

Drinfeld 加群の L - 函数について

田口 雄一郎 (都立大理)

$A = \mathbf{F}_q[t]$ とする。以下で扱ふ L - 函数は次の表の右側の列に見られるやうなものである：

	$\mathbf{Z}$	A
	Riemann zeta: $\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_+} 1/n^s$	Carlitz zeta: $\zeta(s) = \sum_{a \in A_+} 1/a^s$
	$L(E, s)$	$L(\phi, s)$
	$L(H^i(X), s)$	$L(\mathcal{E}/X, s)$
解析接続	$\mathcal{O}$	$\bigcirc$
函数等式	$\mathcal{O}$	?

ここに ϕ は $K = \mathbf{F}_q(t)$ の有限次拡大体上定義された Drinfeld 加群であり、代数体上定義された楕円曲線 E の類似物である。 X は $\mathbf{Z}$ 上または A 上有限型の scheme, $\mathcal{E}$ は X/A 上の φ -層 (§1 参照) である。左列の $\mathcal{O}$ は、少なからぬ場合に実際に証明されてをり、一般的な予想がきちんと定式化されてをりその成立を疑ふ人は (多分) ないが、一般には証明されてゐない ($\mathcal{O}K$ だが閉じたマルになつてゐない) ことを示す。右列の $\bigcirc$ は一般に証明されてをり (§3)、? の部分については予想すら未だ無い。以下では主に $L(\mathcal{E}/X, s)$ の解析接続について述べる (これは D. Wan 氏との共同研究である)。

1. 諸定義. X を $\mathbf{F}_q$ -scheme とし、 $\mathcal{A}$ を $\mathbf{F}_q$ -algebra とする。以下 scheme や algebra は全て neotherian とする。

X 上の $\mathcal{A}$ -係数 φ -層 とは、組 $(\mathcal{E}, \varphi)$ であつて、(i) $\mathcal{E}$ は有限型局所自由 $(\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{A})$ -加群；(ii) $\varphi : \mathrm{Fr}_X^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ は $(\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{A})$ -加群準同型、なるもののことである。ここに添字なしの $\otimes$ は全て $\mathbf{F}_q$ 上の tensor であり、また Fr_X は q -乗 Frobenius 射： $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ である。

π を $K = \mathbf{F}_q(t)$ の素点をする。 X 上の π -進 φ -層 $(\mathcal{E}, \varphi)$ とは、上の定義で $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{A}$ を $\mathcal{O}_X \hat{\otimes} K_\pi$ で置き替へたもののことである。ここに K_π は K の π -進完備化、 $\hat{\otimes}$ は $\otimes$ を取つた後 π -進完備化したもの、を表す。

π -進の場合と区別するために普通の φ -層を特に 代数的 φ -層 と呼ぶことがある。

X 上の $\mathcal{A}$ -係数 φ -層 $(\mathcal{E}, \varphi)$ に対し

$$L(\mathcal{E}/X, T) := \prod_{x \in X_0} \det(1 - T^{d(x)} \varphi_x^{d(x)} | \mathcal{E}_x)^{-1} \in \mathcal{A}[[T]]$$

とおく。ここに X_0 は X の閉点の集合、 $d(x) = \text{degree}(x) = [\kappa(x) : \mathbf{F}_q]$, $(\mathcal{E}_x, \varphi_x)$ は $(\mathcal{E}, \varphi)$ の x での fiber である。この定義は $(\mathcal{E}, \varphi)$ が π -進 φ -層 のときもそのまま通用し、 $L(\mathcal{E}/X, T) \in K_\pi[[T]]$ となる。

π -進 φ -層 $(\mathcal{E}, \varphi)$ が基本群 $\pi_1(X)$ の π -進表現 V と対応するとき、

$$L(\mathcal{E}/X, T) = \prod_{x \in X_0} \det(1 - T^{d(x)} \mathrm{Frob}_x | V)^{-1}$$

である。また $(\mathcal{E}, \varphi)$ が自明な対象 **1** であるとき $L(\mathbf{1}/X, T)$ は X の Hasse-Weil zeta (mod p) と一致する。

この $L(\mathcal{E}/X, T)$ は local L と呼ばれる。その理由は次の global L の定義を見てもらへば納得されよう： ∞ により K の “無限素点” $(1/t)$ を表す。 X が A -scheme であるとき、 X 上の ∞ -進 φ -層 $(\mathcal{E}, \varphi)$ に対し

$$L(\mathcal{E}/X, s) := \prod_{\mathbf{p} \in (\mathrm{Spec} A)_0} L(\mathcal{E}_{\mathbf{p}}/X_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}^{-s})^{-1}$$

と定義する (右辺は local L たちの積)。ここに $\mathcal{E}_{\mathbf{p}}/X_{\mathbf{p}}$ は $\mathcal{E}/X$ の $\mathbf{p}$ 上の fiber であるが、 s や $\mathbf{p}^{-s}$ は説明を要する： $s = (x, y)$ は

$$S_{\infty} := \mathbf{C}_{\infty}^{\times} \times \mathbf{Z}_p \quad (\mathbf{C}_{\infty} := \mathbf{F}_q((1/t)) \text{ の代数的閉包の完備化})$$

の元であり、 A の非零 ideal $\mathbf{a} = (a)$ (a は monic な多項式 $\in A$) に対し

$$\mathbf{a}^s := x^{-\deg(a)} \langle a \rangle^y,$$

ここに

$$\langle a \rangle := t^{-\deg(a)} a,$$

と定義する。 $\langle a \rangle$ は $U_{\infty}^1 = 1 + (1/t)\mathbf{F}_q[[1/t]]$ の元であり、従つて y 乗 ($y \in \mathbf{Z}_p$) することが出来る。 S_{∞} は k のある “ U_{∞}^1 -拡大” (と定数拡大の合成) の Galois 群の指標群の、ある部分と見做せる。

各 $y \in \mathbf{Z}_p$ を固定するごとに $L(\mathcal{E}/X, s)$ は

$$\sum_{n \geq 0} a_n(y) x^n$$

の形に展開できる。そこで $L(\mathcal{E}/X, s)$ を $y \in \mathbf{Z}_p$ により parametrize された冪級数の族と見做すことができる。

なほ、Drinfeld 加群の L -函数についての諸々の事柄については [1] を参照されたい。

2. Drinfeld 加群との関係 について一言述べておかう。 A -scheme X 上の Drinfeld 加群 $(\mathcal{L}, \phi)$ とは、 X 上の直線束 $\mathcal{L}$ と環準同型 $\phi: A \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbf{F}_q}(\mathcal{L})$ の組であつて適当な条件を満たすものの組のことである。これに対し

$$\mathcal{E} := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{F}_q}(\mathcal{L}, \mathbf{G}_a)$$

とおく。ここに $\mathbf{G}_a$ は X 上の加法群、 $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{F}_q}$ は X 上の Zariski 層 $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_q}(\mathcal{L}|_U, \mathbf{G}_a|_U)$ ($\mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_q}$ は $\mathbf{F}_q$ -加群準同型のなす加群) である。 $\mathcal{E}$ には ϕ を介して A が作用し (よつて $\mathcal{E}$ は $(\mathcal{O}_X \otimes A)$ -加群となり)、 $\varphi := (\mathbf{G}_a \text{ 上の Frobenius } x \mapsto x^q \text{ から誘導される写像})$ とおくと、これは Frobenius linear である。 $(\mathcal{L}, \phi)$ の Drinfeld 加群としての rank が r ならば $\mathcal{E}$ は rank r の局所自由 $(\mathcal{O}_X \otimes A)$ -加群であることもわかる。よつて $(\mathcal{E}, \varphi)$ は X 上の A -係数 φ -層となる。

$T_{\pi}(\phi)$ を $(\mathcal{L}, \phi)$ の π -進 Tate 加群とすると (π が $\mathrm{Im}(X \rightarrow \mathrm{Spec} A)$ 上 generic に可逆ならば) $L(\mathcal{E}/X, s)$ と $L(T_{\pi}(\phi)/X, s)$ とは (有限個の factors を除き) 一致する。

3. 結果: Meromorphy. まづ local L について:

定理 1. ([2]) X 上の $\mathcal{A}$ -係数 φ -層 $(\mathcal{E}, \varphi)$ に対し、その local L -函数 $L(\mathcal{E}/X, T)$ は T の $\mathcal{A}$ -係数有理函数である。

π -進の場合を定式化するために K_π の代数閉包の π -進完備化を $\mathbf{C}_\pi$ と書く。冪級数 $f(T) \in \mathbf{C}_\pi[[T]]$ が entire とはそれが全ての点 $\in \mathbf{C}_\pi$ に於いて収束すること、また、meromorphic とは $f = (\text{entire})/(\text{entire})$ の形であること、と定義する。

定理 2. ([2]) $(\mathcal{E}, \varphi)$ が X 上の overconvergent π -進 φ -層ならばその local L -函数 $L(\mathcal{E}/X, T)$ は meromorphic である。

ここで overconvergent とは、 φ を (X 上 local に)

$$\varphi = \sum_{n \in \mathbf{N}^d} a_n x^n, \quad a_n \in M_r(K_\pi),$$

(ここに $x = (x_1, \dots, x_d)$ は $\mathbf{F}_q$ -代数 $\mathcal{O}_X$ の局所生成系、また $r = \text{rank } \mathcal{E}$) と行列表示したとき、 a_n の成分が十分速く小さくなる (as $|n| \rightarrow \infty$) といふことである。

これらの証明は基本的に Dwork trace formula (cf. [4]):

$$L(\mathcal{E}/X, T) \approx \prod \det(1 - T \cdot \text{Frobenius} | \mathcal{E} \text{ の } W(\mathbf{F}_q) \text{ 上への持ち上げ})^\pm.$$

による。この $\det$ は (∞ -次元空間上の) Fredholm 行列式である。

さらに X が純 d -次元の affine 完全交叉ならば $L(\mathcal{E}/X, T)^{(-1)^{d-1}}$ は多項式 ($(\mathcal{E}, \varphi)$ が代数的の場合) または entire ($(\mathcal{E}, \varphi)$ が overconvergent π -adic の場合) である ([3])。これは Koszul 複体を使って証明される。この現象は次の prototype により納得される: $\mathbf{F}_q$ 上の代数曲線の Hasse-Weil zeta は $P(T)/(1-T)(1-qT)$ の形であるが、一点を抜くことにより $(1-T)$ が消え、mod p することにより $(1-qT)$ が消える。

Global L についての結果を述べるために次の定義をおく: 函数 $f: \mathbf{S}_\infty \rightarrow \mathbf{C}_\infty \cup \{\infty\}$ が entire とは

1. 各 $y \in \mathbf{Z}_p$ に対し $f(s) = f(x, y)$ は

$$f(x, y) = \sum_{n \geq 0} f_n(y) x^n \quad \in \mathbf{C}_\infty[[x]]$$

と表示され、この冪級数は全ての $x \in \mathbf{C}_\infty$ で収束する;

2. 上の展開は冪級数の族 (parametrized by $y \in \mathbf{Z}_p$) として強い意味で連続 (i.e. $f = \sum f_n x^n$ と実数 r に対し $\|f\|_r := \sup_n |f_n| q^{rn}$ とおくととき、写像 $y \mapsto \sum f_n(y) x^n$ は、全ての $r \in \mathbf{R}$ に対し、この norm $\|\cdot\|_r$ に関して連続)。

また、 f が meromorphic とは $f = (\text{entire})/(\text{entire})$ の形であることである。

定理 3. ([2], [3]) X が A -scheme, $(\mathcal{E}, \varphi)$ が X 上の overconvergent ∞ -進 φ -層であるとき、その global L -函数 $L(\mathcal{E}/X, s)$ は meromorphic である。また X が純 d -次元の affine 完全交叉ならば $L(\mathcal{E}/X, s)^{(-1)^{d-1}}$ は entire である。

証明の要点は

1. $L(\mathcal{E}/X, s) = L(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}(y), x)$ と解釈できること (ここに $\mathcal{L}(y)$ は $\text{Spec } A$ 上の “函数” $\lambda \mapsto (1 - \lambda/t)^{-y}$ により定義される rank 1 の overconvergent ∞ -進 φ -層);
2. $(\mathcal{E}, \varphi)$ がある径数に従って “一様に” 変化するとき (e.g. $\mathcal{L}(y)$ でひねった時など)、その Fredholm 行列式も “一様に” 変化すること。

4. 函数等式について. 有限体 $\mathbf{F}_q$ 上の滑らかな射影的代数曲線の (普通の) Hasse-Weil zeta 函数は $Z_C(T) = P(T)/(1-T)(1-qT)$ の形であり、 $T \leftrightarrow 1/qT$ に関して函数等式を持つ。ところで $\zeta(s) = \zeta(x, y)$ を $\mathbf{F}_q[t]$ の Carlitz zeta とすると

$$\frac{1}{1-x} \cdot \zeta(x, 0) = Z_{\mathbf{P}^1}(x) \pmod{p} = \frac{1}{1-x}$$

であるから、 $\zeta(s)$ は、このままでは、よい函数等式を持つとは考へにくい。そこで $\zeta(s)$ を標数 0 に持ち上げることを考へる。具体的には $s = (x, y)$ の x を単に変数と思ひ、 $\mathbf{a}^{-s} = x^{\deg(a)} \langle a \rangle^{-y}$ の $\langle a \rangle$ を Teichmüller 持ち上げを使つて Witt 環 $W(\mathbf{C}_\infty)$ に持ち上げる。かうして定義した $\zeta(s)$ に岩澤-Tate の方法を適用する。 $\mathbf{F}_q(t)$ の idele 類群 I は pro- p 的なものだから、 $\zeta(s)$ が値を取る体として ξ -adic (ここに $\xi = (1/t, 0, 0, \dots) \in W(\mathbf{C}_\infty)$) な位相を持つ標数 0 の完備体を考へると、“Haar 測度”による積分や Fourier 解析ができる。 $\zeta(s)$ に適当な Γ -因子をかけたものは

$$\int_I \Phi(z) \omega_s(z) d\mu(z)$$

(ここに Φ は適当な“特性函数”、 ω_s は

$$\omega_s(z) = x^{\sum_v \deg(v) \text{ord}_v(z_v)} \left(\frac{\prod_{v \neq \infty} \langle v \rangle^{\text{ord}_v(z_v)}}{\langle z_\infty \rangle} \right)^{-y}$$

で定義される指標である)、と表示でき、

$$(x, y) \leftrightarrow (1/qx, -y)$$

に関し函数等式を持つ。ところが $\Gamma(s)$ を (i.e. $\Phi_\infty(z_\infty)$ を) あまり naive に定義すると (e.g. $\Gamma(s) = \frac{q-1}{1-x} \int_{U_\infty^1} [z]^y d\mu(z)$), $\Gamma(s) = 0$ unless $y = 0$ となり、何も新しい結果は出ない。よい Φ_∞ を取つて Thakur や Goss の Γ が現れるやうにできないか?

文献

- [1] D. Goss, L -series of t -motives and Drinfeld modules, in: The Arithmetic of Function Fields, D. Goss, D.R. Hayes and M.I. Rosen (eds.), Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992, 313-402
- [2] Y. Taguchi and D. Wan, L -functions of φ -sheaves and Drinfeld modules, J. AMS **9**(1996), 755-781
- [3] Y. Taguchi and D. Wan, Entireness of L -functions of φ -sheaves on affine complete intersections, to appear in: J. Number Theory
- [4] D. Wan, Meromorphic continuation of L -functions of p -adic representations, Ann. of Math. **143**(1996), 469-498