

Some inequalities between invariants of blocks

東京農工大学・工 和田俱幸 (Tomoyuki Wada)
Tokyo University of Agriculture and Technology

これは Jena 大学 (Germany) の Burkhard Külshammer との共同研究の報告です.

1 Introduction

p を素数とし, B を有限群の G の p -block でその Cartan 行列を $C = (c_{ij})$ とする. また $k = k(B)$ を B の通常既約指標の個数, $l = l(B)$ を既約 Brauer 指標の個数とする. [1] で J. Brandt は次が成り立つことを示した.

$$(*) \quad k(B) \leq 1 - l(B) + \sum_{i=1}^{l(B)} c_{ii}.$$

[12] で著者は次が成り立つことを示した.

$$(**) \quad k(B) \leq \sum_{i=1}^{l(B)} c_{ii} - \sum_{i=1}^{l(B)-1} c_{i,i+1}.$$

$\rho(B)$ を C の Perron-Frobenius 固有値とすると, 著者は [12] で, ある種の p -可解群では, $k(B) \leq \rho(B)$ が成り立つことを示した. D を B の defect group とすると, p -可解群では $\rho(B) \leq |D|$ が成り立つので, もし $k(B) \leq \rho(B)$ という不等式が p -可解群で成り立つならば, Brauer の $k(B)$ -予想 $k(B) \leq |D|$ が p -可解群のときに言えることになる. ただし [12] では (**) から直接 $k(B) \leq \rho(B)$ を導くことのできない場合がたくさんあった. その後 Külshammer の指摘により, (**) の証明の中には A 型の positive definite quadratic form が使われていて, 他の weakly positive な integral form からこのような不等式がたくさん得られることが分かった. その中には良い不等式もあり (**) では言えなかったが, それを使うと $k(B) \leq \rho(B)$ が言える場合があった.

2 Integral quadratic forms

Definition 1 *integral quadratic form* とは係数が整数である 2 次形式

$$q = q(X_1, \dots, X_l) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq l} q_{ij} X_i X_j$$

のこととする. q が *weakly positive* とは $q(z) > 0$ for all $z \in \mathbf{Z}^l$ with $z > 0$ のときをいう. ここで $\leq$ は $\mathbf{Z}^l$ 上の半順序で $(x_1, \dots, x_l) \leq (y_1, \dots, y_l)$ を $x_i \leq y_i$ for all $i = 1, \dots, l$ のこととする. また $(x_1, \dots, x_l) \leq (y_1, \dots, y_l)$ かつ $(x_1, \dots, x_l) \neq (y_1, \dots, y_l)$ のとき $(x_1, \dots, x_l) < (y_1, \dots, y_l)$ と書く. $0 \neq z \in \mathbf{Z}^l$ に対して $q(z) > 0$ のとき q を *positive definite* という. このとき次が成り立つ.

Theorem A. *Let p be a prime number, and let B be a p -block of a finite group G with Cartan matrix $C = (c_{ij})$. Moreover, let $q = \sum_{1 \leq i \leq j \leq l(B)} q_{ij} X_i X_j$ be a weakly positive integral quadratic form. Then*

$$k(B) \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq l(B)} q_{ij} c_{ij}.$$

In particular, if q is a positive definite integral quadratic form then the inequality above holds for the Cartan matrix with respect to an arbitrary basic set.

Proof. $r = 1, \dots, k(B)$ に対し $d_r = (d_{r1}, \dots, d_{rl(B)})$ を B の decomposition 行列 $D = (d_{ij})$ の第 r 行とする. すると

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq l(B)} q_{ij} c_{ij} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq l(B)} \sum_{r=1}^{k(B)} q_{ij} d_{ri} d_{rj} = \sum_{r=1}^{k(B)} q(d_r) \geq k(B),$$

より不等式が成立する.

また B の任意の basic set S に対し C', D' を B の S に対する Cartan 行列と decomposition 行列とする. すると $C' = D'^T D'$ より q が positive definite ならば D' の任意の d'_r に対して $q(d'_r) > 0$ が成り立つ.

3 Positive definite integral quadratic forms

重要な positive definite integral quadratic form (以下これを p.d.i.q.f. と略記する) の例は Dynkin 図形から来る. A_l 型の Dynkin 図形から,

$$q = \sum_{i=1}^l X_i^2 - \sum_{i=1}^{l-1} X_i X_{i+1}$$

という quadratic form q が得られ, Theorem A より (**) は実はこれから得られる. 同様にして他の indecomposable Dynkin diagram から次の不等式が得られる. なお integral form にするため B, F, G 型は少し変形している.

$$\begin{aligned}
(B_l) \quad k(B) &\leq \sum_{i=1}^{l-1} c_{ii} + 2c_{ll} - \sum_{i=1}^{l-2} c_{i,i+1} - 2c_{l-1,l} \\
(D_l) \quad k(B) &\leq \sum_{i=1}^l c_{ii} - \sum_{i=2}^4 c_{1i} - \sum_{i=4}^{l-1} c_{i,i+1} \\
(E_6) \quad k(B) &\leq \sum_{i=1}^6 c_{ii} - \sum_{i=1}^4 c_{i,i+1} - c_{36} \\
(E_7) \quad k(B) &\leq \sum_{i=1}^7 c_{ii} - \sum_{i=1}^5 c_{i,i+1} - c_{37} \\
(E_8) \quad k(B) &\leq \sum_{i=1}^8 c_{ii} - \sum_{i=1}^6 c_{i,i+1} - c_{38} \\
(F_4) \quad k(B) &\leq c_{11} + c_{22} + 2c_{33} + 2c_{44} - c_{12} - 2c_{23} - 2c_{34} \\
(G_2) \quad k(B) &\leq c_{11} + 3c_{22} - 3c_{12}.
\end{aligned}$$

ここで $l = l(B)$ は B に含まれる既約 Brauer character の個数を表す. $l(B) = 2$ の block B について 3 つの不等式が得られるが, それを比較してみる.

$$\begin{aligned}
(A_2) \quad k(B) &\leq c_{11} + c_{22} - c_{12} \\
(B_2) \quad k(B) &\leq c_{11} + 2c_{22} - 2c_{12} \\
(G_2) \quad k(B) &\leq c_{11} + 3c_{22} - 3c_{12}.
\end{aligned}$$

(A_2) は $c_{12} < c_{22}$ のとき最強で, (G_2) は $c_{12} > c_{22}$ のとき最強である. これらは $p = 2$ で対称群 S_4 と S_5 のとき実際に起こる.

Example 1.

$$\begin{aligned}
S_4: \quad C &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad k(B) = 5 = 4 + 3 - 2 \\
S_5: \quad C &= \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad k(B) = 5 = 8 + 3 \cdot 3 - 3 \cdot 4.
\end{aligned}$$

4 Sharpness

Definition 2. p.d.i.q.f. q に対し $k(B) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq l(B)} q_{ij} c_{ij}$ が成り立つとき, p -block B を q -sharp とよぶことにする.

Example 1 については次のような解釈ができる. $G, B, C = (c_{ij})$ を有限群, p -block, その Cartan 行列とし, $\tilde{G}, \tilde{B}, \tilde{C} = (\tilde{c}_{ij})$ を別の有限群, その p -block, その Cartan 行列とする. そして $V \in \text{Mat}(l, \mathbb{Z})$ を unimodular な行列とし, $\tilde{C} = V^T C V$ をみたすとする. (これは例えば B と $\tilde{B}$ が Rickard equivalent あるいは一般に, perfectly isometric なら成り立つ (see [2])). さらに $q = \sum_{1 \leq i \leq j \leq l} q_{ij} X_i X_j$ を p.d.i.q.f. とし, Q を対応する対称行列とする (i.e. $q(z) = z Q z^T$ for $z \in \mathbb{Z}^l$). このとき $\tilde{Q} := V^{-1} Q (V^{-1})^T$ とおき $\tilde{q}$ を $\tilde{Q}$ に対応する (positive definite) i.q.f. $\tilde{q} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq l} \tilde{q}_{ij} X_i X_j$ とする (i.e. $\tilde{q}(z) = z \tilde{Q} z^T$ for $z \in \mathbb{Z}^l$). すると $\tilde{Q} \tilde{C} = V^{-1} Q C V$ より

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq l(B)} \tilde{q}_{ij} \tilde{c}_{ij} = \text{tr}(\tilde{Q} \tilde{C}) = \text{tr}(Q C) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq l(B)} q_{ij} c_{ij}$$

である. このことから次を得る.

Proposition B. Suppose B and $\tilde{B}$ are Rickard equivalent. Then B is q -sharp if and only if $\tilde{B}$ is $\tilde{q}$ -sharp.

Remark 1. Example 1 では実際、

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{であり, } V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

とすれば, $\tilde{C} = V^T C V$, $\tilde{Q} := V^{-1} Q (V^{-1})^T$ となっている. この V^{-1} の存在により, A_2 型と G_2 型の p.d.i.q.f. は $\mathbb{Z}$ -equivalent になっている.

Example 2. Let B be a p -block with cyclic defect group P , then B is q -sharp for some p.d.i.q.f. q .

Proof. Rickard, Linkelmann により cyclic block B は, その正規化群 $N_G(P)$ の Brauer 対応子 $\tilde{B}$ と Rickard equivalent であることが示されている. $\tilde{B}$ の Brauer tree は exceptional vertex が中心にある星型になっており, その Cartan 行列は m を tree の multiplicity とす

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} m+1 & m & \cdots & m \\ m & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m \\ m & \cdots & m & m+1 \end{pmatrix} \quad \text{and } k(\tilde{B}) = l(\tilde{B}) + m$$

となる. このとき (A_l) 型の不等式 (**) はちょうど等式になっていて, $\tilde{B}$ は A_l -sharp である. Proposition B より B はある q について q -sharp となる.

Remark 2. どの p -block B もいつもある q があって q -sharp というわけではない. 例えば, $G = S_4 \times C_2$, $H = \text{GL}(2, 3)$, $p = 2$, $B = B_0(G)$, $\tilde{B} = B_0(H)$ とする. ここで C_2 は cyclic group of order 2, $B_0(G)$, $B_0(H)$ はそれぞれ G, H の principal p -block とする. すると $l(B) = l(\tilde{B}) = 2$ で同じ Cartan 行列

$C = \tilde{C} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, (see Example 2.7 in [9]) をもつ. このとき $k(B) = 10$, $k(\tilde{B}) = 8$ と異なるので, $\tilde{B}$ はどの p.d.i.q.f. q に対しても q -sharp にならない. B は A_2 -sharp である.

5 Graphical form $F(2, 2)$

[10] の p.12 にある種の weakly positive graphical form が分類されていて, その中に $F(2, 2)$ がある.

$$F(2, 2): \begin{array}{c} \omega \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 3 \quad 4 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 2 \end{array} \quad (\text{実線は -, 破線は +}) : q = X_\omega^2 + \sum_{i=1}^4 X_i^2 - \sum_{i=1}^4 X_\omega X_i + X_1 X_2.$$

これから $l(B) = 5$ の p -block B に対して不等式

$$(F(2, 2)) \quad k(B) \leq \sum_{i=1}^5 c_{ii} - \sum_{i=2}^5 c_{1i} + c_{23}$$

を得る. [10] にあるように実は $F(2, 2)$ は D_5 と $\mathbb{Z}$ -equivalent であり, したがって $F(2, 2)$ は positive definite である.

Example 3. (1) $G = D_8 \cdot E_9$ (i.e. the semidirect product of a dihedral group of order 8 with an elementary abelian group of order 9, for $p = 3$, $B = B_0(G)$):

$$|G| = 72, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad k(B) = 9 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3 - 2 - 2 - 2 - 2 + 0$$

より B は $F(2, 2)$ -sharp, しかし D_5 -sharp ではない. これは A_5 -sharp が言えない場合だった.

(2) $G = \text{A}\Gamma\text{L}(1, 8) \simeq \text{Fr}_{21} \cdot E_8$ of order 168, for $p = 2$ (the affine semilinear group), $B = B_0(G)$:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad k(B) = 8 = 4 + 2 + 2 + 2 + 4 - 1 - 1 - 1 - 3 + 0$$

より $F(2, 2)$ -sharp となる. これは D_5 -sharp にもなる. やはり A_5 -sharp が言えない場合だった.

Definition 3. $x \in \mathbb{Z}^l$ が $q(x) = 1$ をみたすとき q の 1-root とよぶ.

Corollary B. *In the situation of Theorem A, we have*

$$k(B) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq l(B)} q_{ij} c_{ij}$$

if and only if all rows of the decomposition matrix D of B are 1-roots of q .

Example 4. B を simple Ree group $R(q)$ とし $p = 2, B = B_0(G)$ とする. $P \simeq E_8$ で

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{また } k(B) = 8$$

となる (see [8]). このとき B は D_5 -sharp となる.

Example 5. G を Janko group J_1 とし, $B = B_0(G), p = 2$ とする. $P \simeq E_8$ で Cartan 行列は

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{また } k(B) = 8 \text{ となる (see [4]).}$$

このとき不等式 (D_5) は等式にならない.

$$k(B) = 8 \leq 8 + 4 + 4 + 4 + 4 - 4 - 4 - 4 - 3 = 9$$

で実際 decomposition 行列のある行は D_5 の 1-root にならない. 同様に B は $F(2, 2)$ -sharp にもならない. しかしある p.d.i.q.f. q があって B は q -sharp となる. なぜなら $\tilde{G} = N_G(P) \simeq \text{A}\Gamma\text{L}(1, 8)$ で Example 3 (2) により B の Brauer 対応子 $\tilde{B}$ は $F(2, 2)$ -sharp だった. Broué ([3]) により B と $\tilde{B}$ は perfectly isometric なので Proposition B により B はある p.d.i.q.f. q があって q -sharp となる.

Remark 3. Example 5 で Okuyama は B と $\tilde{B}$ が Rickard equivalent であることを証明している. 最近の結果では, Koshitani-Miyachi [6] により $G = \text{GL}(4, q), p = 3, q \equiv 2, 5 \pmod{9}, B = B_0(G)$ のとき $N_G(P) \simeq D_8 \cdot E_9$ より q -sharp となる. Kunugi [7] により $G = \text{PSL}(3, q), p = 3, q \equiv 4, 7 \pmod{9}, B = B_0(G)$ のときも同様に q -sharp となる. 現在の所 sharp を見つける場合, $(A_l), (D_l), (F(2, 2))$ 型の不等式から sharp になることが多いが, それ以外では [10] にある $(F(3))$ 型の不等式から sharp になる例として, Hall-Janko の単純群 $G = J_2, p = 5, B = B_0(G)$ がある. このとき $N_G(P) \simeq D_{12} \cdot E_{25}$ で B の Brauer 対応子を $\tilde{B}$ とすると $l(B) = l(\tilde{B}) = 6$ で $\tilde{B}$ は $F(3)$ -sharp となる. B と $\tilde{B}$ は Rouquier ([11]) により perfect isometric であることが示されており, B は q -sharp となる. なお Holloway により derived equivalent になることが示されているようである.

Remark 4. 次が知られている (see [10]). q を weakly positive integral unit form (i.e. $q_{ii} = 1$ for all $i = 1, 2, \dots, l$) とする.

(1) (Drozd) q は有限個の positive 1-roots をもつ.

(2) (Ovsienko) q の任意の positive 1-root $(z_1, \dots, z_l)$ は, $z_i \leq 6$ for all $i = 1, \dots, l$ をみたす. 特に, B がある weakly positive integral unit form q に対し q -sharp ならば, 任意の分解数について $d_{ij} \leq 6$ である.

Remark 5. Theorem A は group algebra のみならず $C = D^T D$ をみたす algebra で成立する. そのような例として cellular algebra がある (see [5]).

参考文献

- [1] J. Brandt, *A lower bound for the number of irreducible characters in a block*, J. Algebra **74**, 509-515(1982).

- [2] M. Broué, *Equivalences of blocks of group algebras*, in “Finite dimensional algebras and related topics”, V. Dlab et al. (ed.), Kluwer, Dordrecht, 1-26(1994).
- [3] M. Broué, *Isométries parfaites, Types de blocs, Catégories dérivées*, Astérisque 181-182, 61-92(1990).
- [4] P. Fong, *On the decomposition numbers of J_1 and $R(q)$* , Symp. Math. Rome 13 (1972), Academic Press, 415-422(1974).
- [5] J. J. Graham and G. I. Lehrer, *Cellular Algebras*, Invent. Math. 123, 1-34(1986).
- [6] S. Koshitani and H. Miyachi, *The principal 3-blocks of four- and five-dimensional projective special linear groups in non-defining characteristic*, J. Algebra 226, 788-806(2000).
- [7] N. Kunugi, *Morita equivalent 3-blocks of the 3-dimensional projective special linear groups*, Proc. London Math. Soc. (3), 80, 575-589(2000).
- [8] P. Landrock and G.O. Michler, *Principal 2-blocks of the simple groups of Ree type*, Trans. Amer. Math. Soc. 260, 83-111(1980).
- [9] Y. Ninomiya and T. Wada, *Cartan matrices for blocks of finite p -solvable groups with two simple modules*, J. Algebra 143, 315-333(1991).
- [10] C.M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lect. Notes in Math. 1099, Springer-Verlag, Berlin 1984.
- [11] R. Rouquier, *Isométries parfaites dans les blocs à défaut abélien des groupes symétriques et sporadiques*, J. Algebra 168, 648-694(1994).
- [12] T. Wada, *A lower bound on the Perron-Frobenius eigenvalue of the Cartan matrix of a finite group*, Arch. Math. 73, 407-413(1999).