

Fiber 中の trivial points の位相的性質

新潟大学大学院 自然科学研究科 石井 隆 (TAKASHI ISHII)

1 序論

D. Suárez [9] は単位開円板 D 上の有界正則関数からなる関数環 H^∞ の極大イデアル空間 $M(H^\infty)$ の trivial points の集合 Γ が totally disconnected (以下、T.D. と略す。) であることを証明した。さらに Γ が extremely disconnected (以下、E.D. と略す。) までいえるかという問題を提起している。この問題に対して、T. Ishii and K. Izuchi[10] により、 Γ が E.D. ではないことが証明され、これについては、関数環論研究集会 (97 年、防衛大) で報告したので、ここでは、とくに、 Γ をひとつの Fiber の中に制限した集合 $\Gamma_\lambda (\equiv \Gamma \cap M_\lambda)$ について報告する。

2 準備と背景

$D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, $H^\infty = \{D \text{ 上の有界正則関数全体} \}$

$M(H^\infty) = \{ \text{恒等的に 0 でない } H^\infty \text{ 上の複素準同型写像全体} \}$ とする。

$f \in H^\infty$ に対して、その Gelfand 変換 $\hat{f}$ は

$$\hat{f}(m) = m(f) \quad (m \in M(H^\infty))$$

と定義される。このとき、 $\hat{f}$ は $M(H^\infty)$ 上の関数で weak *-topology に関して連続関数になる。また、 $M(H^\infty)$ は compact Hausdorff 空間であり、 $\hat{H}^\infty = \{\hat{f}; f \in H^\infty\}$ は $M(H^\infty)$ 上で定義された関数環となる。 $H^\infty \cong \hat{H}^\infty$ (isometry isomorphism) であることが容易にわ

かり、 H^∞ と $\hat{H}^\infty$ を同一視して考える。また、 $M(L^\infty) \subset M(H^\infty)$ であり、 H^∞ の Silov boundary は $M(L^\infty)$ と同一視できる。

さて、 Γ の位相構造を調べるにあたり、いくつかの定義を設ける。 $x, y \in M(H^\infty)$ に対して pseudo hyperbolic distance を

$$\rho(x, y) = \sup \{ |f(y)|; f \in H^\infty, \|f\|_\infty = 1, f(x) = 0 \}.$$

と定義する。

$P(x) = \{y \in M(H^\infty); \rho(x, y) < 1\}$ と定義して $P(x)$ を Gleason part と呼ぶ。

$x \in M(H^\infty)$ の点が trivial point であるとは、 $P(x) = \{x\}$ となるときをいう。そして、 $\Gamma \equiv \{x \in M(H^\infty); P(x) = \{x\}\}$ と定義する。 Γ は $M(H^\infty)$ の closed set になっている [7]。また、 $M(L^\infty) \subset \Gamma$ [4, p.402] である。

定理 2.1 ([3, p.18]) $M(L^\infty)$ は E.D. である。すなわち、任意の開集合の閉包は開集合である。

そこで、

問題： $\Gamma(\cap M(L^\infty))$ は E.D. か？

序論でも触れたように、これは D. Suárez によって提起されたものであるが、D. Suárez は Γ が T.D. すなわち、 Γ が closed-open basis を持つことを証明している。($M(H^\infty)$ は compact Hausdorff 空間だから、E.D. ならば T.D. であるが、逆は、成立しない。) この問題に対して、我々は、否定的解答を得た。

定理 2.2 Γ は E.D. ではない。

ここで、この定理の証明で重要な役割を担う集合を定義しておく。 $\lambda \in \partial D$ に対して、

$$M_\lambda \equiv \{x \in M(H^\infty) \setminus D; z(x) = \lambda\}, \quad \Gamma_\lambda \equiv \{x \in \Gamma; z(x) = \lambda\} = M_\lambda \cap \Gamma$$

(注) M_λ を $\lambda \in \partial D$ における fiber という。 M_λ は $M(H^\infty)$ の closed set であるから、 Γ_λ は Γ の closed set である。

$$\mathcal{I}_\lambda \equiv \{q; \text{inner function で } \partial D \setminus \{\lambda\} \text{ に連続拡張可能なもの}\}$$

$$A_\lambda = \{x \in M(H^\infty) \setminus D; |q(x)| < 1 \text{ for some } q \in \mathcal{I}_\lambda\}$$

(注) A_λ は $M(H^\infty) \setminus D$ の open set である。 $A_\lambda \cap M_\zeta = \emptyset (\forall \zeta \in \partial D, \zeta \neq \lambda)$,

$A_\lambda \subset M(H^\infty) \setminus D = \bigcup_{|\zeta|=1} M_\zeta$ であることから、 $A_\lambda \subset M_\lambda$ である。

補題 2.3 $\{z_n\}_n \subset D$, $z_n \rightarrow \lambda$, $\sum_{n=1}^\infty (1 - |z_n|) < \infty$, とする。

このとき、 $\forall x \in \overline{\{z_n\}_n} \setminus \{z_n\}_n$ に対して、 $\overline{P(x)} \subset A_\lambda$ である。

証明 $\{p_n\} \subset \mathbb{N}$ $p_n \rightarrow \infty$, $\sum_{n=1}^\infty p_n(1 - |z_n|) < \infty$ を満たす自然数列がとれる。そこで、

$$B(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(\frac{-\bar{z}_n}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right)^{p_n}, \quad z \in D$$

と定義すると、 $B(z)$ は広義一様収束し、Blaschke product となる。このとき、

$$B(z) = B_1(z)B_2(z) \cdots B_j(z) \cdots$$

$$(\text{ここで、} B_j(x) = 0 \quad \text{for} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in \overline{\{z_n\}_n} \setminus \{z_n\}_n)$$

と分解できる。このとき、 $B = 0$ on $\overline{P(x)}$ for $\forall x \in \overline{\{z_n\}_n} \setminus \{z_n\}_n$ となる。([7, Lemma 2.3]) 従って、 $\overline{P(x)} \subset A_\lambda$ が示された。

補題 2.4 (i) $A_\lambda \cap \Gamma_\lambda$ は、 Γ の 空でない open subset である。

(ii) $A_\lambda \cap \Gamma_\lambda$ は Γ_λ の proper subset である。

証明 (i) [1] より、 $\overline{P(x)} \cap \Gamma \neq \emptyset$ ($\forall x \in M(H^\infty)$) である。

一方、補題 2.3 より、 $\overline{P(x)} \subset A_\lambda$ ($\forall x \in \overline{\{z_n\}_n} \setminus \{z_n\}_n$) したがって、 $A_\lambda \cap \Gamma_\lambda = A_\lambda \cap (M_\lambda \cap \Gamma) = (A_\lambda \cap M_\lambda) \cap \Gamma = A_\lambda \cap \Gamma \neq \emptyset$

また、 $A_\lambda \cap \Gamma$ は Γ の open set であるから、 $A_\lambda \cap \Gamma_\lambda$ は Γ の open set である。

(ii) 任意の inner function q に対して、 $|q(x)| = 1$ ($\forall x \in M(L^\infty)$) であるから、 $x \notin A_\lambda$ である。よって、 $A_\lambda \cap M(L^\infty) = \emptyset$ であるが、一方、 $M(L^\infty) \subset \Gamma$ であることより、 $A_\lambda \cap \Gamma \subsetneq \Gamma$ となる。すなわち、 $A_\lambda \cap \Gamma_\lambda = A_\lambda \cap (M_\lambda \cap \Gamma) = M_\lambda \cap (A_\lambda \cap \Gamma) \subsetneq M_\lambda \cap \Gamma = \Gamma_\lambda$ 。□

定理 2.5 $\overline{A_\lambda \cap \Gamma_\lambda} = \Gamma_\lambda$

証明 $\overline{A_\lambda \cap \Gamma_\lambda} \supset \Gamma_\lambda$ を示せばよい。 $x_0 \in \Gamma_\lambda$, x_0 の近傍 V を任意にとる。

この V に対して、さらに、次のような近傍がとれる。

$$x_0 \in W \equiv \left\{ x \in M(H^\infty); \sum_{j=0}^k |f_j(x) - f_j(x_0)| \leq \varepsilon \right\} \subset V$$

ここで、 $f_0(z) = z$ である。corona 定理より、次のようなネットがとれる。

$$\{z_\alpha\}_\alpha \in W \cap D \text{ such that } z_\alpha \rightarrow x_0.$$

$P(x_0) = \{x_0\}$ なので、 $\forall f \in H^\infty$ and $0 < \forall r < 1$ に対して、

$$f \circ L_{z_\alpha} \rightarrow_\alpha f(x_0) (\text{const.}) \text{ uniformly on } D_r = \{z \in D; |z| \leq r\},$$

したがって、

$$\sum_{j=0}^k |f_j \circ L_{z_\alpha} - f_j(x_0)| \xrightarrow{\alpha} 0 \text{ uniformly on } D_r.$$

$f_0(z) = z$ としておいたから、interpolating sequence $\{w_n\}_n \subset \{z_\alpha\}_\alpha$ をとって、 $w_n \rightarrow \lambda$ とできて、

$$\sum_{j=0}^k |f_j \circ L_{w_n} - f_j(x_0)| \rightarrow 0 \quad \text{uniformly on } D_r \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

となる。 $y \in \overline{\{w_n\}_n} \setminus \{w_n\}_n$ とすると、 $P(y) \neq \{y\}$ であり、 $P(y) \subset M_\lambda$ である。よって、 $f_j \circ L_y = f_j(x_0)$ on D_r ($0 \leq \forall j \leq k$.) $f_j \circ L_y \in H^\infty$ なので、 $f_j \circ L_y = f_j(x_0)$ on D すなわち、 $f_j = f_j(x_0)$ on $P(y)$

したがって、 $f_j = f_j(x_0)$ on $\overline{P(y)}$ ($0 \leq \forall j \leq k$.)

よって、 x_0 の近傍のとり方から、 $\overline{P(y)} \subset V$ 。また、補題 2.3. より、 $\overline{P(y)} \subset A_\lambda$ 。

ここで、[1, cororally] より、 $\overline{P(y)} \cap \Gamma \neq \emptyset$ ($\forall y \in M(H^\infty)$) である。以上より、 $(A_\lambda \cap \Gamma_\lambda) \cap V = (A_\lambda \cap \Gamma) \cap V \neq \emptyset$ 。

x_0 の任意の近傍が $A_\lambda \cap \Gamma_\lambda$ と共有点をもつので、 $x_0 \in \overline{A_\lambda \cap \Gamma_\lambda}$ 。□

定理 2.2 の証明 Γ_λ は Γ の closed set なので、 $\Gamma \setminus \Gamma_\lambda$ は Γ の open set である。 $A_\lambda \cap \Gamma_\lambda, \Gamma \setminus \Gamma_\lambda$ はどちらも Γ の空でない proper な open set である。このとき、定理 2.5. より、

$$\overline{A_\lambda \cap \Gamma_\lambda} \cap \overline{\Gamma \setminus \Gamma_\lambda} = \Gamma_\lambda \cap \overline{\Gamma \setminus \Gamma_\lambda} \neq \emptyset. \text{ 従って、} \overline{A_\lambda \cap \Gamma_\lambda}, \overline{\Gamma \setminus \Gamma_\lambda} \text{ の少なくともどちらか一方は}$$

open set ではない。すなわち、 Γ は E.D. ではない。□

3 Γ_λ の位相構造

一般に、位相空間 X が T.D. であるとき、その部分空間は T.D. である。このことは、E.D. については成立しない。例えば、 $M(L^\infty)$ は E.D. であるが、 $M(L^\infty)$ とひとつの fiber M_λ との共通部分 $M(L^\infty) \cap M_\lambda$ は E.D. ではないことが知られている [6, p171]。従って、 $\Gamma_\lambda (\equiv \Gamma \cap M_\lambda)$ が E.D. であるか否かは興味深い。

定理 3.1 Γ_λ は $E.D.$ ではない。

これを証明するために、準備から始める。 $\{z_n\}_n \subset D$ such that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n: n \neq k} \left| \frac{z_n - z_k}{1 - \bar{z}_k z_n} \right| = 1,$$

を考え、これを sparse sequence という。ここでは、 $z_n \rightarrow \lambda (\in \partial D)$ as $n \rightarrow \infty$. となるものを考える。そして、 b を $\{z_n\}_n$ を零点に持つ Blaschke product すると、 $b \in \mathcal{I}_\lambda$ となる。

そして、[5] より

$$(3-1) \quad \{x \in M(H^\infty) \setminus D; |b(x)| < 1\} = \bigcup \{P(x); x \in \overline{\{z_n\}_n} \setminus \{z_n\}_n\}$$

であることが知られている。また、 $b(M(L^\infty) \cap \Gamma_\lambda) = b(\Gamma_\lambda) = \partial D$. そこで、次のような集合を定義する。

$$M_{\lambda, \zeta} = \{x \in M_\lambda; b(x) = \zeta, \zeta \in \partial D\} \quad \Gamma_{\lambda, \zeta} = M_{\lambda, \zeta} \cap \Gamma_\lambda.$$

このとき、 $\Gamma_{\lambda, \zeta}$ は空でない Γ_λ の closed subset である。また、 $\Gamma_\lambda = \bigcup \{\Gamma_{\lambda, \zeta}; \zeta \in \partial D\}$ であり、 $\Gamma_{\lambda, \zeta_1} \cap \Gamma_{\lambda, \zeta_2} = \emptyset$ ($\zeta_1 \neq \zeta_2$) である。

$$(3-2) \quad \mathcal{I}_{\lambda, \zeta} = \{q \in \mathcal{I}_\lambda; |q| = 1 \text{ on } M_{\lambda, \xi} \text{ for every } \xi \in \partial D, \xi \neq \zeta\}$$

さらに、

$$(3-3) \quad A_{\lambda, \zeta} = \{x \in M_\lambda; |q(x)| < 1 \text{ for some } q \in \mathcal{I}_{\lambda, \zeta}\}.$$

とすると、 $A_{\lambda, \zeta} \subset M_{\lambda, \zeta}$ 、 $A_{\lambda, \zeta}$ は M_λ の open subset であり、従って、

$$(3-4) \quad A_{\lambda, \zeta} \cap \Gamma_{\lambda, \zeta} \text{ は } \Gamma_\lambda \text{ の open subset である。}$$

補題 3.2 $\{w_n\}_n$ を $w_n \rightarrow \lambda$ and $b(w_n) \rightarrow \zeta (\in \partial D)$ as $n \rightarrow \infty$. となる sparse sequence とする。このとき、Blaschke product $B \in \mathcal{I}_{\lambda, \zeta}$ で $B = 0$ on $P(y) (\forall y \in \overline{\{w_n\}_n} \setminus \{w_n\})$ となるものが存在する。従って、 $\overline{P(y)} \subset A_{\lambda, \zeta} (\forall y \in \overline{\{w_n\}_n} \setminus \{w_n\})$ となる。

証明 $w_n \rightarrow \lambda, b(w_n) \rightarrow \zeta$ as $n \rightarrow \infty$, であるから、

$$z(y) = \lambda \text{ and } b(y) = \zeta \text{ for } y \in \overline{\{w_n\}_n} \setminus \{w_n\}_n.$$

$\|b\|_\infty = 1$ より、 $z = \lambda$ and $b = \zeta$ on $P(y)$ for $y \in \overline{\{w_n\}_n} \setminus \{w_n\}_n$. 従って、

$$(3-5) \quad P(y) \subset M_{\lambda, \zeta} \text{ for every } y \in \overline{\{w_n\}_n} \setminus \{w_n\}_n.$$

q を $\{w_n\}_n$ を零点に持つ Blaschke product とする。(3-1) より、次のことが成立する。

$$\{y \in M(H^\infty) \setminus D; |q| < 1\} = \bigcup \{P(y); y \in \overline{\{w_n\}_n} \setminus \{w_n\}_n\}.$$

従って、(3-5) より、

$$(3-6) \quad |q| = 1 \text{ on } M(H^\infty) \setminus M_{\lambda, \zeta}.$$

そこで、 $u = (|z + \lambda| + |b + \zeta|)/4$ on $M(H^\infty)$. とおくと、

$$(3-7) \quad M_{\lambda, \zeta} = \{x \in M(H^\infty); u(x) = 1\}.$$

となる。 $\{r_n\}_n \subset \mathbb{N}$ を $0 < r_n < 1, r_n \rightarrow 1$ となる自然数列として、 $D_n = \{z \in D; u(z) \leq r_n\}$. とおくと、 $D_n \subset D_{n+1}$. (3-7) と corona 定理より、

$$(3-8) \quad M(H^\infty) \setminus M_{\lambda, \zeta} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{D_n} \setminus D_n).$$

$\{\varepsilon_n\}_n \subset \mathbb{N}$ を

$$(3-9) \quad 0 < \varepsilon_n < 1 \text{ and } \prod_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n > 0.$$

を満たす自然数列とする。 q_k を次で定義する。

$$q_k(z) = \prod_{j=k}^{\infty} \frac{-\overline{w_j}}{|w_j|} \frac{z - w_j}{1 - \overline{w_j}z}, \quad z \in D$$

各 n に対して、次のような整数 N_n がとれることを示す。

$$(3-10) \quad |q_{N_n}| \geq \varepsilon_n \text{ on } D_n.$$

(3-6) と (3-8) により,

$$|q| = 1 \text{ on } \overline{D_n} \setminus D_n$$

そして、 D の compact subset E_n で

$$(3-12) \quad |q| \geq \varepsilon_n \text{ on } \overline{D_n} \setminus E_n.$$

となるものがとれる。 $|q_k| \rightarrow 1$ (uniformly on E_n as $k \rightarrow \infty$) であるから、

$$(3-13) \quad |q_{N_n}| \geq \varepsilon_n \text{ on } E_n.$$

を満たす整数 N_n がとれる。(3-12) と (3-13) より, (3-10) を得る。 N_n をとりなおせば、

$N_n < N_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) としてよい。そして、

$$(3-14) \quad B = \prod_{n=1}^{\infty} q_{N_n}$$

は Blaschke product となる。しかも、

$$(3-15) \quad B \in \mathcal{I}_{\lambda, \zeta}.$$

であることを示そう。

$$(3-16) \quad |B| = 1 \text{ on } \overline{D_n} \setminus D_n (\forall n \in \mathbb{N})$$

を示せば、(3-2), (3-8) より、(3-15) を得るから、(3-16) を示す。 $0 < \varepsilon < 1$ を任意にとる。

(3-9) より、正整数 $p (\geq n)$ で、 $\varepsilon \leq \prod_{j=p}^{\infty} \varepsilon_j$ であるものがとれる。(3-10) より、 $|\prod_{j=p}^{\infty} q_{N_j}| \geq \varepsilon$ on D_n であるから $|\prod_{j=p}^{\infty} q_{N_j}| \geq \varepsilon$ on $\overline{D_n} \setminus D_n$ よって、(3-11) より、 $|B| = |\prod_{j=p}^{\infty} q_{N_j}| \geq \varepsilon$ on $\overline{D_n} \setminus D_n$ すなわち、(3-15) がわかる。最後に、 $y \in \overline{\{w_n\}_n} \setminus \{w_n\}_n$ とする。 $q(y) = 0$ なので、(3-5) より、 $P(y) \subset M_{\lambda, \zeta}$ である。 $|q_{N_n}| = |q|$ on $M(H^\infty) \setminus D$ であることから、(3-14) より、 $B = 0$ on $\overline{P(y)}$ 従って、(3-3) と (3-15) より、 $\overline{P(y)} \subset A_{\lambda, \zeta}$ が示された。 $\square$

定理 3.3 (i) $\overline{A_{\lambda, \zeta} \cap \Gamma_{\lambda, \zeta}} = \Gamma_{\lambda, \zeta} (\forall \zeta \in \partial D)$ である。

(ii) Γ_λ は $E.D.$ ではない。

証明 $x_0 \in \Gamma_{\lambda, \zeta}$, V を $x_0 \in M(H^\infty)$ の任意の近傍とする。このとき、 $f_1, f_2, \dots, f_k \in H^\infty$, $\varepsilon > 0$ を適当にとって、

$$(3-17) \quad W \equiv \left\{ x \in M(H^\infty) ; \sum_{j=1}^k |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon \right\} \subset V$$

とできる。ここで、 $f_1(z) = z$, $f_2(z) = b(z)$ とする。定理 2.2 と同様にして、次を満たす sparse sequence $\{w_n\}_n \subset D$ がとれる。

$$(3-18) \quad \sum_{j=1}^k |f_j \circ L_{w_n} - f_j(x_0)| \rightarrow 0 \text{ uniformly on } D_r \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ for } 0 < r < 1 \text{ and}$$

$$(3-19) \quad \overline{P(y)} \subset W \text{ for every } y \in \overline{\{w_n\}_n} \setminus \{w_n\}_n.$$

(3-18) より、 $x_0 \in \Gamma_{\lambda, \zeta}$,

$$w_n = f_1(w_n) = f_1 \circ L_{w_n}(0) \rightarrow f_1(x_0) = z(x_0) = \lambda$$

$$b(w_n) = f_2 \circ L_{w_n}(0) \rightarrow f_2(x_0) = \zeta.$$

補題 3.2 より、

$$\emptyset \neq \overline{P(y)} \cap \Gamma \subset A_{\lambda, \zeta} \cap \Gamma_{\lambda, \zeta} \quad (\forall y \in \overline{\{w_n\}_n} \setminus \{w_n\}_n)$$

よって、(3-17) と (3-19) より、 x_0 の任意の近傍に対して、

$$\emptyset \neq (A_{\lambda, \zeta} \cap \Gamma_{\lambda, \zeta}) \cap V$$

が成立するので、(i) が示された。

$\zeta \in \partial D$ を固定して、 $U = \Gamma_\lambda \setminus \Gamma_{\lambda, \zeta}$ とする。 $\Gamma_{\lambda, \zeta}$ は Γ_λ の closed subset であるから、 U は Γ_λ の open subset である。 $U, \Gamma_{\lambda, \zeta} \cap A_{\lambda, \zeta}$ はどちらも、 Γ_λ の proper な open subset で、 $U \cap (\Gamma_{\lambda, \zeta} \cap A_{\lambda, \zeta}) = \emptyset$ である。(i) より、 $\overline{U} \cap \overline{(A_{\lambda, \zeta} \cap \Gamma_{\lambda, \zeta})} = \overline{U} \cap \Gamma_{\lambda, \zeta} \neq \emptyset$. 従って、 Γ_λ は E.D. ではない。□

References

- [1] P. Budde, Support sets and Gleason parts. Michigan Math. J. 37, 367–383(1990).
- [2] L. Carleson, Interpolations by bounded analytic functions and the corona theorem, Ann. of Math. 76, 547–559(1962).
- [3] T. W. Gamelin, Uniform algebras. New Jersey 1969.
- [4] J. B. Garnett, Bounded analytic functions. New York 1981.

- [5] P. Gorkin, H.- M. Lingenberg and R. Mortini, Homeomorphic disks in the spectrum of H^∞ . Indiana Univ. Math. J. 39, 961–983(1990).
- [6] K. Hoffman, Banach spaces of analytic functions. New Jersey 1962.
- [7] K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason parts. Ann. of Math. 86, 74–111(1967).
- [8] T. Ishii and K. Izuchi, Trivial points in the maximal ideal space of H^∞ . preprint(1997).
- [9] D.Suárez, Trivial Gleason parts and the topological stable rank of H^∞ . Amer. J. Math. 118, 879–904(1996).