [12] D. C. Ravenel, The geometric realization of the chromatic resolution, In W. Browder, editor, *Algebraic topology and algebraic K-theory*, 1987, 168–179.
- [13] D. C. Ravenel, *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory*, Ann. of Math. Studies 128, Princeton Univ. Press, 1992.
- [14] K. Shimomura, On the Adams-Novikov spectral sequence and products of β -elements, *Hiroshima Math. J.* **16** (1986), 209–224.
- [15] K. Shimomura, Non-triviality of some products of β -elements in the stable homotopy of spheres, *Hiroshima Math. J.* **17** (1987), 349–353.
- [16] K. Shimomura and H. Tamura, Non-triviality of some compositions of β -elements in the stable homotopy of the Moore spaces, *Hiroshima Math. J.* **16** (1986), 121–133.
- [17] K. Shimomura and A. Yabe, On the chromatic E_1 -term $H^*M_0^2$, to appear in Proceedings of the Northwestern Conference on Group Cohomology and its applications, 1992.