

BV exactness and computation of the S^1 -equivariant cohomology of free loop spaces

若月駿

名古屋大学・多元数理科学研究科

1 Introduction

本稿では、BV 完全性と自由ループ空間の同変コホモロジーの計算方法について、栗林勝彦氏、内藤貴仁氏、山口俊博氏との共同研究 [KNWY21] において得られた結果を解説する。

単連結な位相空間¹ M に対し、その上の自由ループ空間 $LM := \text{Map}(S^1, M)$ 、すなわち 1 次元球面 S^1 から M への連続写像全体のなす空間 (にコンパクト開位相を入れたもの) を考える。ここで $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の群構造を用いることで、自由ループ空間 LM には S^1 作用 $\rho: S^1 \times LM \rightarrow LM$; $\rho(t, \gamma)(s) = \gamma(t + s)$ が入る。これにより同変コホモロジー $H_{S^1}^*(LM) := H^*(ES^1 \times_{S^1} LM)$ が定義される。本稿の目的は、通常の特異コホモロジー $H^*(LM)$ と $H_{S^1}^*(LM)$ の関係を BV 完全性という新たな概念を用いて調べ、特に $H_{S^1}^*(LM)$ の計算方法を与えることである。

以下、係数環は有理数体 $\mathbb{Q}$ (または標数 0 の体) とし、 $H^*(-) := H^*(-; \mathbb{Q})$, $\otimes := \otimes_{\mathbb{Q}}$ などと略記する。

2 BV 完全性と主定理

上述の S^1 作用 $\rho: S^1 \times LM \rightarrow LM$ を用いて BV 作用素² $\Delta: H^n(LM) \rightarrow H^{n-1}(LM)$ を次の合成により定義する:

$$\begin{aligned} \Delta: H^n(LM) &\xrightarrow{\rho^*} H^n(S^1 \times LM) \xrightarrow[\cong]{\text{K\"unneth}} (H^1(S^1) \otimes H^{n-1}(LM)) \oplus (H^0(S^1) \otimes H^n(LM)) \\ &\xrightarrow{\text{proj}} H^1(S^1) \otimes H^{n-1}(LM) \cong H^{n-1}(LM) \end{aligned}$$

このとき次が成り立つ。

補題 2.1. $\Delta \circ \Delta = 0: H^n(LM) \rightarrow H^{n-2}(LM)$

¹特に閉多様体や分類空間 BG などを念頭に置いているが、本稿では一般の単連結 (有限型) 空間で良い。

²この名前は BV 代数に由来するものであるが、本稿では (一般の空間を扱っているため) BV 代数全体は扱わず、BV 作用素 Δ のみを単独で扱う。

証明. Δ の定義より, $\Delta \circ \Delta$ は下図における合成 $p_2 \circ (\text{id} \times \rho)^* \circ \rho^*$ を経由する形に書くことができる.

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(LM) & \xrightarrow{\rho^*} & H^n(S^1 \times LM) \\
 \downarrow \rho^* & & \downarrow (\text{id} \times \rho)^* \\
 H^n(S^1 \times LM) & \xrightarrow{(\mu \times \text{id})^*} & H^n(S^1 \times S^1 \times LM) \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\
 H^2(S^1) \otimes H^{n-2}(LM) & \xrightarrow{\mu^* \otimes \text{id}} & H^2(S^1 \times S^1) \otimes H^{n-2}(LM)
 \end{array}$$

ここで, $\mu: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ は S^1 の群演算である. S^1 作用の結合性 $\rho \circ (\mu \times \text{id}) = \rho \circ (\text{id} \times \rho)$ および Künneth の定理の自然性から図式は可換なので, $H^2(S^1) = 0$ であることから合成が 0 であることが従う. $\square$

この補題より $\text{Ker } \Delta \supset \text{Im } \Delta$ なので, “コホモロジー” $\text{Ker } \Delta / \text{Im } \Delta$ が非自明になるか, すなわち列

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H^n(LM) \xrightarrow{\Delta} H^{n-1}(LM) \xrightarrow{\Delta} \dots \xrightarrow{\Delta} H^1(LM) \xrightarrow{\Delta} H^0(LM) \rightarrow 0$$

が完全かどうかを調べるのは自然な問いである. ただし, 単位元 $1 \in H^0(LM)$ がこの “コホモロジー” において非自明な元を与えることが容易に分かるので, 被約コホモロジーへの制限 $\tilde{\Delta}: \tilde{H}^n(LM) \rightarrow \tilde{H}^{n-1}(LM)$ を考えることにする.

定義 2.2 ([KNWY21]). $\text{Ker } \tilde{\Delta} = \text{Im } \tilde{\Delta}$ のとき, M を **BV 完全** という.

BV 完全性は素朴な定義であるが, 次の定理から同変コホモロジーの計算に有効な概念であることが分かる.

定理 2.3 ([KNWY21]). M が BV 完全であれば, 次の同型が成り立つ:

$$H_{S^1}^*(LM) \cong \text{Ker } \tilde{\Delta} \oplus H^*(BS^1)$$

ここで, BS^1 は位相群 S^1 の分類空間であり, $H^*(BS^1)$ は 2 次の元で生成される 1 変数多項式環である.

すなわち, BV 完全な場合には $H_{S^1}^*(LM)$ の計算が $\tilde{H}^*(LM)$ とその上の作用素 $\tilde{\Delta}$ の計算に帰着されるのである. 一般には $H_{S^1}^*(LM)$ を計算するためには LM への S^1 作用を空間レベルで扱う必要があるが, BV 完全な場合にはコホモロジーレベルでの作用のみを考えれば良いということである.

また, 次の定理から BV 完全な空間の例が非常に豊富であることが分かる.

定理 2.4 ([KNWY21]). M (の Sullivan モデル) が positive weight を許容するならば, M は BV 完全である. 特に, M が formal であれば, M は BV 完全である.

positive weight や formality の定義については定義 3.4 にて述べるが, 例えば等質空間が positive weight を許容する空間の例となっている.

また, コンピュータを活用することで, BV 完全でないような空間の例を発見した. 詳細については例 4.1 で述べる.

本稿では詳細は省略するが, [KNWY21] ではさらに BV 完全性の一般化として r -BV 完全性を導入しており, 位相空間の新たな階層づけを与えている. これらは巡回ホモロジーにおける周期写像の自明性と関係していることも分かっている.

3 有理ホモトピー論

本節では、有理ホモトピー論の基礎事項、特に Sullivan モデルについて説明する．詳細については [FHT01] を参照されたい．

定義 3.1. 単連結空間 M の (極小) Sullivan モデルとは、以下の条件を満たす組 $(\wedge V, d)$ のことである．

- $V = \{V^n\}_{n \geq 2}$ は次数つき $\mathbb{Q}$ ベクトル空間である．
- $\wedge V$ は、 V が生成する自由な次数つき可換代数である．(すなわち、 V^{even} が生成する多項式環と V^{odd} が生成する外積代数のテンソル積)
- $(\wedge V, d)$ は Differential Graded Algebra (DGA) をなす．(すなわち、 $d: \wedge V \rightarrow \wedge V$ は線形写像で Leibniz 則 $d(xy) = d(x) \cdot y \pm x \cdot d(y)$ ($x, y \in V$) を満たす)
- $d(V) \subset \wedge^{\geq 2} V$ が成り立つ．
- DGA の擬同型 $(\wedge V, d) \simeq C^*(M)$ が成り立つ.³ (特に $H^*(\wedge V, d) \cong H^*(M)$ が成立)

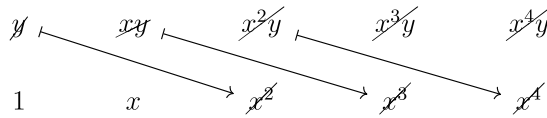
ここで、 $C^*(M)$ は M の特異コチェイン代数である．

$v \in V^n$ に対し、 n を v の次数と言ひ、 $|v| = n$ と書く．また、次数つきベクトル空間 V の (斉次元による) 基底 $v_1, \dots, v_k$ が与えられているとき、 $\wedge(v_1, \dots, v_k) = \wedge V$ と書く．

例 3.2. 偶数次元球面 S^{2n} の Sullivan モデルは $(\wedge(x, y), d)$ と書ける．ここで、生成元の次数は $|x| = 2n$, $|y| = 4n - 1$ で与えられ、微分 d は $dx = 0$, $dy = x^2$ で定まるものである．このとき $\wedge(x, y)$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底は $\{x^k, x^k y\}_{k \in \mathbb{N}}$ で与えられ、微分は Leibniz 則を用いることで以下のように計算できる．

- $d(x^k) = kx^{k-1} \cdot d(x) = 0$
- $d(x^k y) = d(x^k) \cdot y + x^k \cdot d(y) = 0 + x^k \cdot x^2 = x^{k+2}$

よって、鎖複体 $(\wedge(x, y), d)$ を図示すると下図のようになり、そのコホモロジーは $H^*(\wedge(x, y), d) \cong \mathbb{Q}\{1, x\}$ と計算できる．このことから⁴、 $(\wedge(x, y), d)$ が S^{2n} の Sullivan モデルであることが分かる．



単連結空間の有理ホモトピー型の情報は、その Sullivan モデルから完全に復元できることが知られている．特に、自由ループ空間 LM の Sullivan モデルは、次のようにして M の Sullivan モデルから構成することができる．

定理 3.3 ([VPS76], [BVP88]). $(\wedge V, d)$ を M の Sullivan モデルとする． $\bar{V}$ を、 $\bar{V}^n := V^{n+1}$ で定まる次数つきベクトル空間とし、代数 $\wedge V \otimes \wedge \bar{V}$ 上の derivation s, δ を、 $s(v) := \bar{v}$, $s(\bar{v}) := 0$ および $\delta(v) := d(v)$, $\delta(\bar{v}) := -s d(v)$ により定める．ここで、 $\bar{v}$ は $v \in V^{n+1}$ に対応する $\bar{V}^n$ の元である．このとき、次が成り立つ．

³ 正確には、可換な DGA $A_{\text{PL}}^*(M)$ を用いて $(\wedge V, d) \xrightarrow{\sim} A_{\text{PL}}^*(M) \simeq C^*(M)$ を要請する

⁴ 正確には、ここでも $A_{\text{PL}}^*(S^{2n})$ を用いて DGA の擬同型 $(\wedge V, d) \xrightarrow{\sim} A_{\text{PL}}^*(S^{2n})$ を構成する必要がある．

- (1) $(\wedge V \otimes \wedge \bar{V}, \delta)$ は自由ループ空間 LM の Sullivan モデルである.
- (2) $s: \wedge V \otimes \wedge \bar{V} \rightarrow \wedge V \otimes \wedge \bar{V}$ がコホモロジーに誘導する写像は, $\Delta: H^*(LM) \rightarrow H^*(LM)$ に一致する.

続いて, formality と positive weight の定義を紹介する.

定義 3.4. $(\wedge V, d)$ を M の Sullivan モデルとする.

- 擬同型 $(\wedge V, d) \simeq H^*(M)$ が成り立つとき, M を **formal** という.
- 次数つきベクトル空間の直和分解 $V = \bigoplus_{k>0} V_{(k)}$ が存在して $d(V_{(k)}) \subset (\wedge V)_{(k)}$ を満たすとき, M (の Sullivan モデル) が **positive weight** を許容するという.

M が formal であれば, $C^*(M)$ ではなく $H^*(M)$ から M の Sullivan モデルが計算できることになる. その意味で, formal な空間は「単純」な空間であると言える. また, positive weight がその一般化であることが次の定理から分かる.

定理 3.5 ([HS79]). M が formal であれば, M は positive weight を許容する.

以下のように, formal な空間や positive weight を許容する空間は豊富に存在する.

例 3.6.

- [DGMS75] コンパクト Kähler 多様体は formal である.
- 等質空間は 2-stage の Sullivan モデルを持つため, positive weight を許容する. しかし, 一般には formal とは限らない.

4 主定理の証明と BV 完全でない例

Section 2 で与えた定理の証明の概略を述べる.

定理 2.3 の証明. [VB85] により, $ES^1 \times_{S^1} LM$ の Sullivan モデルは $(\wedge u \otimes \wedge V \otimes \wedge \bar{V}, D)$ と書ける. ここで, $|u| = 2$ であり, 微分 D は定理 3.3 の s と δ を用いて $D(u) := 0$ および $v \in V$ に対して $D(v) := \delta(v) + us(v)$, $D(\bar{v}) := \delta(\bar{v})$ で定まる derivation である. このとき $(\wedge u \otimes \wedge V \otimes \wedge \bar{V}, D)$ は, 一方の微分が δ , もう一方の微分が us であるような二重複体 (の全鎖複体) とみなすことができ, 二重複体のホモロジー代数の議論により定理 2.3 は証明される. $\square$

定理 2.4 の証明. 写像 $L, e: \text{Der}(\wedge V) \rightarrow \text{Der}(\wedge V \otimes \wedge \bar{V})$ を, $\theta \in \text{Der}(\wedge V)$ および $v \in V$ に対して $L_\theta(v) := \theta(v)$, $L_\theta(\bar{v}) := \pm s\theta(v)$ と $e_\theta(v) := 0$, $e_\theta(\bar{v}) := \pm \theta(v)$ により定める. このとき “Cartan の公式” $L_\theta = s \circ e_\theta \pm e_\theta \circ s$ が成立するので, $H^*(L_\theta)(\text{Ker } H^*(s)) \subset \text{Im } H^*(s)$ となることが分かる. 特に θ として weight を掛ける写像をとると, weight が positive であることと標数が 0 であることから $H^*(L_\theta)(\text{Ker } H^*(s)) = \text{Ker } H^*(s)$ となる. よって $\text{Ker } H^*(s) \subset \text{Im } H^*(s)$, すなわち $\text{Ker } H^*(s) = \text{Im } H^*(s)$ となることが分かる. $\square$

続いて, BV 完全でない例について述べる.

例 4.1 ([AL00], [KNWY21]). Sullivan 代数 $(\wedge V, d) := (\wedge(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z), d)$ を次で定める:

- $|x_1| = 10, |x_2| = 12, |y_1| = 41, |y_2| = 43, |y_3| = 45, |z| = 119$
- $dx_1 = 0, dx_2 = 0, dy_1 = x_1^3 x_2, dy_2 = x_1^2 x_2^2, dy_3 = x_1 x_2^3, dz = x_2(y_1 x_2 - x_1 y_2)(y_2 x_2 - x_1 y_3) + x_1^{12} + x_2^{10}$

また位相空間 M を, その Sullivan モデルが⁵ $(\wedge V, d)$ となるようなものとしてとる. M は次元 228 の Poincaré 双対性を満たし, 基本類として $\omega := x_1^{14} y_2 y_3 - x_1^{13} x_2 y_1 y_3 + x_1^{12} x_2^2 y_1 y_2$ が取れる. このとき明らかに $[\omega] \notin \text{Im } \tilde{\Delta}$ だが⁶, 下記の元 α により $\tilde{\Delta}[\omega] = [s\omega] = [d\alpha] = 0$, すなわち $[\omega] \in \text{Ker } \tilde{\Delta}$ となることが分かる. よってこの空間 M は BV 完全ではない.

$$\begin{aligned} \alpha := & -1380x_1^{11}x_2^6\bar{y}_3 - 5290x_1^{11}x_2^5y_3\bar{x}_2 - 114x_1^{10}y_1y_2\bar{y}_2 + 114x_1^{10}y_1y_3\bar{y}_1 - 114x_1^9x_2y_1y_2\bar{y}_1 \\ & + \frac{93}{2}x_1^2y_2y_3\bar{z} + x_1^2y_2z\bar{y}_3 - x_1^2y_3z\bar{y}_2 + 114x_1x_2^7y_2y_3\bar{y}_3 - \frac{93}{2}x_1x_2y_1y_3\bar{z} - x_1x_2y_1z\bar{y}_3 \\ & - 114x_1x_2y_2z\bar{y}_2 + 115x_1x_2y_3z\bar{y}_1 + 113x_1y_1y_3z\bar{x}_2 + 572x_1y_2y_3z\bar{x}_1 + 115x_2^9\bar{z} \\ & - 114x_2^8y_1y_3\bar{y}_3 + 114x_2^8y_2y_3\bar{y}_2 + 1150x_2^8z\bar{x}_2 + \frac{93}{2}x_2^2y_1y_2\bar{z} + 115x_2^2y_1z\bar{y}_2 \\ & - 115x_2^2y_2z\bar{y}_1 - 340x_2y_1y_2z\bar{x}_2 - 229x_2y_1y_3z\bar{x}_1 \end{aligned}$$

この α は到底手計算で発見できるものではなく, 筆者が作成したソフトウェア [Wak] の活用により得られた成果である.

5 ソフトウェア Kohomology について

筆者は有理ホモトピー論における具体例の計算を効率的に行うために, ソフトウェア Kohomology [Wak] を開発した. プログラミング言語 Kotlin⁵ により書かれており, 以下の 2 つの方法で利用できる.

- スマートフォン・PC などのブラウザからウェブサイト <https://shwaka.github.io/kohomology/calculator>⁶ にアクセスする.
- Kotlin や Java のプログラムを書き, その中から Kohomology を呼び出す.

空間 M の Sullivan モデル $(\wedge V, d)$ が与えられたとき, 上記のウェブサイトでは以下のものが計算できる.

- コホモロジー $H^*(\wedge V) \cong H^*(M)$
- 自由ループ空間のコホモロジー $H^*(\wedge V \otimes \wedge \bar{V}) \cong H^*(LM)$
- 自由ループ空間の同変コホモロジー $H^*(\wedge u \otimes \wedge V \otimes \wedge \bar{V}) \cong H_{S^1}^*(LM)$
- 自己ホモトピー同値のなす空間のホモトピー群 $H^*(\text{Der}(\wedge V)) \cong \pi_{-*}(\text{aut}_1(M))$
- イデアル $I \subset \wedge V$ に対して, コホモロジー $H^*(\wedge V/I)$ と, $(\wedge V/I, d)$ の極小 Sullivan モデル

⁵Java を現代的な視点から改善したプログラミング言語

⁶計算はサーバーではなく, このウェブサイトを閲覧している端末で行われるため, 複雑な計算をする際にはバッテリーの消費などに注意が必要である.

また、ウェブサイトではなくプログラムから Kohomology を呼び出す場合には、更に以下のような計算を行うこともできる上に、計算速度もウェブサイトより大幅に高速なものとなる。

- Sullivan モデルの間の DGA の準同型を扱う
- 全射擬同型に沿って準同型をリフトする
- $H^*(\wedge V)$ の元の和や積を計算する
- 線形写像の Im や Ker を計算する (特にこれが例 4.1 における α の発見において重要な役割を果たした)

References

- [AL00] M. Arkowitz and G. Lupton. Rational obstruction theory and rational homotopy sets. **Math. Z.**, 235(3):525–539, 2000.
- [BVP88] D. Burghlea and M. Vigué Poirrier. Cyclic homology of commutative algebras. I. Algebraic topology, rational homotopy, Proc. Conf., Louvain-la-Neuve/Belg. 1986, Lect. Notes Math. 1318, 51-72 (1988)., 1988.
- [DGMS75] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, and D. Sullivan. Real homotopy theory of Kähler manifolds. **Invent. Math.**, 29:245–274, 1975.
- [FHT01] Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas. **Rational homotopy theory**, volume 205 of **Graduate Texts in Mathematics**. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [HS79] S. Halperin and J. Stasheff. Obstructions to homotopy equivalences. **Adv. Math.**, 32:233–279, 1979.
- [KNWY21] K. Kuribayashi, T. Naito, S. Wakatsuki, and T. Yamaguchi. A reduction of the string bracket to the loop product. arXiv:2109.10536, 2021. to appear in *Algebr. Geom. Topol.*
- [VB85] M. Vigué-Poirrier and D. Burghlea. A model for cyclic homology and algebraic K-theory of 1-connected topological spaces. **J. Differ. Geom.**, 22:243–253, 1985.
- [VPS76] M. Vigué-Poirrier and D. Sullivan. The homology theory of the closed geodesic problem. **J. Differ. Geom.**, 11:633–644, 1976.
- [Wak] S. Wakatsuki. kohomology. <https://shwaka.github.io/kohomology>.

Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Furocho, Chikusaku, Nagoya, Aichi, 464-8602
JAPAN
E-mail address: shun.wakatsuki@nagoya-u.ac.jp

名古屋大学・多元数理科学研究科 若月駿