

最適 (t, T) -政策の数値例

(ワイブル分布下での不完全修理, 予防取り替え問題について)

—小修理を含まない場合—

瀬川良之 (Yoshiyuki SEGAWA :e-mail to segawa@kyotogakuen.ac.jp)

京都学園大学経営学部 (Faculty of Business Administration, Kyotogakuen Univ.)

1 理論的背景

モデルと理論的背景

この報告は、車が故障したときなどに、それが買ってまだ間もないものならば、修理代を出来るだけ安く納めたいと考え、だいたい使い込んできたものならば、オーバーホールのように少しお金が掛かってもしも良いから徹底的に悪いところを直してしまおうし、余りにも古く成りすぎたら例え故障していなくても点検に出すような、普段我々が何気なく行っている修理に関する選択を理論的に正当化し、この理論に基づいてそのような選択を分ける分岐点を数値的に求める手法を提供するものである。

さて、修理費用が安いに越してたことはないことから、費用を最小化するために常に最小の値段で修理して貰える修理店に依頼する方が良いという考え方もあるであろう。しかし、何故我々はあえて割高な修理を選択することがあるのであろうか。はたして、割安な修理と割高な修理の間に如何なる違いを設定したら我々は納得するであろうか。まず、この納得できる設定を考えよう。同じ状況に対して価格の高い方を選択するためには、価格以外の何らかの尺度が考慮されていなければならない。そこで、我々はその尺度に優秀さという考え方を採用し、それを Brown and Proschan (1983) によって導入された不完全修理によって表すものとする。それは、まず、車などの一つのシステムに対して、年齢および故障率という属性を与え、年齢が高くなるほど故障率が増加するという性質を与える。次に、このシステムが年齢 x で故障したときに不完全修理を行うと、費用 c の負担が必要であり、修理が完了すると確率 p で新品と同様の状態となり（完全修理：システムの年齢は x ，すなわち、新品と同様の状態になる）、確率 $1-p$ で故障したときと同じ状態にあるシステムとして（小修理：システムの年齢は x ，すなわち、故障する直前の状態になる）機能し始めるものとする。 p を不完全修理における再生確率という。修理の優秀さをこの確率 p の大きさを表し、 p の値が大きければ大きいほど優秀な修理であることを意味することとしよう。

さて、先ほどのような割高な修理が選択されるためには、直感的に少なくとも次のような条件が満たされている必要があろう。まず、割安な修理を R_1 で表し費用 c_1 を要するものとする、また、割高な修理を R_2 で表し費用 c_2 を要するものとする。このとき、 $c_1 < c_2$ である。割高な修理が優秀であるために、割安な修理の再生確率を p_1 、割高な修理の再生確率を p_2 と置くとき、割高な修理の方が再生確率が高くなければならない。このとき、 $p_1 < p_2$ である。さらに、割高な修理を選択するのは故障率の低下を期待するものであるから、故障率が年齢と共に増加していくシステム (IFR: Increasing Failure Rate) を取り扱うものとする。ここでは、再生確率と費用がトレードオフしていることから、2つの修理の内ど

ちらを選択すべきかという問題が発生する。故障率増大は、残余寿命の減少として実感される。我々は、長時間平均費用規範で考えたとき、一回の修理費用節約より故障率の減少、すなわち、残余寿命の増加を優先させる場合があることをこの報告は述べている。つまり、2つの選択を切り替える切り替え年齢 t が存在し、その年齢以下ならば割安な修理を行い、その年齢を越えているならば割高な修理を選択することが最適であることが示される。更に、システムの年齢が大きく成りすぎたとき、故障率の極端な増大から頻繁に故障が発生することが予見される場合には、故障を待たず事前に保全を行うことが有利となる場合があることから、予防的に取り替えを行うことが考えられる。この予防的取り替えを予防保全と呼び、システムの年齢がある定められた年齢 T に達したならば、予防的に取り替えを行うこととする。これらの政策を統合したものを (t, T) -政策という。本報告では、過去の全ての履歴に依存するような政策の中において、定常政策であり、かつ、直前の年齢にのみ依存する政策である (t, T) -政策の中に最適な政策が存在することを示す。

さて、最も広いと考えられる過去の全ての履歴に依存した政策のクラス Π を考え、このクラスの中に最適な政策として定常政策であり、かつ、直前の状態のみに依存した政策である (t, T) -政策の最適性を検討するためにシステムを表現する次のような定義を導入する。

定義 1 基本的定義

$S = \{(m, x) \mid m \in \{r, p\}, x \in \mathfrak{R}_+ = [0, \infty)\}$: 状態空間。ただし、 $\{r, p\}$ は保全の種類を表し、 r は故障保全 (failure repair), p は予防保全 (preventive maintenance) を意味する。また、 x はシステムの年齢を表す;

$A = \{(a, x) \mid a \in \{1, 2, p\}, x \in [0, \infty)\}$: 決定空間。 $\{1, 2\}$ はそれぞれ不完全修理 $\{R_1, R_2\}$ を表し、 $\{p\}$ は予防保全を表す。 x は保全時に決定される次の計画予防保全年齢を表す;

p_i : 不完全修理 $i \in \{1, 2\}$ に対応する再生確率;

c_i : 不完全修理 $i \in \{1, 2\}$ に要する費用;

c_p : 予防保全に要する費用;

$\lambda(x)$: システムの年齢 $x \in [0, \infty)$ における故障率。 □

また、システムの挙動を表現する次のような記号を導入する。

定義 2 保全回数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対する過程を記述するための定義

X_n^b : 第 n 回目に稼働し始めた時のシステムの年齢 (begin of functioning period);

X_n^e : 第 n 回目にシステムが停止した時のシステムの年齢 (end of functioning period). 特に、それに対する保全が故障保全であるか予防保全であるか区別する必要がある場合には、故障保全ならば $X_n^e = X_n^r$, 予防保全ならば $X_n^e = X_n^p$ と明記することとする;

M_n : 第 n 回目の保全の種類 (kind of maintenance) を表し、 $M_n \in \{r, p\}$ である;

$X_n^e = (M_n, X_n^e)$: 第 n 回目にシステムが停止した時の状態 i.e. $(M_n, X_n^e) = (M_n, X_n^{M_n})$;

τ_n : 第 n 回目に稼働し始めたシステムが停止するまでの連続稼働期間。 $\tau_n = X_n^e - X_n^b$ である;

a_n : 第 n 回目にシステムが停止した時に選択された保全;

$a_n = (a_n, T_{n+1})$: 第 n 回目の保全に際して採用された決定。 $T_{n+1} \in [0, \infty)$ は次の計画予防保全年齢 (i.e., もし、システムが年齢 T_{n+1} に達するまでに故障を起こさなければ、年齢 T_{n+1} に達した時直ちに予防保全を行う) ;

$H_n = (X_1^b, X_1^e, a_1, X_2^b, X_2^e, a_2, X_3^b, \dots, X_n^b, X_n^e, a_n)$: 第 n 回目の決定までの履歴。 □

定義 3 (政策のクラス)

次の3つの政策のクラスを考える。下のクラスは上のクラスの部分集合である。

全ての政策のクラス: $\pi \in \Pi$ (すなわち, 過去の履歴に基づいて決定空間から決定を選択する任意の選択法則),

$$\pi : (H_{n-1}, X_n^b, X_n^e) \mapsto A, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.1)$$

定常政策のクラス: $\pi^s \in \Pi^s$ (すなわち, 全ての政策の内, 最後の状態にのみに依存する政策の集合),

$$\pi^s : X_n^e \mapsto A, n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{i.e., } \pi^s(H_{n-1}, X_n^b, X_n^e) = \pi^s(X_n^e), \quad (1.2)$$

(t, T) -政策のクラス: $\pi^{(t, T)} \in \Pi^{(t, T)}$ (すなわち, $\pi^{(t, T)}$ は定常政策の一つであり,

$$\pi^{(t, T)}(X_n^e) = \begin{cases} (1, T), & M_n = r, & X_n^e = X_n^r \in [0, t], \\ (2, T), & M_n = r, & X_n^e = X_n^r \in (t, T], \\ (p, T), & M_n = p, & X_n^e = X_n^p = T \end{cases} \quad (1.3)$$

とする。) $\square$

このとき, 次の仮定が成り立っているものとする。

仮定 1

$$(A1): \quad 0 < p_1 < p_2 \leq 1;$$

$$(A2): \quad 0 < c_1 < c_2;$$

(A3): $\lambda(x)$ は x に関して微分可能, 厳密に単調増大 $\lambda'(x) > 0, x \in [0, \infty)$, かつ, $\lambda(\infty) = \infty$ である。(これは狭い意味での IFR である);

$$(A4): \quad p_1 c_2 - p_2 c_1 < 0;$$

$$(A5): \quad c_2 - p_2 c_p > 0;$$

$$(A6): \quad c_2 - c_1 - (p_2 - p_1)c_p < 0 \quad \square$$

このうち仮定4は故障修理 R_1, R_2 に対して有限な値の切り替え年齢 t が存在するための必要条件であり, 仮定5は予防保全に対して有限な値の予防取り替え年齢 T が存在するための必要条件であり, 仮定6は t が T よりも小さな年齢となるための必要条件である。以下の証明で, これらの仮定の下に有限な (t, T) -政策が構成されることから, これらの仮定は有限な (t, T) -政策が存在するための十分条件でもある。

このシステムの保全は, システムが故障を起こしたとき, もしくは, 予定した予防取り替え年齢に達したときに開始されるものとする。ただし, 保全に要する時間は無視できるほど短いものとする。システムの年齢が X_n^e の時に第 n 回目の保全 a_n が始まり, それが故障を原因とするものであったならば不完全修理 R_{a_n} が施され, 修理費用 c_{a_n} が発生し, 保全終了後システムは確率 p_{a_n} で年齢0から, また, 確率 $1 - p_{a_n}$ で年齢 $X_n^e = X_n^r$ から稼働し始めるものとする。またそれが, システムが稼働中にもかかわらず予防取り替え年齢に達したために予防取り替えが施されたならば, 費用 c_p が発生し, 保全終了後システムは年齢0から稼働し始めるものとする。このようにして $n+1$ 回目にシステムが稼働し始めたとき, その年齢を X_{n+1}^b で表すこととする。最初にシステムが稼働し始めたときの年齢を $X_1^b = x_0$ とすると, 第 n 回目の連続稼働期間は確率変数 $\tau_n = X_n^e - X_n^b$ で表される。ここで, $n = 1, 2, \dots$ である。第 n 回目の故障までの総稼働時間は $\sum_{k=1}^n \tau_k$ で表される。我々の目的は, 期待時間平均費用規範

$$\phi_\pi(x_0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{E_\pi[\sum_{k=1}^n c_{a_k} \mid X_1^b = x_0]}{E_\pi[\sum_{k=1}^n \tau_k \mid X_1^b = x_0]} \right\} \quad (1.4)$$

の下で期待時間平均費用を最小にする政策 π^* , すなわち, 最適政策を見つけだすことにある. ここで政策 π とは, 過去の履歴 (H_{n-1}, X_n^b, X_n^c) を考慮して n 回目の決定 a_n を選ぶことの出来る任意の選択法則の集合 Π の元である. さて, 故障率のみ定義されれば, 信頼度関数 $\bar{F}(x)$ およびその確率密度関数 $f(x)$ は故障率によって次のように自動的に与えることが出来る.

$$\bar{F}(x) = \exp \left\{ - \int_0^x \lambda(y) dy \right\}, \quad f(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} \bar{F}(x) = \lambda(x) \bar{F}(x). \quad (1.5)$$

以上により, このシステムに対して Ross (1970) によって政策の最適性を判定するための定理が与えられる.

定理 1 (最適性方程式) もし, 相対値関数と呼ばれるある有界な関数 $v(x)$ とある定数 g が存在して

$$v(x) = \inf_{x \leq T} \min_{i \in \{1,2\}} \left\{ c_i + p_i \left\{ \int_0^T v(y) f(y) dy + (v(0) + c_p - c_1) \bar{F}(T) - g \int_0^T \bar{F}(y) dy \right\} + \frac{1-p_i}{\bar{F}(x)} \left\{ \int_x^T v(y) f(y) dy + (v(0) + c_p - c_1) \bar{F}(T) - g \int_x^T \bar{F}(y) dy \right\} \right\}, \quad (1.6)$$

を満たすならば, システムの状態が x であったときに発生した故障に対して, 上式の右辺を最小化する決定によって構成される任意の政策 π^* は

$$\phi_{\pi^*}(x_0) = g = \min_{\pi \in \Pi} \phi_{\pi}(x_0), \quad \forall x_0 \in S \quad (1.7)$$

を満たす. このような v 及び g を最適な相対値関数, および, 最適な時間平均費用と呼ぶ. $\square$

さて, このようなシステムに対して最適な平均費用を g とするとき, 最適な相対値関数 $v(x)$ は,

$$v(x) = \begin{cases} \frac{c_1}{p_1} - \frac{(1-p_1)c_1}{p_1 \bar{F}^{-p_1}(x)} + (1-p_1)g \frac{\int_0^x \bar{F}^{p_1}(y) dy}{\bar{F}^{p_1}(x)}, & x \in [0, t], \\ \frac{c_2}{p_2} - \frac{1-p_2}{p_2} (c_2 - p_2 c_p) \frac{\bar{F}^{p_2}(T)}{\bar{F}^{p_2}(x)} - (1-p_2)g \frac{\int_x^T \bar{F}^{p_2}(y) dy}{\bar{F}^{p_2}(x)}, & x \in (t, T] \end{cases} \quad (1.8)$$

のように陽に与えることができるので, これが最適性方程式を満たし, 故障したシステムの年齢が $[0, t]$ の間にあるときには不完全修理 R_1 を, $(t, T]$ の間にあるときには不完全修理 R_2 を, 年齢 T に達したにもかかわらずまだ稼働中であつたならば予防取り替えを選択することが最適であること, すなわち, (t, T) -政策が最適であることが証明できる. ここで, t および T は

$$w(t, T) = p_1(p_2 - p_1)(c_2 - p_2 c_p) \lambda(T) \int_0^t \bar{F}^{p_1}(y) dy - (p_1 c_2 - p_2 c_1) \bar{F}^{p_1}(t) - (p_2 - p_1) c_1, \quad (1.9)$$

$$\xi(t, T) = p_2(p_2 - p_1)(c_2 - p_2 c_p) \lambda(T) \bar{F}^{-p_2}(t) \int_t^T \bar{F}^{p_2}(y) dy + (p_2 - p_1)(c_2 - p_2 c_p) \bar{F}^{-p_2}(t) \bar{F}^{p_2}(T) + (p_1 c_2 - p_2 c_1) \quad (1.10)$$

とおく時, 連立方程式 $w(t, T) = 1, \xi(t, T) = 0$ の解であり, 最適平均費用 g^* はこの t, T を用いて与えられることのできる定数である.

次に, この連立方程式を数値的に解く手順を示し, 計算結果に基づいて考察を行う.

2 数値計算

この節では、故障率が Weibull 分布に従うとき、不完全ガンマ関数の級数展開を利用することにより、連立非線形方程式 $z(t, T) = 0, w(t, T) = 0$ の解 (t, T) を数値的に求めることが出来ることを述べ、その結果について考察する。

まず、Newton-Raphson 法を適応するためにフォーマットを整理する。連立方程式の変数と方程式を次のように、ベクトル表示し

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ T \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} w \\ \xi \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \mathbf{0}, \mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial t} & \frac{\partial w}{\partial T} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \xi}{\partial T} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

と表すものとする。反復式は

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(i)})^{-1} \mathbf{z}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (2.2)$$

で与えられる。 $\mathbf{J}^{-1}$ の陽な表現を用いると

$$\begin{bmatrix} t^{(i+1)} \\ T^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^{(i)} \\ T^{(i)} \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} \begin{bmatrix} J_{22}w - J_{12}\xi \\ -J_{21}w + J_{11}\xi \end{bmatrix} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(i)}} \quad (2.3)$$

と表される。続いて各ヤコビアンを要素を記述する。

$$J_{11}(t, T) = p_1 \bar{F}^{p_1}(t) \{ (p_2 - p_1)(c_2 - p_2 c_p) \lambda(T) + (p_1 c_2 - p_2 c_1) \lambda(t) \}, \quad (2.4)$$

$$J_{12}(t, T) = p_1 (p_2 - p_1) (c_2 - p_2 c_p) \lambda'(T) \int_0^t \bar{F}^{p_1}(y) dy \quad (2.5)$$

$$J_{21}(t, T) = -p_2 (p_2 - p_1) (c_2 - p_2 c_p) \bar{F}^{-p_2}(t) \left\{ \left(\bar{F}^{p_2}(t) - \bar{F}^{p_2}(T) - p_2 \lambda(t) \int_t^T \bar{F}^{p_2}(y) dy \right) \right. \quad (2.6)$$

$$\left. + \lambda(T) (\lambda(T) - \lambda(t)) \bar{F}^{p_2}(T) \right\}, \quad (2.7)$$

$$J_{22}(t, T) = p_2 (p_2 - p_1) (c_2 - p_2 c_p) \lambda'(T) \int_t^T \bar{F}^{p_2}(y) dy. \quad (2.8)$$

続いて、一般的な Weibull 分布の表現を与える。

定義 4 (Weibull 分布) 形状パラメータ $m > 1$ 、および、尺度パラメータ $\eta > 0$ を持つ Weibull 分布の故障率、確率密度関数、信頼度関数は次のように与えられる。

$$\lambda(x) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{x}{\eta} \right)^{m-1}, \quad f(x) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{x}{\eta} \right)^{m-1} e^{-(x/\eta)^m}, \quad \bar{F}(x) = e^{-(x/\eta)^m}. \quad \square \quad (2.9)$$

続いて、ガンマ関数、および、不完全ガンマ関数の定義を与える。

定義 5 (ガンマ関数、および、不完全ガンマ関数) $a > 0$ に対するガンマ関数 $\Gamma(a)$ 、および、 $a > 0, x \geq 0$ に対する不完全ガンマ関数 $G(a, x)$ は次の通りである。

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-s} s^{a-1} ds, \quad G(a, x) = \int_0^x e^{-s} s^{a-1} ds. \quad (2.10)$$

さらに、

$$\bar{G}(a, x) = \Gamma(a) - G(a, x) = \int_x^\infty e^{-s} s^{a-1} ds. \quad (2.11)$$

を与える。 $\square$

以上の定義により, 信頼度関数の p 乗の定積分を不完全ガンマ関数によって表現することが出来る.

$$\int_0^x \bar{F}^p(y) dy = \int_0^x e^{-p(y/\eta)^m} dy = \frac{\eta}{mp^{1/m}} \int_0^{p(x/\eta)^m} e^{-s} s^{\frac{1}{m}-1} ds = \frac{\eta}{mp^{1/m}} G\left(\frac{1}{m}, p\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right), \quad (2.12)$$

$$\int_x^\infty \bar{F}^p(y) dy = \frac{\eta}{mp^{1/m}} \bar{G}\left(\frac{1}{m}, p\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right), \quad (2.13)$$

$$\int_t^T \bar{F}^p(y) dy = \frac{\eta}{mp^{1/m}} \left\{ \bar{G}\left(\frac{1}{m}, p\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right) - \bar{G}\left(\frac{1}{m}, p\left(\frac{T}{\eta}\right)^m\right) \right\}. \quad (2.14)$$

一方, Arfken(1978), 奥村 (1991) から, 不完全ガンマ関数の漸近展開が次のように与えられる.

$$G(x, a) = e^{-x} x^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}, \quad \text{for } 0 \leq x \ll a, \quad (2.15)$$

$$\bar{G}(x, a) = e^{-x} x^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a)^{\bar{n}}}{(n+1)! l_n l_{n+1}}, \quad \text{for } a \ll x, \quad (2.16)$$

ここで, $l_n = L_n^{(-a)}(-x)$ は Laguerre の漸化式であり

$$l_0 = 1, \quad l_1 = x + 1 - a, \quad l_n = ((n-a-1)(l_{n-1} - l_{n-2}) + (n+a)l_{n-1})/n, \quad (2.17)$$

によって与えられる. ただし, $x^{\bar{n}} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$ である. 反復法のアルゴリズムは次のように表現される.

最適な分岐点 (t^*, T^*) を求めるアルゴリズム

Step 0 (初期化): $x^{(0)} := (0, 1)^T$, $x^* := x^{(0)}$, $k := 1$, $\rho^{(1)} = 1$

Step k: $x^{(k+1)} := x^{(k)} - \rho^{(k)} \left(\frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} \begin{bmatrix} J_{22}w - J_{12}\xi \\ -J_{21}w + J_{11}\xi \end{bmatrix} \right)$ $x = x^{(i)}$

if $\|z(x^{(k+1)})\| < \varepsilon$

then **Stop.** x^* is optimal.

else $x^* := x^{(k+1)}$. Let $k := k + 1$, Select $0 < \rho^{(k)} < 1$ and **Go to Step k.** $\square$

我々は次のように各パラメータを与え数値計算を行った.

$p_1 = 1/3, p_2 = 2/3, c_1 = 200, c_2 = 300, c_p = 400$, 及び, ワイブル分布の尺度パラメータを η , 形状パラメータを m と表した.

	m=2		2.5		3	
	t	T	t	T	t	T
$\eta=1$	1.499998132	5.74450387	1.091156808	2.90046469	0.912093262	2.069138014
2	2.999979468	11.4862409	2.174860711	5.80051486	1.816261592	4.13704201
3	4.499965576	17.22873212	3.261816323	8.70386121	2.724551894	6.20836952
4	5.999963035	22.97020696	4.349578203	11.61008295	3.636724244	8.28388690
5	7.499971455	28.71095691	5.4396299	14.51951237	4.557791561	10.36987843

数値計算例

計算の結果、誤差 10^{-5} で収束し、最適な切り替え年齢 (t, T) の値は、 η に対して正比例で増加し、 m に対して単調に減少することが観察された。

参考文献

- [1] Brown, M. and Proschan, F., "Imperfect Repair", *Journal of Applied Probability*, Vol.20, pp.851-859, (1983).
- [2] Ohnishi, M., "Optimal Minimal-Repair and Replacement Problem under Average Cost Criterion: Optimality of (t, T) -Policy", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.40, pp.373-389, (1997).
- [3] Phelps, R. I., "Optimal Policy for Minimal Repair", *Journal of the Operations Research Society*, Vol.34, No.5, pp.425-427, (1983).
- [4] Ross, S. M., "Average Cost Semi-Markov Decision Processes", *Journal of Applied Probability*, Vol.7, pp.649-656, (1970).
- [5] Segawa, Y., Ohnishi, M. and Ibaraki, T., "Optimal Minimal-Repair and Replacement Problem with Age Dependent Cost Structure". *Computers Math. Applic.*, Vol.24, No.1/2, pp.91-101, (1992).
- [6] Segawa, Y. and Ohnishi, M., "The Average Optimality of a Repair-Limit Replacement Policy", *Mathematical and Computer Modeling* 31, pp.327-334, (2000).
- [7] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. "Multivariate Imperfect Repair", *Operations Research Society of America*, Vol.34, No. 3, pp.437-448, (1986).
- [8] 瀬川良之, 大西匡光, 「年齢不完全修理問題における t -政策の最適性-小修理を含まない場合について-」, 京都学園大学経営学部論集第11巻第1号, pp.95-116, (2001).
- [9] Arfken, G., (権平健一, 神原武志, 小山直人 訳), 基礎物理数学『特殊関数と積分方程式』, 講談社, 1978年.
- [10] 奥村晴彦, 『C言語によるアルゴリズム辞典』, 技術評論社, 1991年.