

屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題

野場 啓 (京都大学理学研究科)

矢野 孝次 (京都大学理学研究科)

1 序

実数値確率過程 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ の脱出問題とは、その確率過程が区間 $[b, a]$ を脱出する時刻の分布を特徴づける問題のことを言う。この報告では Laplace 変換

$$\mathbb{E}\left(e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^-\right) \quad (1.1)$$

について考えたい。ただし、

$$\tau_a^+ = \tau_a^+(X) = \{t > 0 : X_t > a\}, \quad \tau_b^- = \tau_b^-(X) = \{t > 0 : X_t < b\} \quad (1.2)$$

はそれぞれ a, b の通過時刻を表している。

Kyprianou と Loeffen の論文 [2] では、spectrally negative な Lévy 過程 X に対して屈折 Lévy 過程を定義し、その脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度を、 X のスケール関数を用いて特徴づけている。彼らの屈折 Lévy 過程は定数 $c > 0$ と $\alpha > 0$ を含む確率微分方程式

$$U_t - U_0 = X_t - \alpha \int_0^t 1_{\{U_s > c\}} ds \quad (1.3)$$

の解として定義される。

Spectrally negative な Lévy 過程を保険会社の総資本とみなすことにより、その保険会社の破産リスクを評価することができる。そのため、spectrally negative な Lévy 過程は Lévy 保険危機過程と呼ばれることもある。Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程 U は、値 c を超えているときに分配金をレート α で払い続けるモデルを表している。

この報告では論文 [3] に基づき、Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程の一般化について述べる。具体的には、Lévy 測度が異なる二つの Lévy 過程 X, Y に対し、屈折 Lévy 過程 U を、値が正の時は X の、値が負の時は Y の挙動をする確率過程として構成する。そのために、確率微分方程式ではなく、周遊理論を用いる。そして U の脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度について述べる。

2 Spectrally negative な Lévy 過程

この章では $(X = \{X_t : t \geq 0\}, \mathbb{P}_x^X)$ を spectrally negative な Lévy 過程とする. このとき, Laplace 指数

$$\Psi_X(\lambda) := \log \mathbb{E}_0^X(e^{\lambda X_1}) \quad (2.1)$$

は $\lambda \geq 0$ で有限であることが知られている. Ψ_X の逆関数を $\theta \geq 0$ で

$$\Phi_X(\theta) = \sup\{\lambda \geq 0 : \Psi_X(\lambda) = \theta\} \quad (2.2)$$

と表すことにする. 特に, X の標本路が有界変動な場合は, Laplace 指数は

$$\Psi_X(\lambda) = \delta_X \lambda - \int_{(-\infty, 0)} (1 - e^{\lambda y}) \Pi_X(dy) \quad (2.3)$$

で与えられる. ただし, $\delta_X > 0$ であり, Lévy 測度 Π_X は $\Pi_X[0, \infty) = 0$ および $\int_{(-\infty, 0)} (1 \wedge |y|) \Pi_X(dy) < \infty$ を満たす. X の標本路が非有界変動な場合は, Laplace 指数は

$$\Psi_X(\lambda) = \gamma_X \lambda + \frac{\sigma_X^2}{2} \lambda^2 - \int_{(-\infty, 0)} (1 - e^{\lambda y} + \lambda y 1_{(-1, 0)}(y)) \Pi_X(dy) \quad (2.4)$$

で与えられる. ただし, $\gamma_X \in \mathbb{R}$, $\sigma_X \geq 0$ であり, Lévy 測度 Π_X は $\Pi_X[0, \infty) = 0$ および $\int_{(-\infty, 0)} (1 \wedge y^2) \Pi_X(dy) < \infty$ を満たす.

定義 2.1. $q \geq 0$ に対し, 関数 $W_X^{(q)} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を, $(-\infty, 0)$ 上では $W_X^{(q)} = 0$, $[0, \infty)$ では連続で, $\beta > \Phi_X(q)$ に対し

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W_X^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\Psi_X(\beta) - q} \quad (2.5)$$

を満たす関数として定義する. この関数をスケール関数と呼ぶ.

$W_X^{(q)}$ の基本的な性質を以下に述べる (詳しくは [1, Chapter 8] を見よ). $b < 0 < a$ を定数とし固定する. $b < x < a$ と $q \geq 0$ に対し,

$$\mathbb{E}_x^X \left(e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^- \right) = \frac{W_X^{(q)}(x - b)}{W_X^{(q)}(a - b)} \quad (2.6)$$

と

$$\mathbb{E}_x^X \left(e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \infty \right) = e^{-\Phi_X(q)(a-x)} \quad (2.7)$$

が成り立つ. X の標本路が有界変動なとき, $q \geq 0$ に対し,

$$W_X^{(q)}(0) = \frac{1}{\delta_X} \quad (2.8)$$

が成り立つ.

$x \in \mathbb{R}$ と非負可測関数 f に対し, X のポテンシャル測度を

$$R_X^{(q)} f(x) := \mathbb{E}_x^X \left(\int_0^\infty e^{-qt} f(X_t) dt \right) \quad (2.9)$$

と書くことにする. またポテンシャル測度に密度関数が存在するとき,

$$R_X^{(q)} f(x) = \int_{\mathbb{R}} r_X^{(q)}(x, y) f(y) dy \quad (2.10)$$

と書くことにする. $x \in [b, a]$ と非負可測関数 f に対し, X の (両側) 吸収壁ポテンシャル測度を

$$\overline{R}_X^{(q)} f(x) := \mathbb{E}_x^X \left(\int_0^{\tau_a^+ \wedge \tau_b^-} e^{-qt} f(X_t) dt \right) \quad (2.11)$$

と書くことにする. また吸収壁ポテンシャル測度に密度関数が存在するとき,

$$\overline{R}_X^{(q)} f(x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{r}_X^{(q)}(x, y) f(y) dy \quad (2.12)$$

と書くことにする. このとき, $y \in \mathbb{R}$ と $q \geq 0$ に対し,

$$r_X^{(q)}(x, y) = \Phi'_X(q) e^{-\Phi_X(q)(y-x)} - W_X^{(q)}(x - y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

$$\overline{r}_X^{(q)}(x, y) = \frac{W_X^{(q)}(x - b) W_X^{(q)}(a - y)}{W_X^{(q)}(a - b)} - W_X^{(q)}(x - y), \quad x \in [b, a] \quad (2.14)$$

と与えられる.

定理 2.2 (see, e.g., [1, Theorem 10.1]). $x > 0$, $q \geq 0$ と非負可測関数 f に対し,

$$\mathbb{E}_x^X \left(e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) : \tau_0^- < \infty, X_{\tau_0^-} < 0 \right) = \int_{(-\infty, 0) \times (0, \infty)} f(u, v) G_X^{(q)}(x, du, dv) \quad (2.15)$$

が成り立つ. ただし,

$$G_X^{(q)}(x, du, dv) := \left(e^{-\Phi_X(q)v} W_X^{(q)}(x) - W_X^{(q)}(x - v) \right) \Pi_X(du - v) dv \quad (2.16)$$

である.

測度 $G_X^{(q)}$ は **Gerber–Shiu 測度** と呼ばれている. 次の補題は上側吸収壁の場合の Gerber–Shiu 測度を特徴づける.

補題 2.3 ([3]). $0 < x < a$, $q \geq 0$ と非負可測関数 f に対し,

$$\mathbb{E}_x^X \left(e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) : \tau_0^- < \tau_a^+, X_{\tau_0^-} < 0 \right) = \int_{(-\infty, 0) \times (0, \infty)} f(u, v) J_X^{(q)}(a, du, dv) \quad (2.17)$$

が成り立つ. ただし

$$J_X^{(q)}(a, du, dv) := \left(\frac{W_X^{(q)}(x) W_X^{(q)}(a - v)}{W_X^{(q)}(a)} - W_X^{(q)}(x - v) \right) \Pi_X(du - v) dv \quad (2.18)$$

を満たす.

3 周遊測度の性質

X を非有界変動な標本路を持ち, Gaussian part を持たない spectrally negative な Lévy 過程とする. この時,

$$T_0 = T_0(X) = \inf\{t > 0 : X_t = 0\} \quad (3.1)$$

とおくと,

$$\tau_0^- < T_0 \leq \infty \quad \text{or} \quad \tau_0^- = T_0 = \infty, \quad n^X\text{-a.e.} \quad (3.2)$$

が成り立つ. またこのとき, X について 0 は正則であるので, 0 を離れる周遊測度 n^X が対応する. この報告では, 周遊測度 n^X に対し, 次の規格化条件を課す:

$$n^X(1 - e^{-qT_0}) = \frac{1}{r_X^{(q)}(0, 0)} = \frac{1}{\Phi_X'(q)} = \Psi_X'(\Phi_X(q)). \quad (3.3)$$

定理 3.1 ([3]). $a > 0$ と $q \geq 0$ に対し,

$$n^X \left(e^{-q\tau_a^+} : \overline{X} > a \right) = \frac{1}{W_X^{(q)}(a)} \quad (3.4)$$

が成り立つ. 特に,

$$n^X(\overline{X} > a) = \frac{1}{W_X(a)} \quad (3.5)$$

が成り立つ. ただし, $W_X := W_X^{(0)}$ である.

この定理の証明は, n^X の強 Markov 性を用いてなされる.

補題 3.2 ([5], [3]). $q \geq 0$ と非負可測関数 f に対し,

$$n^X \left(e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) : \tau_0^- < \infty \right) = \int_{(-\infty, 0) \times (0, \infty)} f(u, v) K_X^{(q)}(du, dv) \quad (3.6)$$

が成り立つ。ただし,

$$K_X^{(q)}(du, dv) = e^{-\Phi_X(q)v} \Pi_X(du - v) dv \quad (3.7)$$

である。

$K_X^{(q)}$ は周遊測度 n^X に対する Gerber–Shiu 測度に相当するものである。この補題は [5] で先に得られているが, [3] では本質的に違う証明を与えた。[3] での証明は, 定理 2.2, 定理 3.1 および n^X の強 Markov 性を用いてなされる。

補題 3.3 ([5], [3]). $a > 0, q \geq 0$ と非負可測関数 f に対し,

$$n^X \left(e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) : \tau_0^- < \tau_a^+ \right) = \int_{(-\infty, 0) \times (0, \infty)} f(u, v) \bar{K}_X^{(q)}(du, dv) \quad (3.8)$$

が成り立つ。ただし,

$$\bar{K}_X^{(q)}(du, dv) := \frac{W_X^{(q)}(a - v)}{W_X^{(q)}(a)} \Pi_X(du - v) dv \quad (3.9)$$

である。

この補題も [5] で先に得られている。[3] の証明は, 補題 3.2, 定理 3.1 および n^X の強 Markov 性を用いてなされる。

補題 3.4 ([4], [3]). $q \geq 0$ と非負可測関数 f に対し,

$$n^X \left(\int_0^{\tau_0^- \wedge T_0} e^{-qt} f(X_t) dt \right) = \int_0^\infty e^{-\Phi_X(q)y} f(y) dy \quad (3.10)$$

が成り立つ。

この等式は定数倍の不定性を除いて [4] で得られている。[3] での証明は, 補題 3.2, 定理 3.1 および n^X の強 Markov 性を用いてなされる。

4 Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程

定数 $\alpha > 0$ を固定し, $(X = \{X_t : t \geq 0\}, \mathbb{P}_x^X)$ を spectrally negative な Lévy 過程とする。Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程 (を平行移動したもの) は確率微分方程式

$$U_t - U_0 = X_t - \alpha \int_0^t 1_{\{U_s > 0\}} ds \quad (4.1)$$

の解によって与えられる. この確率微分方程式の解 U は, 正の値をとるとき X の挙動を, 負の値をとるとき $Y_t := X_t - \alpha t$ の挙動をすることがわかる. X の標本路が有界変動なときは, $0 < \alpha < \delta_X$ を仮定する.

定理 4.1 ([2]). 任意の初期値に対し, 確率微分方程式 (4.1) は一意的な強解を持つ.

ここで, $x, y \in \mathbb{R}$ と $q \geq 0$ に対し,

$$w^{(q)}(x; y) := W_X^{(q)}(x - y) + \alpha 1_{(x \geq 0)} \int_0^x W_Y^{(q)}(x - z) W_X^{(q)'}(z - y) dz, \quad (4.2)$$

とする.

定理 4.2 ([2]). $x \in [b, a]$ と $q \geq 0$ に対し,

$$\mathbb{E}_x^U \left(e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^- \right) = \frac{w^{(q)}(x; b)}{w^{(q)}(a; b)} \quad (4.3)$$

が成り立つ.

定理 4.3 ([2]). $x \in [b, a]$ と $q > 0$ に対し,

$$\bar{r}_U^{(q)}(x, y) = \begin{cases} \frac{w^{(q)}(x; b)}{w^{(q)}(a; b)} W_Y^{(q)}(a - y) - W_Y^{(q)}(x - y) & y \in (0, a] \\ \frac{w^{(q)}(x; b)}{w^{(q)}(a; b)} w^{(q)}(a; y) - w^{(q)}(x; y) & y \in [b, 0] \end{cases} \quad (4.4)$$

が成り立つ.

系 4.4 ([2]). $x \in \mathbb{R}$ と $q > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} & r_U^{(q)}(x, y) \\ &= \begin{cases} \left(e^{\Phi_X(q)x} + \alpha \Phi_X(q) 1_{(x \geq 0)} \int_0^x W_Y^{(q)}(x - z) e^{\Phi_X(q)z} dz \right) \\ \quad \times \frac{\Phi_Y(q) - \Phi_X(q)}{\alpha \Phi_X(q)} e^{-\Phi_Y(q)y} - W_Y^{(q)}(x - y) & y > 0 \\ \left(e^{\Phi_X(q)x} + \alpha \Phi_X(q) 1_{(x \geq 0)} \int_0^x W_Y^{(q)}(x - z) e^{\Phi_X(q)z} dz \right) \\ \quad \times \frac{\Phi_Y(q) - \Phi_X(q)}{\Phi_X(q)} \int_0^\infty e^{-\Phi_Y(q)z} W_X^{(q)'}(z - y) dz - w^{(q)}(x; y) & y \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

が成り立つ.

5 屈折 Lévy 過程の一般化

$(X = \{X_t : t \geq 0\}, \mathbb{P}_x^X), (Y = \{Y_t : t \geq 0\}, \mathbb{P}_x^Y)$ を spectrally negative な Lévy 過程とする. この章では, Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程を一般化したい. 具体的には, 正の値をとるとき X の挙動を, 負の値をとるとき Y の挙動をする確率過程 U を定義したい. ただ

し, この報告では X の標本路が非有界変動であり, Gaussian part を持たない場合のみ考える. 周遊測度 n^U を, 非負可測汎関数 F に対し,

$$n^U \left(F \left((U_t)_{t < \tau_0^-}, (U_{t+\tau_0^-})_{t \geq 0} \right) \right) = n^X \left(\mathbb{E}_x^Y (F(w, (Y_t)_{t \geq 0})) \Big|_{\substack{x=X(\tau_0^-) \\ w=(X_t: t < \tau_0^-)}} \right) \quad (5.1)$$

で定義する. 周遊理論を用いて n^U に対応する 0 での停留がない強 Markov 過程 U を (一般化) 屈折 Lévy 過程と呼ぶ.

定理 5.1 ([3]). $q > 0$ と非負可測関数 f に対し, U の原点出発ポテンシャル測度は

$$R_U^{(q)} f(0) = \frac{1}{q} \frac{\int_0^\infty e^{-\Phi_X(q)y} f(y) dy + \int_{(-\infty, 0) \times (0, \infty)} R_{Y^0}^{(q)} f(u) K_X^{(q)}(du, dv)}{\int_0^\infty e^{-\Phi_X(q)y} dy + \int_{(-\infty, 0) \times (0, \infty)} R_{Y^0}^{(q)} 1(u) K_X^{(q)}(du, dv)} \quad (5.2)$$

で与えられる. また, これを用いて, 原点以外を出発するポテンシャル測度は

$$R_U^{(q)} f(x) = R_{Y^0}^{(q)} f(x) + e^{\Phi_Y(q)x} R_U^{(q)} f(0), \quad x < 0 \quad (5.3)$$

および

$$R_U^{(q)} f(x) = \underline{R}_X^{(0,q)} f(x) + \int_{(-\infty, 0) \times (0, \infty)} R_U^{(q)} f(u) G_X^{(q)}(x, du, dv), \quad x > 0 \quad (5.4)$$

と表される. ただし, $\underline{R}_X^{(0,q)} f(x)$ は X に対し原点を下側吸収壁とするポテンシャル測度

$$\underline{R}_X^{(0,q)} f(x) = \mathbb{E}_x^X \left(\int_0^{\tau_0^-} e^{-qt} f(X_t) dt \right) \quad (5.5)$$

とする.

定理 5.1 の証明は, (5.2) が本質的であるが, その証明は, 周遊点過程の補正定理を用いて周遊測度の形に書き直した後, 補題 3.2 や補題 3.4 および n^X の強 Markov 性を用いてなされる.

6 屈折 Lévy 過程の脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度

まず最初に, 一般の標準過程に関する補題を述べる.

補題 6.1 ([3]). Z を正のジャンプを持たず, 0 について正則であり, 0 での停留がない標準過程とする. この時 $a > 0 > b$ と $q \geq 0$ に対し,

$$\mathbb{E}_0^Z \left(e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^- \right) = \frac{n^Z \left(e^{-q\tau_a^+} : \bar{Z} > a \right)}{n^Z \left(1 - e^{-qT_0} 1_{\{\bar{Z} \leq a, \underline{Z} \geq b\}} \right)} \quad (6.1)$$

が成り立つ。ただし、 n^Z は Z の 0 を離れる周遊測度を表し、

$$\underline{Z} = \inf_{s \geq 0} Z_s, \quad \overline{Z} = \sup_{s \geq 0} Z_s \quad (6.2)$$

とする。

$q = 0$ の証明を述べる。周遊点過程において、 a より上に到達する周遊路が、 a より上に到達せず b より下に到達する周遊路より先に現れる確率を考えればよい。よって、 $A := \{\overline{Z} > a\}$, $B := \{\overline{Z} \leq a, \underline{Z} < b\}$ としたとき、

$$\mathbb{P}_0^Z(\tau_a^+ < \tau_b^-) = \mathbb{P}_0^Z(\lambda_A < \lambda_B) = \frac{n^Z(A)}{n^Z(A) + n^Z(B)} = \frac{n^Z(\overline{Z} > a)}{n^Z(1 - 1_{\{\overline{Z} \leq a, \underline{Z} \geq b\}})} \quad (6.3)$$

が成り立つ。ただし、 λ_A, λ_B はそれぞれ周遊点過程が A, B に属する周遊路をとるパラメタの下限を表す。 $q > 0$ の時の証明は以下のように与える。 η を逆局所時間とし、 ϵ_* を $\lambda_{A \cup B}$ での周遊路とすると、

$$\mathbb{E}_0^Z(e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^-) = \mathbb{E}_0^Z(e^{-q\eta(\lambda_{A \cup B})} e^{-q\tau_a^+(\epsilon_*)}) \quad (6.4)$$

と表され、周遊測度の性質を用いて計算を進める。

定理 6.2 ([3]). $x \in [b, a]$ と $q \geq 0$ に対し、

$$\mathbb{E}_x^U(e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^-) = \frac{V_U^{(q)}(b, x)}{V_U^{(q)}(b, a)} \quad (6.5)$$

が成り立つ。ただし、

$$V_U^{(q)}(b, x) = \begin{cases} W_X^{(q)}(x)W_Y^{(q)}(-b)(\Psi_X'(0) \vee 0) \\ \quad + \int_{(-\infty, 0) \times (0, \infty)} (W_X^{(q)}(x)W_Y^{(q)}(-b)e^{\Phi_Y(0)u} \\ \quad - W_Y^{(q)}(u-b)W_X^{(q)}(x-v))K_X(du, dv), & x \in (0, a] \\ W_Y^{(q)}(x-b), & x \in [b, 0] \end{cases} \quad (6.6)$$

$$K_X(du, dv) := \Pi_X(du - v)dv \quad (6.7)$$

である。

$x = 0$ の時が本質的であるが、その証明は補題 6.1 を用いて周遊測度の形に書き直し、定理 3.1, 補題 3.2 および n^X の強 Markov 性を用いて計算すればよい。

定理 6.3. $x \in [a, b]$ および $q \geq 0$ に対し、

$$\bar{r}_U^{(q)}(x, y) = \begin{cases} \frac{V_U^{(q)}(b, x)}{V_U^{(q)}(b, a)} W_X^{(q)}(a - y) - W_X^{(q)}(x - y), & y \in (0, a] \\ \frac{V_U^{(q)}(b, x)}{V_U^{(q)}(b, a)} V_U^{(q)}(y, a) - V_U^{(q)}(y, x), & y \in [b, 0] \end{cases} \quad (6.8)$$

が成り立つ。

$x = 0$ の時が本質的であるが, その証明は周遊点過程の補正定理を用いて周遊測度の形に書き直し, 定理 3.1, 補題 3.2 および n^X の強 Markov 性を用いてなされる.

参考文献

- [1] A. E. Kyprianou. Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Second edition. Universitext, Springer, 2014.
- [2] A. E. Kyprianou and R. L. Loeffen. Refracted Lévy processes. Ann. Inst. Henri Poincaré. 26(2010), 24–44.
- [3] K. Noba and K. Yano. Generalized refracted Lévy process and its application to exit problem. in preparation.
- [4] J. C. Pardo, J. L. Pérez, and V. Rivero. The excursion measure away from zero for spectrally negative Lévy processes. arXiv:1507.05225.
- [5] J. C. Pardo, J. L. Pérez, and V. Rivero. Lévy insurance risk processes with parisian type severity of debt. arXiv:1507.07255.