

STARLIKENESS OF MEROMORPHIC AND α -CONVEX FUNCTIONS

和歌山大学教育学部 福井誠一 (Seiichi FUKUI)

1 導入

池田氏は [2] で次の結果を発表した。

定理 A 関数 $f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$ を $0 < |z| < 1$ で正則とする。

任意の実数 α に対して、

$$\operatorname{Re}\left\{\alpha\left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)}\right) + (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} < 0, \quad |z| < 1 \quad (1)$$

がみたされれば、

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} < 0, \quad |z| < 1 \quad (2)$$

が成立する。

定理 B 関数 $f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$ を $0 < |z| < 1$ で正則とする。

$\alpha > 1$, $0 < \beta < 1$ に対して

(i) $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ のとき、

$$\operatorname{Re}\left\{\alpha\left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)}\right) + (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > -\frac{\alpha\beta}{2(1-\beta)} - \beta, \quad |z| < 1 \quad (3)$$

で、ここに $\alpha > \frac{2(1-\beta)^2}{\beta}$ とする。

(ii) $\frac{1}{2} < \beta < 1$ のとき、

$$\operatorname{Re}\left\{\alpha\left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)}\right) + (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > -\frac{\alpha(1-\beta)}{2\beta} - \beta, \quad |z| < 1 \quad (4)$$

で、ここに $\alpha > 2\beta$ とする。 このとき、

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} < -\beta, \quad |z| < 1 \quad (5)$$

が成立する。

この報告では、 p -valent(p 葉)な関数についても同様な結果が得られることを示し、同時に池田氏の結果の拡張定理も得られることを示す。

2 準備

p を正の整数として、 $\Sigma(p)$ を単位円 $U=\{z; |z| < 1\}$ で、

$$f(z) = \frac{1}{z^p} + a_0 + a_1 z + \dots$$

の形に表される原点でのみ p 位の極をもつ有理型関数の集合とする。このとき、 $f(z) \in \Sigma(p)$ に対して、

$$F(z) = \alpha \left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)}\right) + (1-\alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} \quad (6)$$

とおくと、形式的な計算により

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{zf'(z)}{f(z)} = -p + a_0 p z^p + \dots, \\ 1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)} &= p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)} = -p - \frac{p+1}{p} a_1 z^{p+1} \dots \end{aligned} \quad (7)$$

となる。また、

$$F(z) = p(z) + \alpha \frac{zp'(z)}{p(z)} = -p + (1-\alpha)a_0 p z^p + \dots$$

である。(注 関数 $p(z)$ と整数 p とは紛らわしいがこのまま使うことにする。)

有理型関数 $f(z) \in \Sigma(p)$ が α -convex であるとは、一般には $\operatorname{Re} F(z) < 0, |z| < 1$

をいうのであろうが、ここでは、 $\operatorname{Re} F(z) < \beta$ または $\operatorname{Re} F(z) > \beta, |z| < 1$ も含めて考える。

後に必要となる補題を示す。

補題1 ([1] または [3], [4])

関数 $w(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$ を $a_p \neq 0, p \geq 1$ とし、 $|z| < R$ で正則とする。

いま、 $\max_{|z| \leq r} |w(z)| = |w(z_0)|$, $z_0 = re^{i\theta}$, $r < R$ が成立すれば、 $\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} = m$

は実数で、かつ $m \geq p$ となる。

補題 2 関数 $p(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$ を U で正則とする。ある $z_0 \in U$ に対し、 $|z| < |z_0|$ のとき、 $\operatorname{Re} p(z) < \gamma$ 、かつ $\operatorname{Re} p(z_0) = \gamma$ をみたし、 $a < 0$, $a < \gamma$ ならば

$$\operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \begin{cases} \geq \frac{n\gamma}{2(\gamma-a)}, & (\gamma \geq 0) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \leq \frac{n\gamma}{2(\gamma-a)}, & (0 \geq \gamma \geq \frac{a}{2}) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \leq \frac{n(\gamma-a)}{2\gamma}. & (\frac{a}{2} \geq \gamma > a) \end{cases} \quad (10)$$

が成立する。

(証明) $\delta = 2\gamma - a$ とおくと、 γ は a と δ の中点である。よって、

$$\frac{p(z)-a}{p(z)-\delta} = w(z) \quad \text{または} \quad p(z) = \frac{a - \delta w(z)}{1 - w(z)} \quad (11)$$

で $w(z)$ を定義する。簡単な計算により

$$1 - |w(z)|^2 = 1 - \left| \frac{p(z)-a}{p(z)-\delta} \right|^2 = \frac{4(\gamma - \operatorname{Re} p(z))(\gamma - a)}{|p(z)-\delta|^2} > 0$$

を得る。これは、

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p(z) < \gamma, \quad |z| < |z_0| &\Leftrightarrow |w(z)| < 1, \\ \operatorname{Re} p(z_0) = \gamma &\Leftrightarrow |w(z_0)| = 1 \end{aligned} \quad (12)$$

を示している。

一方、 $p(z)$ の仮定から $w(z) = b_n z^n + b_{n+1} z^{n+1} + \dots$ は U で正則で、かつ $w(z) \neq 1$ となる。よって、 $\max_{|z| \leq |z_0|} |w(z)| = |w(z_0)| = 1$ をみたし、補題1が適用される。

これより、 $\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} = m \in \mathbb{R}$ (実数) で、 $m \geq n$, $w(z_0) = e^{i\theta}$ (θ は実数で $\theta \neq 2k\pi$)

となる。また (11) を対数微分して

$$\frac{zp'(z)}{p(z)} = \frac{zw'(z)}{w(z)} \left(\frac{w(z)}{1-w(z)} - \frac{\delta w(z)}{a - \delta w(z)} \right), \quad (13)$$

$$\therefore \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = m \left(\frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} - \frac{\delta e^{i\theta}}{a - \delta e^{i\theta}} \right) \quad (14)$$

を得、 $\frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}$ となる。また、

$\operatorname{Re} \frac{\delta e^{i\theta}}{a - \delta e^{i\theta}}$ の最大値、最小値を調べて (計算は省略) まとめると、次のようになる。

$$\frac{a}{2} < 0 < \gamma \text{ のとき、} \operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \geq \frac{n\gamma}{2(\gamma - a)}, \quad (15)$$

$$\frac{a}{2} < \gamma < 0 \text{ のとき、} \operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \leq \frac{n\gamma}{2(\gamma - a)}, \quad (16)$$

$$a < \gamma < \frac{a}{2} \text{ のとき、} \operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \leq \frac{n(\gamma - a)}{2\gamma} \quad (17)$$

が得られる。 $\gamma = 0$ 、 $\gamma = \frac{a}{2}$ のときは別に吟味すればよい。 $\square$

注意 $\gamma = 0$ のときは、(15)、(16) により $\operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = 0$ となる。

等号は $p(z) = \frac{a - \delta \zeta^n}{1 - \zeta^n}$, $\zeta^n = e^{it} \left(\frac{z}{z_0} \right)^n$ (t は実定数) のとき成立している。

実際に応用する場合には $p(z) = \frac{a - \delta z^n}{1 - z^n}$ が極値関数として使われる。すなわち、

任意の $z \in U$ に対し、 $\operatorname{Re} p(z) < \gamma$ で、 $\operatorname{Re} p(z_0) = \gamma$, $|z_0| = 1$ となる。

3 主定理

定理 1 $f(z) \in \Sigma(p)$ で、 $-p < \beta$, $\gamma \geq 0$, $\alpha \geq 0$ かつ

$$\gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{p\gamma}{\gamma + p} \geq \beta \quad (18)$$

がみたされているとする。さらに、このとき

$$\operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)} \right) + (1-\alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} < \beta, \quad |z| < 1 \quad (19)$$

ならば、 $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma, \quad |z| < 1$ が成立する。

注意 一般には、 $f(z) \in \Sigma(p)$ に対し $p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$ 、が正則になる保証はない

が、除去可能のリーマンの定理と条件(19)により正則関数になる。

(証明) 準備のところで示したように、定理は簡単に

$$\operatorname{Re} F(z) < \beta, \quad |z| < 1 \implies \operatorname{Re} p(z) < \gamma, \quad |z| < 1$$

を示せばよい。

$F(0) = -p$, $p(0) = -p$ であつたから、 $-p < \beta$, $-p < \gamma$ は必要な条件で、しかもこれは仮定によりみたされている。すなわち、 $z=0$ の近傍では定理が成立していることを示す。

今、ある点 $z_0 \in U$ が存在して、 $|z| < |z_0|$ のとき $\operatorname{Re} p(z) < \gamma$ でかつ、 $\operatorname{Re} p(z_0) = \gamma$ が成立したとすると、補題2を $a = -p$, $n = p$ として適用する。(15) より

$$F(z_0) = p(z_0) + \alpha \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \quad \text{と} \quad \gamma > 0 \quad \text{のとき、} \quad \alpha > 0 \quad \text{で}$$

$$\operatorname{Re} F(z_0) \geq \gamma + \alpha \frac{p\gamma}{2(\gamma + p)} \geq \beta \quad \text{となり、仮定} \quad \text{任意の } z \in U \quad \text{に対して}$$

$\operatorname{Re} F(z) < \beta$ に反する。よって、このような $z_0 \in U$ は存在しないことになり、定理が成立する。また、 $\gamma = 0$ または $\alpha = 0$ の場合も成立している。 $\square$

また、同様にして次の結果が得られる。

定理 2 $f(z) \in \Sigma(p)$ とする。 $-p > \beta$, $\alpha \geq 0$ かつ

$$\operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)} \right) + (1-\alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \beta, \quad |z| < 1$$

がみたされているとする。さらに、このとき

$$(i) \quad 0 \geq \gamma \geq -\frac{p}{2} \quad \text{のとき、} \quad \gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{p\gamma}{\gamma + p} \leq \beta, \quad (20)$$

$$(ii) \quad -\frac{p}{2} \geq \gamma > -p \text{ のとき, } \gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{p(\gamma+p)}{\gamma} \leq \beta \quad (21)$$

ならば、 $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma, \quad |z| < 1$ が成立する。

定理 3 $f(z) \in \Sigma(p)$ とする。 $-p > \beta, \alpha \leq 0$ かつ

$$\operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)} \right) + (1-\alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \beta, \quad |z| < 1$$

がみたされているとする。 さらに、このとき $\gamma \geq 0$,

$$\gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{p\gamma}{\gamma+p} \leq \beta \quad (22)$$

ならば、 $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma, \quad |z| < 1$ が成立する。

定理 4 $f(z) \in \Sigma(p)$ で、 $-p < \beta, \alpha \leq 0$ かつ

$$\operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)} \right) + (1-\alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} < \beta, \quad |z| < 1$$

がみたされているとする。 さらに、このとき

$$(i) \quad 0 \geq \gamma \geq -\frac{p}{2} \text{ のとき, } \gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{p\gamma}{\gamma+p} \geq \beta, \quad (23)$$

$$(ii) \quad -\frac{p}{2} \geq \gamma > -p \text{ のとき, } \gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{p(\gamma+p)}{\gamma} \geq \beta \quad (24)$$

ならば、 $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma, \quad |z| < 1$ が成立する。

4 応用

定理1で $\alpha=1$ とおくと次を得る。

系 1 $f(z) \in \Sigma(p)$ に対して、 $\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} < 0, \quad |z| < 1$ がみたされるとき、

$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} < 0, \quad |z| < 1$ が成立する。 これは最良の結果である。

(系1の証明) 定理1で $\alpha = 1$ とおくと、 $f(z) = \frac{1}{z^p} + a_0 + a_1 z + \dots$ のとき、 $-p < \beta$,

$\gamma \geq 0$, で (18) 式の条件をみたし、 $\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)}\right) < \beta$, $|z| < 1$ なら、

$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma$, $|z| < 1$ が成立する。このとき、 $\beta = 0$ とおくと $\gamma \geq 0$ を得て $\gamma = 0$

となる。また、(18) 式で $\gamma = 0$ とおくと $0 \geq \beta > -p$ より $\beta = 0$ が最良となる。

関数 $f(z) = \frac{1}{z^p} - 2 + z^p = \frac{(1 - z^p)^2}{z^p}$ がその限界を保証する。このとき、

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = -p \cdot \frac{1 + z^p}{1 - z^p}, \quad 1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)} = -p \cdot \frac{1 + z^{2p}}{1 - z^{2p}} \quad \text{である。} \quad \square$$

注意　ここでいう最良とは、固定された β に対して γ の最小値が最良であるし、また、 γ が固定されたときは β の最大値が最良である。

次に、定理2で $\alpha = 1$ とおくことはできない。何故なら、(20)、(21)で $\alpha = 1$ のとき、 β 、 γ のみたす値は存在しないから。

定理 1、2、3、4で $p = 1$ とおくと、それぞれ次の定理となる。

定理 1' $f(z) \in \Sigma(1)$ で、 $-1 < \beta$, $\gamma \geq 0$, $\alpha \geq 0$ かつ

$$\gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma + 1} \geq \beta$$

がみたされているとする。さらに、このとき

$$\operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)}\right) + (1 - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} < \beta, \quad |z| < 1$$

ならば、 $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma$, $|z| < 1$ が成立する。

定理 2' $f(z) \in \Sigma(1)$ で、 $-1 > \beta$, $\alpha \geq 0$ かつ

$$\operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)}\right) + (1 - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \beta, \quad |z| < 1$$

がみたされているとする。さらに、このとき

$$(i) \quad 0 \geq \gamma \geq -\frac{1}{2} \text{ のとき, } \quad \gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma+1} \leq \beta,$$

$$(ii) \quad -\frac{1}{2} \geq \gamma > -1 \text{ のとき, } \quad \gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\gamma+1}{\gamma} \leq \beta$$

ならば、 $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma, \quad |z| < 1$ が成立する。

定理 3' $f(z) \in \Sigma(1)$ で、 $-1 > \beta, \gamma \geq 0, \alpha \leq 0$ かつ

$$\gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma+1} \leq \beta$$

がみたされているとする。さらに、このとき

$$\operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)} \right) + (1-\alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \beta, \quad |z| < 1$$

ならば、 $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma, \quad |z| < 1$ が成立する。

定理 4' $f(z) \in \Sigma(1)$ で、 $-1 < \beta, \alpha \leq 0$ かつ

$$\operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)} \right) + (1-\alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} < \beta, \quad |z| < 1$$

がみたされているとする。さらに、このとき

$$(i) \quad 0 \geq \gamma \geq -\frac{1}{2} \text{ のとき, } \quad \gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma+1} \geq \beta,$$

$$(ii) \quad -\frac{1}{2} \geq \gamma > -1 \text{ のとき, } \quad \gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\gamma+1}{\gamma} \geq \beta$$

ならば、 $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma, \quad |z| < 1$ が成立する。

定理 1' より定理 A が得られる。

系 2 定理 A が成立する。

(証明) 定理 1' で $\gamma = 0$ とおくと、 $-1 < \beta \leq 0, \alpha \geq 0$ のとき $\operatorname{Re} F(z) < \beta,$

$|z| < 1$ なら $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} < 0, \quad |z| < 1$ が成立する。よって、 $\beta = 0$ となる。 $\alpha < 0$ の

場合は ($\alpha \geq 0$ の場合も含めて) 次のようにして示せる。 $\gamma = 0$ のときは、

$$\operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = 0 \text{ だから、} \alpha \text{ の値に関係なく } \operatorname{Re} F(z_0) = \operatorname{Re} p(z_0) + \alpha \operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = 0$$

となり $\operatorname{Re} F(z) < \beta = 0$, $|z| < 1$ に反するからである。よって、証明された。□

系 3 定理 B が成立する。

定理 2' で γ を $-\beta$ とおけばよい。このとき、 $\alpha \geq 0$, $0 < \beta < 1$ で

$$(i) \quad 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2} \text{ のとき、} \quad -\beta - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta}{1-\beta} < -1,$$

$$(ii) \quad \frac{1}{2} \leq \beta < 1 \text{ のとき} \quad -\beta - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1-\beta}{\beta} < -1$$

は必要な条件である。特に、 $\beta = 0$ のときも成立していることに注意する。

系 4 $f(z) \in \Sigma(1)$ に対して、 $\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)}\right) < 0$, $|z| < 1$ がみたされるとき、

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} < 0, \quad |z| < 1 \text{ が成立する。これは最良の結果である。}$$

系 1 を証明したときと同様にすればよい。

関数 $f(z) = \frac{1}{z} - 2 + z = \frac{(1-z)^2}{z}$ がその極値関数となる。このとき、

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = -\frac{1+z}{1-z}, \quad 1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)} = -\frac{1+z^2}{1-z^2} \text{ である。}$$

参考文献

- [1] S. Fukui and K. Sakaguchi, An extension of a theorem of S. Ruscheweyh, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. Nat. Sci., 29(1980), 1-3.
- [2] A. Ikeda, On meromorphic α -starlike functions, 京都大学数理解析研究所講究録 1012, (1997), 20-24.
- [3] I. S. Jack, Functions starlike and convex of order α , J. London Math. Soc., (2)3 (1971), 469-474.
- [4] S. S. Miller and P. T. Mocanu, Second order differential inequalities in the complex plane, Journal of applications 65, (1978), 289-305.