

量子スピングラス模型の画像修復への応用¹

東京工業大学 大学院 理工学研究科 物性物理学専攻 井上純一²

1 はじめに

画像修復問題、視覚の計算理論におけるマルコフ確率場 (Markov Random Fields: MRF's) モデルはベイズ統計を介し統計力学の問題として扱うことができる。事後確率を最大にする推定である MAP (Maximum A Posterior) 推定は、ランダム磁場スピン系の基底エネルギー探索に相当する。一方、ある画素に注目し、その画素に関し事後確率を周辺化した、周辺確率を最大化する推定である MPM (Maximizer of the Posterior Marginals) 推定 [1] は有限温度でのランダム磁場スピン系の熱平衡状態の期待値 (の符号) を推定値として採用する。どちらの推定においてもギブス分布で導入された熱揺らぎが重要な役割を果たし、最適化問題としての MAP 推定では、温度制御が局所最小からの脱出を可能にし、MPM 推定では各画素の誤り率を最小にするような熱平衡状態 (分布) を温度が制御する。本研究では、この熱揺らぎの代わりに量子論的な揺らぎを導入し、量子揺らぎが修復率に及ぼす影響を解析的手法と計算機実験によって明らかにする。

2 問題設定



原画像



劣化画像

¹ この原稿は、当研究会にて *Application of the quantum spin glass model to image restoration* という英タイトルで発表されました。

² E-mail: jinoue@stat.phys.titech.ac.jp

ファックス等で画像を送る場合等、一般的に原画像にはノイズがかかり、何らかの方法でノイズの部分除去し、原画像を修復する必要がある。このように我々の目的は、画質の落ちた画像から元の画像を復元することである。我々が知り得るのは劣化画像のみであるから、この問題は視覚の計算理論における2次元画像から3次元画像の構成(奥行き方向の構成)と同様に不良設定問題であり、観測値(劣化画像)以外に、画像に関して何らかの先見性を仮定しない限り解けない問題である。以下でこの不良設定問題に対する我々の方法とその結果を見て行くことにする。

3 定式化

簡単のため、黒白画像の修復を考える。原画像 $\{\xi\} \equiv \{\xi_i | \xi_i = \pm 1; i = 1, \dots, N\}$ は確率分布 $P(\xi)$ から生成されたとし、原画像の劣化過程 $\{\xi\} \rightarrow \{\tau\}$ を次の条件付き確率分布で定義する。

$$P_{\text{out}}(\{\tau\}|\{\xi\}) = \frac{1}{(2\cosh\beta_\tau)^N} \exp\left(\beta_\tau \sum_i \tau_i \xi_i\right)$$

ここで、ノイズは各画素に独立に加わることを仮定した。ここで、各画素 ξ_i が確率 p で反転する(確率 $1-p$ で不変)とすれば、 $\beta_\tau = (1/2)\log(1-p/p)$ の関係が成り立つ。また、原画像を転送する際、各画素 ξ_i とともに、任意の2つの画素の積 $\xi_i \xi_j \equiv J_{ij}$ を送ることになると[2]、この積は次の確率分布で劣化される。

$$P_{\text{out}}(\{J\}|\{\xi\}) = \frac{1}{(2\cosh\beta)^{N_B}} \exp\left(\beta_J \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \xi_i \xi_j\right)$$

このとき、ベイズ公式から劣化(観測)画像が $\{\tau\}$ である条件下で推定値が $\{\sigma\}$ である確率、つまり事後確率は

$$\begin{aligned} P(\{\sigma\}|\{\tau\}) &= \frac{\exp\left(\beta \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \tau_i \sigma_i + \beta_d \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j\right)}{\mathcal{Z}(\beta_d, h)} \\ &\equiv \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta_d, h)} e^{-\mathcal{H}_{\text{eff}}} \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、「画像は局所的には滑らかだろう」という先見性を事前分布

$$P_d(\sigma) \sim \exp\left(\beta_d \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j\right)$$

を用いて導入した。 $\mathcal{Z}(\beta_d, h)$ は規格化定数である。MPM 推定の立場では、 i -番目の画素の推定値は

$$\text{sgn}\left(\frac{\text{Tr}_\sigma \sigma_i e^{-\mathcal{H}_{\text{eff}}}}{\text{Tr}_\sigma e^{-\mathcal{H}_{\text{eff}}}}\right) \equiv \text{sgn}(\langle \sigma_i \rangle)$$

で与えられる。上の表式において、MPM 推定は $\beta_d, h \rightarrow \infty$ の極限で MAP 推定、つまり、ハミルトニアン

$$\mathcal{H} = -\beta \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \tau_i \xi_i - \beta_d \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

の基底状態探索に一致する。

さて、この古典系では各画素の状態が黒又は白の2つの状態のみで表される。そこで、我々は $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ に 黒と白の状態を重ね合わせた状態 を出現させるような量子力学的外場 $\Delta \sum_i \hat{\sigma}_i^x$ を加え、量子系

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{eff}} = -\beta \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z - h \sum_i \tau_i \hat{\sigma}_i^z - \beta_d \sum_{\langle ij \rangle} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z - \Delta \sum_i \hat{\sigma}_i^x \quad (1)$$

での MPM 推定を考えることにする。ここで、 $\hat{\sigma}^x, \hat{\sigma}^z$ はパウリ行列の x, z 成分

$$\hat{\sigma}_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。量子揺らぎの大きさ、つまり黒と白の間の「曖昧さ」をもった状態の出現頻度は Δ で制御される。また、 $\Delta \hat{\sigma}_i^x$ は $\hat{\sigma}_i^z$ の固有状態 $|\sigma_i^z = \pm 1\rangle$ 間のトンネル効果を表すと解釈することもできる (つまり、 $|\sigma_i^z = \pm 1\rangle$ 間の遷移確率が $|\langle \sigma_i = +1 | \Delta \hat{\sigma}_i^x | \sigma_i^z = -1 \rangle|^2 = \Delta^2$)。このとき、推定の正当率は原画像と修復画像の重なり

$$M(\beta_d, h, \Delta) = \text{Tr}_{\{\xi\}, \{\tau\}} P_s(\xi) P_{\text{out}}(\{\tau\} | \{\xi\}) \xi_i \text{sgn}(\langle \sigma_i^z \rangle)$$

で評価される。我々はこの重なりを

- 無限次元量子スピングラスモデル (1) のレプリカ法による解析計算
- 2次元標準画像に対する量子モンテカルロ計算

によって評価した (詳細は投稿準備中である [3] を参照されたい)。この際、オペレータ $\hat{\sigma}^x$ と $\hat{\sigma}^z$ の間の非可換性による対角和の困難は鈴木-Trotter 公式 [4] を用いてこの量子系を次元が一つだけ上がった古典系にマップすることにより取り除くことができる。

上の形で量子揺らぎを導入し、量子揺らぎを平均場アニーリングの制御変数とすることにより、MAP 解を求める研究が田中と堀口 [5] によりなされているが、彼らはこの量子揺らぎを最適化手法として使っており、分布そのものを扱う我々の方法とは異なることを明記しておきたい。

4 結果

図 1 に無限次元モデルでの解析計算結果 (グラス項無し) を載せる。無限次元モデルは、全ての画素が相互作用をしているという人工的なモデルではあるが、重なり等の巨視的物理量の定性的な振舞いを調べるには十分である [2, 6]。図 1 (a) から、重なりの温度 $T_d \equiv \beta_d^{-1}$ 、量子揺らぎ Δ 依存性は極めて似ていることがわかる。

また、図 1 (b) は、スピングラス相互作用項により修復率が大幅に改善されることを示している。画素の積を同時に送ることにより、情報に冗長性を持たせたため、ノイズに強い修復が可能になったのであり、符号理論ではこれを「畳み込み符号」と呼んでいる。

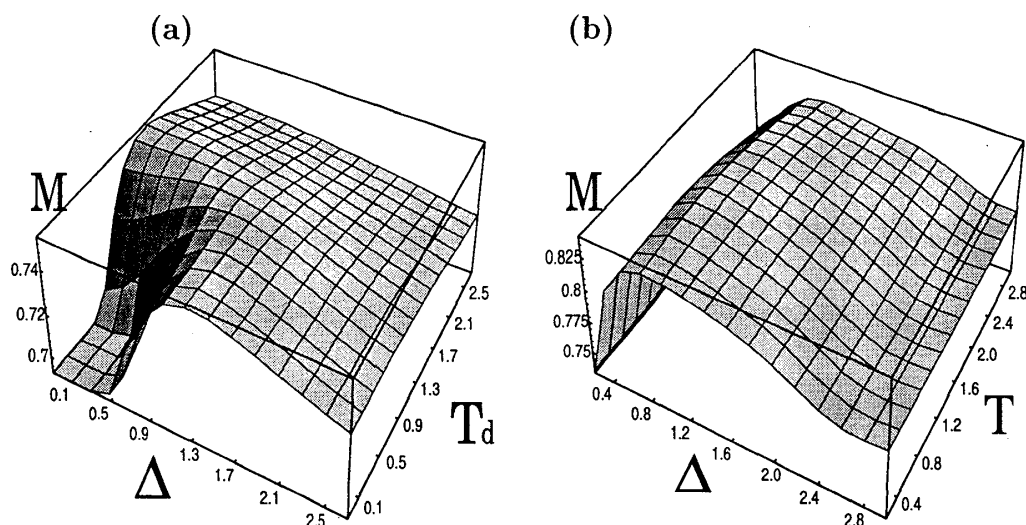


図 1: (a) $\beta = 0$ (スピングラス項なし) のときの重なり M の温度 T_d 及び横磁場 Δ 依存性。 $\tau = \tau_0 = 1.0, h = \beta_d/2$ とした。(b) $\beta \neq 0$ のときの重なり M の Δ および $T \equiv \beta^{-1}$ 依存性 ($\beta_d = 1.0$)。

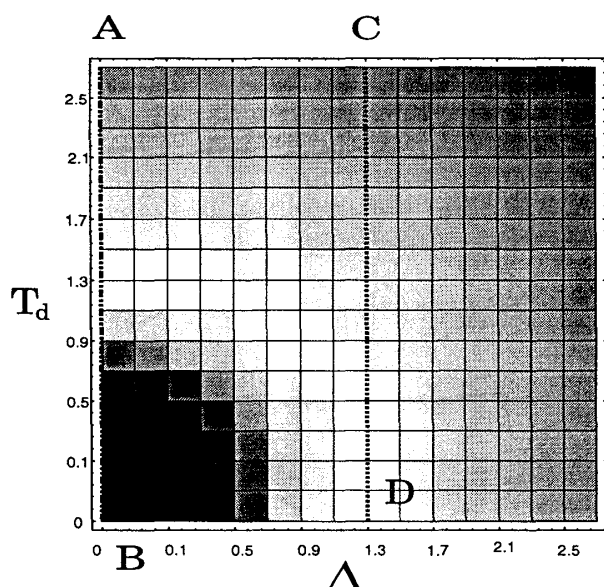


図 2: 重なりの高低分布。色の濃い部分ほど修復率が低い。 $\overline{AB}$ 上での修復率は巨視的変数 T_d の選び方によっては極めて悪い修復結果をもたらす可能性があるのに対し、 $\overline{CD}$ 上での修復は安全であると言える。

ぎをほとんど入れない場合は、極めて悪い修復結果となる一方、量子揺らぎを大きくするにつれ、「鈴木」という文字が浮かび上がってくることがわかる。この標準画像についての計算機実験による、重なりの横磁場 Δ 依存性を図 4 にのせる。これらの結果から明らかに、有限の量子揺らぎ Δ で修復率の最良性があることが確かめられる。

図 2 は、重なりの高低の分布を示したもののだが、この図より、巨視的変数の推定誤差による影響を受けずに、安全に修復が可能な領域が現れることを見ることができる。つまり、量子揺らぎを導入することにより、巨視的変数 β_d 等の変化に対してロバストな修復が可能になるわけである。

この傾向は図 2 のシミュレーションの結果からも見てとれる。図 3 は標準画像 (「鈴木」の印鑑。 <ftp://ftp.lab1.kuis.kyoto-u.ac.jp/pub/sidba> で一般公開されているものを用いた。) についての量子モンテカルロシミュレーションの結果である。この図から、量子揺ら

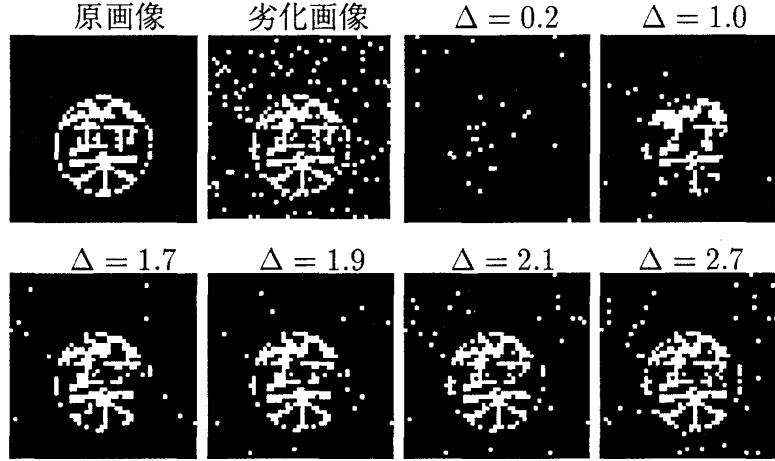


図 3: 標準画像による計算機実験。10% ノイズとは、原画像と劣化画像との重なりが ~ 0.9 を意味する。エラーバーは 5 回の独立な計算についてとった。画像のサイズは 50×50 であり、トロッター数は 50 に選んだ。

一方、重なり of 最大値のみに注目すれば、量子揺らぎに基づく MPM 推定の重なり of 最大値は、熱揺らぎのそれを越えないことが、次の不等式により示せる。

$$\begin{aligned}
 & M_{\max}^{(\text{classical})}(\beta_\tau, P_s) \\
 & \quad \text{Tr}_{\{\tau, \xi\}} \xi_i \exp(\beta_\tau \sum_i \tau_i \xi_i) P_s(\xi) \\
 & \times \frac{\text{Tr}_{\sigma} \sigma_i \exp(\beta_\tau \sum_i \tau_i \sigma_i) P_s(\sigma)}{|\text{Tr}_{\sigma} \sigma_i \exp(\beta_\tau \sum_i \tau_i \sigma_i) P_s(\sigma)|} \\
 & = M_{\max}^{(\text{classical})}(\beta_\tau, P_s) \\
 & \geq \text{Tr}_{\{\tau, \xi\}} \xi_i \exp(\beta_\tau \sum_i \tau_i \xi_i) P_s(\xi) \\
 & \times \frac{\text{Tr}_{\hat{\sigma}} \hat{\sigma}_i^z \exp(h_* \sum_i \tau_i \hat{\sigma}_i^z + \Delta_* \sum_i \hat{\sigma}_i^x) P_{d*}(\hat{\sigma})}{|\text{Tr}_{\hat{\sigma}} \hat{\sigma}_i^z \exp(h_* \sum_i \tau_i \hat{\sigma}_i^z + \Delta_* \sum_i \hat{\sigma}_i^x) P_{d*}(\hat{\sigma})|} \\
 & = M_{\max}^{(\text{quantum})}(h_*, \Delta_*, P_{d*})
 \end{aligned}$$

ここで、 $\text{sgn}(x) = x/|x|$, $(\langle \mathcal{A} \rangle)^2 / |\langle \mathcal{A} \rangle| \geq (\langle \mathcal{A} \rangle)(\langle \mathcal{B} \rangle) / |\langle \mathcal{B} \rangle|$ を用いた。また、 h_*, Δ_*, P_{d*} は $M_{\max}^{(\text{quantum})}$ を与えるパラメータ値とする。

5 まとめ

本研究ではマルコフ確率場モデルに量子力学的揺らぎを導入し、このモデルに対する MPM 推定の修復率を解析的、計算機実験の 2 通りの方法により評価した。得られた結果

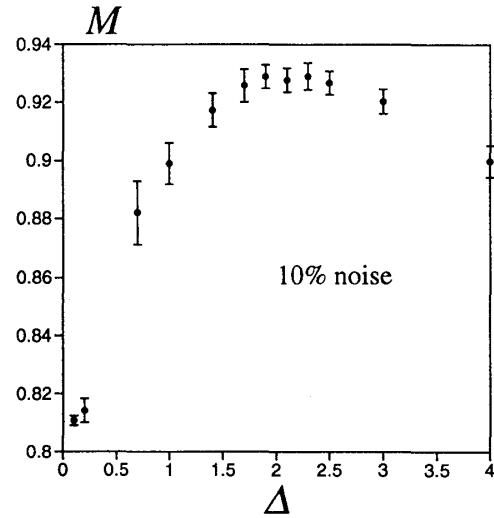


図 4: 図 3 における重なり of 横磁場依存性。有限の Δ で最良性が確かめられる。

より、量子揺らぎは β_d 等の巨視的な変数を推定する際に生じる推定誤差を押える方向に働くことがわかった。これは大きな利点であると言える。本研究結果を足掛かりに画像修復という問題に対し、より効果的に作用する量子揺らぎの導入、及び修復方法の改善を今後行なっていく予定である。

謝辞

日頃から議論にお付き合い頂いている東京工業大学大学院理工学研究科の西森秀稔教授に感謝します。東北大学大学院情報科学研究科の田中和之助教授には画像修復問題に関する私の疑問の一つひとつに丁寧に答えて頂き、感謝の念に耐えません。また、東北大学大学院情報科学研究科の堀口剛教授には、今後のこの研究の方向に関し有益な助言を頂きました。最後に、有益な議論をしていただいた本研究会の参加者の皆様全員に深く感謝いたします。

本研究は平成 11 年度文部省科学研究費補助金 (奨励研究 A、課題番号 11740225) の援助のもとで行なわれています。

参考文献

- [1] J. Marroquin, S. Mitter and T. Poggio, Probabilistic Solution of Ill-Posed Problems in Computational Vision. *Journal of American Statistical Association*. **82** 76 (1987).
- [2] H. Nishimori and K. Y. M. Wong, Statistical Mechanics of Image Restoration and Error-Correcting Codes. *Physical Review E* **60** 132 (1999) .
- [3] J. Inoue, 投稿準備中
- [4] M. Suzuki, Relationship between d-Dimensional Quantum Spin Systems and (d+1)-Dimensional Ising Systems. *Progress of Theoretical Physics* **56** 1454 (1976).
- [5] 田中和之、堀口剛、「画像修復に対する量子統計力学的反復計算法」電子情報通信学会論文誌 **J80-A** 2117 (1997).
- [6] D. M. Carlucci and J. Inoue, Image Restoration using The Chiral Potts Spin Glass. *Physical Review E* 印刷中.