

二元配置実験に於て，セルに於ける繰返し数が
等しくない場合の解析について

東大 工 元 津 千 尋

§ 0. 要約

二元配置実験で，セルでの繰返し数が等しくない場合に，構造が母数模型であれば最小二乗法によって推定，検定ができるが一般に式が複雑になる。もし変量模型であれば，完備十分統計量が得られないので最良不偏推定量や一樣最強検定は得られない。前記，空のセルが無い場合にセルミーンから作った簡単な統計量による分散成分の推定を論じ，繰返し数の不揃いが甚だしくない場合ならば比較的よい性質を持つことを示した〔1〕。

ここでは母数模型を仮定し，セルミーンから作った統計量による近似検定を論ずる。

§ 1. 正規確率変数の二次形式および二次形式の比の分布

§ 2. に於てセルミーンから作った検定統計量の分布が必要となるので
今節でその準備をしておく。

確率変数，

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$$

が多次元正規分布

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} x' \Sigma^{-1} x\right\}$$

に従っているとする。この時二次形式,

$$(1) \quad S = x' A x$$

の分布を考える。ただし, A は $n \times n$ の real symmetric matrix.

S の特性函数 $\psi(t)$ は

$$\psi(t) = |I_n - 2itB|^{-\frac{1}{2}} \quad (B = A\Sigma), I_n: \text{単位行列}$$

である。この特性函数を convergent series に展開することを考える。

$$B = I_n + B^*$$

とする。すると,

$$\psi(t) = |(1 - 2it)I_n - 2itB^*|^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n_0} t_k (1 - 2it)^{-k} (-2it)^k \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

ただし,

$$(2) \quad \begin{cases} t_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} \begin{vmatrix} b_{i_1, i_1}^* & \dots & b_{i_1, i_k}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_k, i_1}^* & \dots & b_{i_k, i_k}^* \end{vmatrix} \\ n_0 = \text{rank } B^* \\ b_{i,j}^* : (i, j) \text{ element of } B^*. \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots, n_0)$$

つぎに,

$$\left| \sum_{k=1}^{n_0} f_k (1-2it)^{-k} (-2it)^k \right| < 1$$

として $\psi(t)$ を二項展開する。この条件は、

$$\sum_{k=1}^{n_0} |f_k| < 1$$

なすみたされる。

$$\begin{aligned} \psi(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}} & \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_0} f_k (1-2it)^{-k} (-2it)^k + \dots \right. \\ & \left. + \frac{(\frac{1}{2}-r)!}{r!} \left(\sum_{k=1}^{n_0} f_k (1-2it)^{-k} (-2it)^k \right)^r + \dots \right\} \end{aligned}$$

これは t の全域で一様収束するから、逆変換を行う時に項別積分してよ

い。

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{k=1}^{n_0} f_k (1-2it)^{-k} (-2it)^k \right\}^r \\ &= \sum_{k_1=1}^{n_0} \dots \sum_{k_r=1}^{n_0} \left(\prod_{i=1}^r f_{k_i} \right) (1-2it)^{-\sum_{i=1}^r k_i} (-2it)^{\sum_{i=1}^r k_i} \\ &= \sum_{k_1=1}^{n_0} \dots \sum_{k_r=1}^{n_0} \left(\prod_{i=1}^r f_{k_i} \right) \sum_{p=0}^{\sum_{i=1}^r k_i} \binom{\sum_{i=1}^r k_i}{p} (-1)^p (1-2it)^{-p} \end{aligned}$$

であり、 $(1-2it)^{-p}$ は自由度 $2p$ の χ^2 分布の特性函数であるから $\psi(t)$ の逆変換は容易に得られ、 S の確率密度函数 $p(s)$ は次の様になる。

補助定理 1 (1) 式の S の確率密度函数 $p(s)$ は

$$p(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-r)!}{r!} \sum_{k_1=1}^{n_0} \dots \sum_{k_r=1}^{n_0} \left(\prod_{i=1}^r f_{k_i} \right) \sum_{p=0}^{\sum_{i=1}^r k_i} \binom{\sum_{i=1}^r k_i}{p} (-1)^p h(\chi^2; n+2p)$$

持つ第 r 項は

$$f_r(\chi^2; n)$$

である。ただし、 $f_r(\chi^2; n)$ は自由度 n の χ^2 分布の確率密度関数であり

$$\left(\frac{1}{2} - r\right)! = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - r\right) \quad (r \geq 1)$$

である。式中の f_r の値は (2) 式から計算され、その具体的な形は補助定理 3 で与えられる。

この展開を見ると元の分布が χ^2 分布に近い時は、 f_r ($r=1, 2, \dots, n_0$) の値が小さく収束が速い。また、展開の r 項まで取ると r 次のモーメントまでは正確な分布と一致している。

つぎに二次形式と独立な χ^2 分布との比の分布を求める。

$$S_0 = \mathbf{x}' A \mathbf{x}$$

S_1 = 自由度 m の χ^2 分布を有する統計量、 S_0 とは独立とする。

この時、

$$(3) \quad W = S_0 / S_1 \quad (S_0 \perp S_1)$$

の分布を考える。

S_0, S_1 の同時分布の特性関数は

$$\psi(t_0, t_1) = |I_n - 2it_0 B|^{-\frac{1}{2}} (1 - 2it_1)^{-\frac{m}{2}}$$

である。これから [2] によって W の分布を導く。

まず、

$$\left. \frac{\partial \gamma(t, u - wt)}{\partial u} \right|_{u=0} = |I_n - 2itB|^{-\frac{1}{2}} (m!) (1 + 2itwt)^{-\frac{m}{2}-1}.$$

この式におとも前と同様の展開をいし、この項は

$$\sum_{k_1=1}^{n_0} \cdots \sum_{k_r=1}^{n_0} \left(\prod_{i=1}^r f_{k_i} \right) \sum_{p=0}^{\sum_{i=1}^r k_i} \left(\sum_{i=1}^r k_i \right) (-1)^p (1 - 2it)^{-\frac{n+2p}{2}} (m!) (1 + 2itwt)^{-\frac{m}{2}-1}$$

となる。これより w の密度函数 $p(w)$ は次の様になる。

補助定理 2 (3) 式の w の密度函数 $p(w)$ は

$$\begin{aligned} p(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int \left[\frac{\partial \gamma(t, u - wt)}{\partial u} \right]_{u=0} dt \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-r)!}{r!} \sum_{k_1=1}^{n_0} \cdots \sum_{k_r=1}^{n_0} \left(\prod_{i=1}^r f_{k_i} \right) \sum_{p=0}^{\sum_{i=1}^r k_i} \left(\sum_{i=1}^r k_i \right) (-1)^p h(\eta; n+2p, m) \end{aligned}$$

特に第 0 項は

$$h(\eta; n, m)$$

である。ただし、 $h(\eta; n, m)$ は自由度 n, m の 2 つの独立な χ^2 の比、 $\eta = \chi^2(n) / \chi^2(m)$ の確率密度函数である。

つぎに、(2) 式中の f_k の計算を示す。

$$f_k = \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \begin{vmatrix} b_{i_1 i_1}^* & \cdots & b_{i_1 i_k}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_k i_1}^* & \cdots & b_{i_k i_k}^* \end{vmatrix} \quad (k=1, 2, \dots, n_0)$$

であることは容易にわかる。

いま、 $b_{i_1 i_2}^*, b_{i_2 i_3}^*, \dots, b_{i_k i_1}^*$ というタイプの横を長さ k の chain

と呼ばれれば、長さ n の chain は添字全部について 1 から n まで
 用いられる B^{*n} になる。そこで

$$\begin{vmatrix} b_{1,1}^{*1} & \cdots & b_{1,n}^{*n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1}^{*1} & \cdots & b_{n,n}^{*n} \end{vmatrix}$$

にあらわれる $n!$ 個の和を、長さ $n-m$ の chain と、残り m 個の任意の
 長さ $n-m$ より長い chain を除いたものの積で書かれるもので類別し
 , $m=0$ から $n-1$ まで加えるという方法を取ると次の補助定理を得
 る。

補助定理 3 (2) 式中の f_n は次の様に計算される。

$$f_n = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} m! g_m(n-m) \cdot (-1)^{n-m-1} (n-m-1)! \text{tr} B^{*n-m}$$

ただし、 $g_m(x)$ は f_m から x より長い chain は全て除き、
 $\{\text{tr} B^{*x}\}^m$ という項を含む項がもし有れば $1/(m+1)$ 倍したもの。

証明 長さ $n-m$ の chain は $(n-m) \times (n-m)$ の小行列式の中
 で $(n-m-1)!$ 通り作られ、その符号は $(-1)^{n-m-1}$ である。そして、そ
 の様な小行列式の作り方は $\binom{n}{n-m}$ 通り有る。これに残りの $m \times m$ の
 小行列式の中で長さ $n-m$ 以下の chain を持つ項をかければ、最大長
 の chain の長さが $n-m$ であるものが全て得られる。その際に、

$\{\text{tr} B^{*n-m}\}^{m+1}$ を含む項は $\text{tr} B^{*n-m}$ を最初に取り出す時に $\binom{n}{n-m}$
 通り有るとしているが、実は、 $m+1$ 個の小行列式があって、
 $\{\text{tr} B^{*n-m}\}^{m+1}$ を与えるのに $m+1$ 回重複して数えている。証明終。

若干の値の計算を次に示す。

$$t_1 = 1 \quad (\text{定義})$$

$$t_2 = \frac{1}{2!} \{-t B^{*2} + (t B^*)^2\}$$

$$t_3 = \frac{1}{3!} \{2! t B^{*3} - 3 t B^{*2} t B^* + (t B^*)^3\}$$

$$t_4 = \frac{1}{4!} \{-3! t B^{*4} + 8 t B^{*3} t B^* + 3 (t B^{*2})^2 - 6 t B^{*2} (t B^*)^2 + (t B^*)^4\}$$

, etc.

ここで従来の様に、はじめに二次形式を直交変換し固有根によって議論をすることをしなかったのは次の2つの理由による。

(i) ^{§2.} ~~§3.~~セルミンから作った極定統計量の性質を論ずる場合に (i, j) セルでの繰返し数 n_{ij} の影響を n_{ij} の関数として把握したい。

(ii) 変量模型で同様の議論をする場合に独立でない二次形式の比の分布が必要になる。そこでも今節と類似の議論を展開するが、固有根によって特性函数を展開することはできなくなる。したがって、この変量模型については機会を改めて述べて見たい。))

§2. 母数模型の場合の近似推定——帰無仮説の下での性質

モデル

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$y_{ijk} : NID(0, \sigma_e^2)$$

ただし, $i = 1, 2, \dots, a$; $j = 1, 2, \dots, b$; $k = 1, 2, \dots, n_{ij}$

; n_{ij} : (i, j) セルでの繰返し回数 ≥ 1 以上とする。

つぎに, Z_{ij} はセル平均とする。すなわち,

$$\begin{aligned} Z_{ij} &= \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk} \\ &= \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk} \end{aligned}$$

Z_{ij} を次の様に並べた縦ベクトルを Z とおく。

$$Z = (Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{1b}, Z_{21}, \dots, Z_{2b}, \dots, Z_{a1}, \dots, Z_{ab})'$$

すると

$$\text{Var}(Z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{11}} & & & & & \\ & \frac{1}{n_{1b}} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{1}{n_{a1}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{n_{ab}} \end{bmatrix} \sigma_e^2$$

つぎに4つの統計量を定義する。

$$S_\alpha = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{Z}_{i.} - \bar{Z}_{..})^2 / (a-1) = Z' q_\alpha Z$$

$$S_\beta = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{Z}_{.j} - \bar{Z}_{..})^2 / (b-1) = Z' q_\beta Z$$

$$S_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{Z}_{ij} - \bar{Z}_{i.} - \bar{Z}_{.j} + \bar{Z}_{..})^2 / (a-1)(b-1) = Z' q_{\alpha\beta} Z$$

$$S_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} (y_{ijk} - Z_{ij})^2 / (N - ab)$$

そこで,

$$\bar{z}_{i.} = \sum_j^b z_{ij} / b, \quad \bar{z}_{.j} = \sum_i^a z_{ij} / a, \quad \bar{z}_{..} = \sum_i^a \sum_j^b z_{ij} / ab;$$

$$N = \sum_i^a \sum_j^b n_{ij}.$$

また、各式の最後の項は matrix 表示であり、 G_α , G_β , $G_{\alpha\beta}$ は次通りである。

$$G_\alpha = \{P \setminus Q\}_a, \quad P = \frac{1}{ab} J_{b \cdot b}, \quad Q = -\frac{1}{ab(a-1)} J_{b \cdot b}$$

$$G_\beta = \{R \setminus R\}_a, \quad R = \frac{1}{a(b-1)} [I_b - \frac{1}{b} J_{b \cdot b}]$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{(a-1)(b-1)} [I_{ab} - \frac{1}{ab} J_{ab \cdot ab} - (a-1)G_\alpha - (b-1)G_\beta]$$

ただし、 I_b は order b の単位行列、 $J_{b \cdot b}$ は要素が全て 1 である $b \times b$ 行列、 $\{P \setminus Q\}_a$ は対角上が全て P 、非対角要素が全て Q である $a \times a$ 行列 (P, Q は行列でもよい)。

この 4 つの統計量だけを用いて、通常行われている帰無仮説の検定を与える。

i) 交互作用 ($\alpha\beta$) について

帰無仮説は

$$H_{\alpha\beta}: E(\mu_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

である。

検定統計量を

$$W_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} / \left\{ \left(\frac{1}{ab} \sum_i^a \sum_j^b n_{ij}^{-1} \right) S_e \right\}$$

とし、棄却限界は通常 F 分布の値 $F_{\alpha\beta}$ とおける

$$\text{棄却域} : W_{\alpha\beta} > F_{\alpha\beta} = F((a-1)(b-1), N-ab; 0.05)$$

とする。この時オービルの過誤の確率が正確に 0.05 かどうかの値がわか
 ないので問題である。この場合のこの確率を $P_{\alpha\beta}$ とおく。

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta} &= P_{\alpha\beta} \{ W_{\alpha\beta} > F_{\alpha\beta} \mid H_{\alpha\beta} \} \\ &= P_{\alpha\beta} \left\{ W_{\alpha\beta} > \frac{(a-1)(b-1)}{N-ab} F_{\alpha\beta} \mid H_{\alpha\beta} \right\} \end{aligned}$$

ただし、

$$(4) \quad W_{\alpha\beta} = \frac{(a-1)(b-1) S_{\alpha\beta}}{\text{tr}\{V(Z) \cdot \hat{\Sigma}_{\alpha\beta}\}} \bigg/ \frac{(N-ab) S_e}{\sigma_e^2}$$

この $P_{\alpha\beta}$ を計算するために、 $W_{\alpha\beta}$ の分布を導く。

帰無仮説の下では、 $W_{\alpha\beta}$ の分子成分の統計量の同時分布の特性関数

は

$$\psi(t_{\alpha\beta}, t_e) = \left| I_{ab} - 2it_{\alpha\beta} \frac{(a-1)(b-1)}{\text{tr}\{V(Z) \cdot \hat{\Sigma}_{\alpha\beta}\}} V(Z) \hat{\Sigma}_{\alpha\beta} \right|^{-\frac{1}{2}} (1 - 2it_e)^{-\frac{N-ab}{2}}$$

である。ここで $V(Z)$ を 2 つの部分 V_0, V_1 にわける。

$$(5) \quad V(Z) = V_0 + V_1 = \frac{\sigma_e^2}{n} I_{ab} + \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{11}} - \frac{1}{n} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{n_{1b}} - \frac{1}{n} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \frac{1}{n_{a1}} - \frac{1}{n} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \frac{1}{n_{ab}} - \frac{1}{n} \end{bmatrix} \sigma_e^2$$

ただし、

$$n = \left(\frac{1}{ab} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij}^{-1} \right)^{-1}$$

$$\omega(V_1 \cdot \varphi_{x_1}) = 0$$

$$\omega(V_0 \cdot \varphi_{x_2}) = \omega(V(z) \cdot \varphi_{x_2}) = \eta^{-1} \cdot \sigma^2$$

であるから

$$\psi(t_{x_3}, \bar{v}_e) = \left| i_{ab} - 2it_{x_3} \frac{(a-1)(b-1)}{\sigma^2} \varphi_{x_3} - 2it_{x_3} \frac{n(a-1)(b-1)}{\sigma^2} V_1 \cdot \varphi_{x_3} \right|^{-\frac{1}{2}} \\ \times (1 - 2it_e)^{-\frac{n-ab}{2}}$$

となる。

この行列式の計算のため次の様な直交変換を考える。

$$(6) \quad O' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{ab}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{ab}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{ab}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{ab}} \\ \frac{\delta_{21}}{\sqrt{b}} & \dots & \frac{\delta_{21}}{\sqrt{b}} & \dots & \frac{\delta_{2a}}{\sqrt{b}} & \dots & \frac{\delta_{2a}}{\sqrt{b}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta_{a1}}{\sqrt{b}} & \dots & \frac{\delta_{a1}}{\sqrt{b}} & \dots & \frac{\delta_{aa}}{\sqrt{b}} & \dots & \frac{\delta_{aa}}{\sqrt{b}} \\ \frac{\eta_{21}}{\sqrt{a}} & \dots & \frac{\eta_{21}}{\sqrt{a}} & \dots & \frac{\eta_{2b}}{\sqrt{a}} & \dots & \frac{\eta_{2b}}{\sqrt{a}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\eta_{b1}}{\sqrt{a}} & \dots & \frac{\eta_{b1}}{\sqrt{a}} & \dots & \frac{\eta_{bb}}{\sqrt{a}} & \dots & \frac{\eta_{bb}}{\sqrt{a}} \\ \delta' \otimes \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O'_{11} \\ O'_{\alpha} \\ O'_{\beta} \\ O'_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

をとし、

$$\delta' = \begin{bmatrix} \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2a} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{a1} & \delta_{a2} & \dots & \delta_{aa} \end{bmatrix}, \quad \eta' = \begin{bmatrix} \eta_{21} & \eta_{22} & \dots & \eta_{2b} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_{b1} & \eta_{b2} & \dots & \eta_{bb} \end{bmatrix} \quad \text{であり、}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & \sqrt{1-a} \\ \delta' \end{bmatrix} \text{ および } \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{b}} & \sqrt{1-b} \\ \eta' \end{bmatrix} \text{ は直交行列, } \otimes \text{ は Kronecker 積を}$$

表わす。この直交変換によって、

$$\psi(t_{\alpha\beta}, t_e) = \left| (1 - 2it_{\alpha\beta}) I_{(a-1)(b-1)} - 2it_{\alpha\beta} n O'_{\alpha\beta} n O_{\alpha\beta} \right. \\ \left. \times (1 - 2it_e)^{-\frac{N-ab}{2}} \right|$$

を得る。ただし,

$$(7) \quad \pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_a} - \frac{1}{n} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{n_b} - \frac{1}{n} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \frac{1}{n_{ab}} - \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

である。これは補助定理 2 に於て $B^x = n O'_{\alpha\beta} \pi O_{\alpha\beta}$ とした場合
たつていより求める $P_{\alpha\beta}$ は

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-r)!}{r!} \sum_{k_1=1}^{(a-1)(b-1)} \cdots \sum_{k_r=1}^{(a-1)(b-1)} f_{k_1} \times \cdots \times f_{k_r} \sum_{p=0}^{\sum_{i=1}^r k_i} \binom{\sum_{i=1}^r k_i}{p} (-1)^p \\ \times \int_0^{\infty} f_2(q; (a-1)(b-1) + 2p, N-ab) dq \\ \times \frac{(a-1)(b-1)}{N-ab} F_1(a-1)(b-1, N-ab; 0.05)$$

となる。 f_{k_i} の値は補助定理 3 から計算される。数値例は主効果 α
の検定の場合と一緒に後記する。

(ii) 主効果 α について

、交互作用を因する仮説が採択された場合には、主効果 α についての
を考える。この場合の基本仮定と仮説は

$$\text{基本仮定} : E(\bar{y}_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

$$\text{仮説}(H_a) : E(\bar{y}_{ijk}) = \mu + \beta_j$$

である。検定統計量を

$$W'_\alpha = S_\alpha / \frac{1}{n} S_e$$

とし、棄却限界は、

$$W_\alpha > F(a-1, N-ab; 0.05)$$

とする。この場合、 $S_{\alpha\beta}$ の情報を使わないのは $S_{\alpha\beta}$ が S_α と独立でない

ため近似が悪くなるので、多元配置であれば無理にそうしなくても、

S_e の自由度は十分大きいことが期待されるからである。

交互作用の場合と同様に、 α 種類の過誤の確率 P_α を計算する。

$$\begin{aligned} P_\alpha &= P\{W_\alpha > F(a-1, N-ab; 0.05) | H_\alpha\} \\ &= P\left\{W_\alpha > \frac{a-1}{N-ab} F(a-1, N-ab; 0.05) | H_\alpha\right\} \end{aligned}$$

ただし、

$$W_\alpha = \frac{(a-1)S_\alpha}{\text{tr}(V(Z) \cdot G_\alpha)} \bigg/ \frac{(N-ab)S_e}{\sigma_e^2}$$

つぎに、 W_α の分布を導く。帰無仮説の下では、 W_α の分母と分子の統計量の同時分布の特性関数は次の通りである。

$$\psi(t_\alpha, t_e) = \left| I_{ab-2it_\alpha} \frac{a-1}{\text{tr}(V(Z) \cdot G_\alpha)} V(Z) G_\alpha \right|^{-\frac{1}{2}} (1-2it_e)^{-\frac{N-ab}{2}}$$

以下、交互作用の場合と全く同様に、(5)式の様に $V(Z)$ を分解し

(6)式の様な自変変換を施すと

$$\psi(t_\alpha, t_e) = \left| (1-2it_\alpha) I_{a-1} - 2it_\alpha \eta O_\alpha \eta O_\alpha \right|^{-\frac{1}{2}} (1-2it_e)^{-\frac{N-ab}{2}}$$

となる。これより、補助定理 2 を用いて

$$P_\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-r)!}{r!} \sum_{\alpha_1=1}^{a-1} \cdots \sum_{\alpha_r=1}^{a-1} \left(\prod_{i=1}^r f_{\alpha_i} \right) \sum_{p=0}^{\sum_{i=1}^r \alpha_i} \left(\frac{t}{p} \alpha_i \right) (-1)^p \times$$

$$\times \int_0^{\infty} h(q; a-1+2p, N-ab) dq \\ \frac{a-1}{N-ab} F(a-1, N-ab; 0.05)$$

を得る。 f_a の値は、補助定理 3 に於て $B^* = n O_a \cap O_a$ として求められるが、若干の f_a の値は次の様に簡単に求めさせた。

$$f_0 = 1 \quad (\text{定義})$$

$$f_1 = 0 \quad (\because t_1 \cap t_1 = \emptyset)$$

$$(8) \quad f_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a-2}{a} \sum_{i=1}^a \left\{ \frac{n}{b} \sum_{j=1}^b \left(\frac{1}{n_{ij}} - \frac{1}{n} \right) \right\}^2$$

$$f_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a-3}{a} \sum_{i=1}^a \left\{ \frac{n}{b} \sum_{j=1}^b \left(\frac{1}{n_{ij}} - \frac{1}{n} \right) \right\}^3$$

$$f_4 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{a-4}{a} \left[\sum_{i=1}^a \left\{ \frac{n}{b} \sum_{j=1}^b \left(\frac{1}{n_{ij}} - \frac{1}{n} \right) \right\}^4 - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^a \left(\frac{n}{b} \sum_{j=1}^b \left(\frac{1}{n_{ij}} - \frac{1}{n} \right) \right)^2 \right\}^2 \right]$$

etc.

n_{ij} のはらつきはこの f_a ($a=1, 2, \dots, a-1$) を通してのみ影響すること、また、 $\sum_j n_{ij}^{-1}$ が i によらずに定数である場合には、 α に関する検定は正確なものになっていることもわかる。

(iii) 主効果 β について

主効果 α についての議論と全く同様にして次の結果を得る。

$$p_\beta = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-r)!}{r!} \sum_{a_1=1}^{b-1} \dots \sum_{a_r=1}^{b-1} \left(\prod_{i=1}^r f_{a_i} \right) \sum_{p=0}^{\frac{r}{2} a_i} \left(\frac{r}{p} a_i \right) (-1)^p$$

$$\times \int_0^{\infty} h(q; b-1+2p, N-ab) dq \\ \frac{b-1}{N-ab} F(b-1, N-ab; 0.05)$$

f_a の値の計算には $B^* = n O_\beta' \cap O_\beta$ を使う。その結果は (8) 式で $i \rightleftharpoons j$, $a \rightleftharpoons b$ の入れ替えをしたものに等しい。

β の検定の場合は $\sum_{j=1}^n \eta_{ij}^{-1}$ が β によらない定数の時正確なものとなる。
つぎの数値例を示す。

取り上げるデザインは次のものである。

D1	2	2	2	D2	1	1	1	D3	1	1	4	D4	1	2	2
	2	2	2		2	2	2		1	4	1		2	3	2
	2	2	2		3	3	3		4	1	1		1	2	3

D5	1	1	1	1	1	D6	1	1	2	2	3
	2	2	2	2	2		2	2	3	3	1
	3	3	3	3	3		3	3	1	1	2

D7	1	2	2	2	2
	2	2	2	2	1
	2	2	1	2	2

D1 については勿論正確な検定になっている。

また、次頁の表から η_{ij} のばらつきによって f_{β} は余り大きな値を取らず、確率 P は余り公称値からずれないことがわかる。 f_{β} の中では f_2 の影響が殆どで有り、 $|f_2|$ が 0.1 位の時にはずれは 0.2% 位、0.2 位の時にはずれが 0.4% 位であることがわかる。

以上は二元配置の検定をしてきたが、一般の R 元配置でも類似の議論が成立する。ある r 次の交互作用の検定については $\eta_{ij\alpha\beta\gamma\delta}^{-1}$ を関係のな

R- τ 図の添字について平均したもののばらつきが影響することを目

明にあらわす。

第一種の通誤の確率の表

D2	α	β	$\alpha\beta$	D3	α	β	$\alpha\beta$	D4	α	β	$\alpha\beta$
f_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f_2	-0.1074	0	-0.2149	0	0	-0.1358	-0.0135	-0.0510	-0.1924		
f_3	—	—	0.0000 (10^{-7})	—	—	-0.0041	—	—	0.0350		
f_4	—	—	0.0115	—	—	0.0027	—	—	-0.0009		
P_0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	
P_1	0.1981	0	0.3920	0	0	0.2550	0.0249	0.0940	0.3040		
P_2	0.0033	0	0.0145	0	0	0.0055	10^{-5}	0.0007	0.0119		
P_3	-0.0002	0		0	0		10^{-7}	10^{-7}			
P	5.2012	5.0	5.4065	5.0	5.0	5.2605	5.0249	5.0947	5.3159		

D5	α	β	$\alpha\beta$	D6	α	β	$\alpha\beta$	D7	α	β	
f_1	0	0	f_1 0 f_2 -0.4298	0	0	f_1 0 f_2 -0.3438	0	0	0		
f_2	-0.1074	0	f_3 10^{-7} f_4 0.0693	-0.0043	0	f_3 -0.0068 f_4 0.0436	-0.0064	-0.0278			
f_3	—	0	f_5 10^{-7} f_6 -0.0050	—	0	f_5 0.0016 f_6 -0.0024	—	-0.0007			
f_4	—	0	f_7 10^{-9} f_8 0.0001	—	0	f_7 -0.0009 f_8 10^{-5}	—	0.0001			
P_0	5.0	5.0	5.0 0.	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0		
P_1	0.2654	0	0.3197	0.0011	0	0.2558	0.0015	0.0038			
P_2	0.0044	0	-0.0095	10^{-6}	0	-0.0062	10^{-5}	10^{-5}			
P_3	-0.0005	0	0.0015	10^{-7}	0	0.0008	10^{-7}	10^{-6}			
P	5.2693	5.0	5.3117	5.0011	5.0	5.2504	5.0015	5.0038			

§ 3. 母数線型の場合 — 近似検定 — 正統分布の下での分布

今節では、検定統計量の分布仮説の場合を導き、パラメータがどのような値になるべきかを導く。

まず、

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

が $N(\mu, \Sigma)$ (多次元正規分布) に従っているとす。この時、

$$x' A x \quad (A: \text{実対称行列})$$

の分布を考える。

$x' A x$ の特性函数 $\psi(t)$ は次の様である。

$$\begin{aligned} \psi(t) &= E(\exp(it x' A x)) \\ &= |I - 2it A \Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp \frac{1}{2} \{ \mu' (I - 2it A \Sigma)^{-1} \Sigma^{-1} \mu \\ &\quad - \mu' \Sigma^{-1} \mu \} \end{aligned}$$

この結果を (4) 式の $W_{\alpha\beta}$ の分子の統計量に適用する。

$$W_{\alpha\beta} = \frac{(a-1)(b-1) S_{\alpha\beta}}{n \{ V(Z) \cdot G_{\alpha\beta} \}} = \frac{(O'_{\alpha\beta} Z)' (O_{\alpha\beta} Z)}{n^{-1} \sigma_e^2}$$

であり、 $O'_{\alpha\beta} Z$ は $N(O'_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}, O'_{\alpha\beta} V(Z) O_{\alpha\beta})$ に従うから

$W_{\alpha\beta}$ の特性函数は

$$\begin{aligned} \psi(t) &= |I_{(a-1)(b-1)} - 2it \frac{1}{n^{-1} \sigma_e^2} O'_{\alpha\beta} V(Z) O_{\alpha\beta}|^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \exp \frac{1}{2} \{ (O'_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta})' (I - 2it \frac{1}{n^{-1} \sigma_e^2} O'_{\alpha\beta} V(Z) O_{\alpha\beta})^{-1} (O'_{\alpha\beta} V(Z) O_{\alpha\beta})^{-1} \\ &\quad \times O'_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} - (O'_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta})' (O'_{\alpha\beta} V(Z) O_{\alpha\beta})^{-1} O'_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} \} \end{aligned}$$

となる。若干の計算の後、

$$\gamma(t) = \left| I - \frac{1}{n^{-1} \sigma_e^2} O_{\alpha\beta}' V(Z) O_{\alpha\beta} \right|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp \left\{ \frac{1}{n^{-1} \sigma_e^2} (O_{\alpha\beta}' M_{\alpha\beta})' \frac{2it}{n^{-1} \sigma_e^2} \left(I - \frac{2it}{n^{-1} \sigma_e^2} O_{\alpha\beta}' V(Z) O_{\alpha\beta} \right)' O_{\alpha\beta}' M_{\alpha\beta} \right\}$$

を得る。

ここで、(5)式の様に $V(Z)$ を V_0 と V_1 にわけると $\psi(t)$ は次の様に書ける。

$$\psi(t) = \left| (1 - 2it) I_{(a-1)(b-1)} - 2it \cdot n O_{\alpha\beta}' \pi O_{\alpha\beta} \right|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp \left\{ \frac{n}{\sigma_e^2} \cdot \frac{it}{1-2it} (O_{\alpha\beta}' M_{\alpha\beta})' \left(I - \frac{2it}{1-2it} n O_{\alpha\beta}' \pi O_{\alpha\beta} \right)' O_{\alpha\beta}' M_{\alpha\beta} \right\}$$

ただし、 π は (7) 式の π であり、

$$O_{\alpha\beta}' M_{\alpha\beta} = O_{\alpha\beta}' \begin{bmatrix} (\alpha\beta)_{11} \\ \vdots \\ (\alpha\beta)_{1b} \\ \vdots \\ (\alpha\beta)_{a1} \\ \vdots \\ (\alpha\beta)_{ab} \end{bmatrix}$$

は、 $(\alpha\beta)_{ij}$ に関する $(a-1)(b-1)$ 個の直交対比をあらわしている。

$\psi(t)$ の式中の exponential の中の逆行列を展開すると第一項が

$$\frac{it}{1-2it} \cdot \frac{(O_{\alpha\beta}' M_{\alpha\beta})' (O_{\alpha\beta}' M_{\alpha\beta})}{n^{-1} \sigma_e^2}$$

になっていることがわかる。従って

$$\left| \frac{2it}{1-2it} \right| \cdot \| n O_{\alpha\beta}' \pi O_{\alpha\beta} \|^{\frac{1}{2}}$$

が十分小さければ、ほとんどの検定になっていることが期待される。

§2. (ii) および (iii) で論じた α および β に関する場合も $O_{\alpha\beta}$

を O_{α} および O_{β} に改めるだけで類似の議論が成立する。

この数値例については検討中であり、追って報告したい。

引用文献

- [1] Hirotsu, C. (1966): "Estimating variance components in a two-way layout with unequal numbers of observations", Rep. Stat. Appl. Res., JUSE, Vol. 13, No. 2, PP. 29-34.
- [2] Plackett, R.L. (1960): Regression Analysis, Oxford at the Clarendon Press.