

C^1 connecting lemma と flow の Stability Conjecture

早大 商 林 修平 (Shuhei Hayashi)

Stability Conjecture と Ω -Stability Conjecture は [9] において、Palis と Smale により初めて明確に述べられた。この予想における stability と Ω -stability のための十分条件は diffeomorphism, flow とともに比較的早い時期に確立されたが、これらの条件が必要条件でもあるかどうかは、 C^1 diffeomorphism の場合でさえ長年の未解決問題であった。それは [7] において、Mañé の多大な貢献により、 C^1 structurally stable diffeomorphism に対し解かれ、Palis は [8] でそれを C^1 Ω -stable diffeomorphism まで拡張した。diffeomorphism の場合と同様に、flow についての予想も、安定性の仮定から nonwandering set の hyperbolicity を示すことに帰着される。Liao ([4]) と Doering ([1]) は 3次元の場合にこの予想に貢献し、Hu ([3]) はこの場合について予想を解決した。つまり、3次元の struc-

turally stable vector field は Axiom A を満たすことを示した。実際、flow の場合の最大の困難は singularity の存在であり、singularity に periodic orbit が集積しているときには diffeomorphism のときの議論が使えない。この困難は下で述べる C^1 connecting lemma によって乗り越えられ、最終的に C^1 の Stability Conjecture と Ω -stability Conjecture が解決される。

定理 A C^1 Ω -stable vector field は Axiom A を満たす。

connecting lemma を述べる前にいくつかの定義を述べる。 M は境界のない compact manifold で $\text{Diff}^r(M)$ と $X^r(M)$ はそれぞれ C^r topology を持つ M の C^r diffeomorphism f , vector field X の集合であり、 X_t , $t \in \mathbb{R}$ は、 $X \in X^r(M)$ によって生成された M 上の C^r flow である。 Λ は isolated hyperbolic set, つまり、ある compact な Λ の近傍 U に対し、 $\bigcap_n f^n(U) = \Lambda$, $\bigcap_t X_t(U) = \Lambda$ となる hyperbolic set とする。このとき、次のような、 $D^s \subset W^s(\Lambda) \cap U$, $D^u \subset W^u(\Lambda) \cap U$ が存在する：ある $\varepsilon > 0$ に対し、 diffeomorphism について

$D^s = \overline{W_\varepsilon^s(\Lambda) - f(W_\varepsilon^s(\Lambda))}$, $D^u = \overline{W_\varepsilon^u(\Lambda) - f^{-1}(W_\varepsilon^u(\Lambda))}$;
flow について は.

$D^s = \overline{W_\varepsilon^s(\Lambda) - X_1(W_\varepsilon^s(\Lambda))}$, $D^u = \overline{W_\varepsilon^u(\Lambda) - X_{-1}(W_\varepsilon^u(\Lambda))}$.
 $p \in W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda) - \Lambda$ は Λ に関する homoclinic point といふ。 f あるいは X の有限軌道の列 $\{\gamma_n: n \geq 1\}$ が Λ に関する almost homoclinic sequence であるとは、それが $D^s \times D^u$ の両方に集積し、各 γ_n は D^u の近くから一端 Λ の外に出、再び Λ 内に入り D^s の近くにくるようなときといふ。

これでは connecting lemma を述べる。

定理 B $f \in \text{Diff}^1(M)$ (あるいは $X \in X^1(M)$), $\mathcal{U}$ の近傍 $\mathcal{U}$ と isolated hyperbolic set Λ が与えられている。 f (あるいは X) が Λ に関する almost homoclinic sequence を持つならば、 Λ のある近傍で f (あるいは X) と一致する $g \in \mathcal{U}$ (あるいは $Y \in \mathcal{U}$) で、 Λ に関する homoclinic point を持つものが存在する。

この定理を C^1 Ω -stable vector field の singularity に適用すると、次の系を得る。

系1 $X \in X^1(M)$ が " C^1 Ω -stable ならば",

$$\text{Sing}(X) \cap \overline{\text{Per}(X)} = \emptyset.$$

定理Bは 次の問題にも適用できる。

問題 $f \in \text{Diff}^r(M)$ (あるいは $X \in X^r(M)$) が、
hyperbolic fixed point (あるいは singularity) p
を持つとする。 $(\overline{W^s(p)} \cap W^u(p)) \cup (\overline{W^u(p)} \cap W^s(p))$
- $\{p\} \neq \emptyset$ ならば、 C^r $\mathbb{R}^2$ 近いある diffeomorphism g
(あるいは vector field Y) $\mathbb{R}^2$ 、 p のある近傍で f (あ
るいは X) と一致し、 p に関する homoclinic point
を持つものが存在するか？

Robinson と Pixton は M が 2次元球面 のとき、肯
定的な解答を与え、 Takens は volume-preserving diffeo-
morphism に対し、 $r=1$ のときに証明し、 Oliveira も、
volume-preserving の場合には、任意の $r \geq 1$ 、 2次元トーラス
について証明した。 さらに、 Mañé は $r=1, 2$ のとき、 p
が ある f -invariant measure に対し μ positive measure
を持つという仮定の下で、 それを解いた。

定理Bより次の系を得る。

系2 上の問題は $r=1$ のとき肯定的に解ける。

§ 1. 定理Aの証明の概略

X は $C^1\Omega$ -stable vector field とする。 $P_i(X)$ を stable subspace の次元が $i \geq 1$ である periodic point の集合とし、 $\bar{P}_i(X)$ をその closure とする。 diffeomorphism のときと同様に、 $\bar{P}_0(X)$ に含まれる periodic orbit の数は有限である。 [7] にあるように、 $\bigcup_{i=0}^{j-1} \bar{P}_i(X)$ が hyperbolic と仮定して、 $\bar{P}_j(X)$, $j \geq 1$ が hyperbolic であることを証明する。 このとき、 $\bigcup_{i=0}^{j-1} \bar{P}_i(X) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$ と basic set の disjoint union とかける。 次の2つの場合がある。

1. $P_j(X)$ が $\bigcup_{i=0}^{j-1} \bar{P}_i(X)$ に集積している。
2. $\bar{P}_j(X) \cap \bigcup_{i=0}^{j-1} \bar{P}_i(X) = \emptyset$.

1の場合は、定理Bを用いてある Λ_i に関する homoclinic point をつくることにより矛盾が生じる。 2の場合は、Mañé の diffeomorphism のときの証明と平行な議論を用いるが、ある diffeomorphism と flow の相違のために、[8] で Palis が行ったように、まず $C^1\Omega$ -stable vector field における Axiom A の density を示し、そのあとで、nonwandering set 上の topological equivalence により、定理Aを証明する。

§ 2. 定理 B の証明の概略

$\{\gamma_n: n \geq 1\}$ を Λ に関する almost homoclinic sequence とする。各 n に対し、ある $\bar{\gamma}_n \subset \gamma_n$ をとって、その端点、 p_n^u と p_n^s がそれぞれある $p^u \in D^u$ と $p^s \in D^s$ に $\bar{\gamma}_n$ の中で最も近い点であり、さらに、 $\bar{\gamma}_n \cap U^c \neq \emptyset$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^u = p^u$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^s = p^s$ となるようにできる。この $\bar{\gamma}_n$ を用いて元の system から任意に近いものの有限軌道 $\tilde{\gamma}_n$ で次のような性質を持つものを見つけることができればよい。つまり、 $\tilde{\gamma}_n$ の端点は p_n^u と p_n^s で、 n により大きいある $r > 0$ に対し、 n が十分大きければ、

$$(*) \quad \tilde{\gamma}_n \cap Br(p^u) = p_n^u, \quad \tilde{\gamma}_n \cap Br(p^s) = p_n^s$$

となる。ここで、 $Br(x)$ は diffeomorphism について M における、flow について Σ はある transversal section における、 x を中心とした r -ball である。これから定理 B が導かれることは自明である。そのような有限軌道を得るために、Pugh の C^1 closing lemma における perturbation の方法 ([10], 小さな box 内の 2 点 (pair) のうちの点と少しおつ box の多くの像の中で押し Σ 、もう一方の点のある像にぶつける) を p^u の有限正軌道に Σ , Σ 複数の pair に対し同時に適用する。その後で、同じことを $Br_0(p^s)$ の pair について行なう。これらの pair を上のようにつなぐことに

ようで、 $\bar{\gamma}_n$ のいくつかの部分と端点を残したまま切り落とし、 $\bar{\gamma}_n \cap \text{Bro}(p^k)$ と $\bar{\gamma}_n \cap \text{Bro}(p^s)$ の点を少なくして p^k , p^s のまわりを疎にしたい。但し、pair はそれらをあべつなぐことができれば (*) にある性質を持つように選んである。それでは、 $\bar{\gamma}_n \cap \text{Bro}(p^k)$ についてそれを説明する。あべつなぐ pair をつなぐとすると、重複ある box から生じる干渉が起こる。そのときは、目的地を変え正軌道の順序でより遠くの pair に向かって押す。このようにして、干渉が生じなくなるまで修正していけばよい。実際、干渉がそれほど多くは起らないように pair を選んでおく。次の性質が重要である。各 box に対し、他の box とは高々 $L_0 - 1$ しか交わらないような $L_0 > 0$ が存在し、 L_0 は押すときの support の大きさの変化に対して不変である。ある support の大きさ $\pm$ を十分小さくすると (押す回数はふえるが) あまりに多くの干渉は L_0 以上の box が ある 1 つの box と交わることを意味上の性質に反する。従って、上のような過程が終了するのに十分な perturbation のための場所を前もって用意することが出来る。

参考文献

- [1] C. Doering, Persistently transitive vector

fields on three-dimensional manifolds, Pitman Res. Notes Math. Series, editor M. I. Camacho, M. J. Pacifico, and F. Takens, vol. 160 (1987), 59-89.

- [2] S. Hayashi, Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 Stability and Ω -Stability Conjectures for flows, to appear in Annals of Math.
- [3] S. Hu, A proof of C^1 Stability Conjecture for three-dimensional flows, Trans. AMS 342 (1994), 753-772.
- [4] S.-T. Liao, On the stability conjecture, Chinese Annals of Math. 1 (1980), 9-30.
- [5] R. Mañé, An ergodic closing lemma, Annals of Math. 116 (1982), 503-590.
- [6] R. Mañé, On the creation of homoclinic points, Publ. Math. IHES 66 (1988), 139-159.
- [7] R. Mañé, A proof of the C^1 Stability Conjecture, Publ. Math. IHES 66 (1988), 162-210.
- [8] J. Palis, On the C^1 Ω -Stability Conjecture, Publ. Math. IHES 66 (1988), 211-215.

- [9] J. Palis and S. Smale, Structural stability theorems, Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math. vol. 14, AMS (1970), 223-231.
- [10] C. Pugh and C. Robinson, The C^1 Closing Lemma, including Hamiltonians, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 3 (1983), 261-313.