

よどみ点近くの流れの安定 (線型および非線型理論による考察)

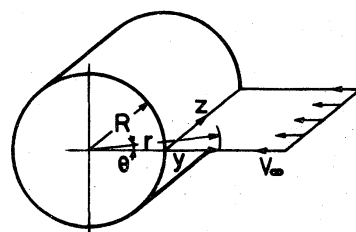
北大 工学部 飯田誠一

有限な曲率半径をもつ二次元よどみ点近くの流れに Fourier 展開を適用して、速度の変動成分に関する third order までの解析を行ない、subcritical threshold instability の起る可能性のあることを述べている。

1. 安定理論の構成

使用記号は、右図に示す円柱極座標系にしたがっており、 r, θ, z 方向の速度成分を v, u, w であらわすほか、普通に用いられる記号法によっている。

座 標 系



非圧縮性流体を仮定することとし、速度 $V(r, \theta, z, t)$ を連続の式と渦度 $\omega = \text{rot } V$ の方程式

$$\nabla \nabla = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - (\omega \nabla) \nabla + (\nabla \nabla) \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (2)$$

から決定する。

速度 ∇ (成分 v, u, w) を平均量 $\overline{\nabla}$ (成分 $\overline{v}, \overline{u}, \overline{w}$) と変動量 $\hat{\nabla}$ (成分 $\hat{v}, \hat{u}, \hat{w}$) に分解し、 $\overline{\nabla}$ は z についての平均、 $\hat{\nabla}$ は z についての Fourier 展開

$$\hat{v} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{nikz} v^{(n)}(r, \theta, t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nikz} \tilde{v}^{(n)}(r, \theta, t) \quad (3)$$

... ; ただし k は波数、 $\sim$ は共役成分

によってあらわす。

つぎに変数 t を分離するため、Watson の解析 (J.F.M. 9, 371, 1960) を参考にして、

$$v^{(n)}(r, \theta, t) = A^n(t) \sum_{l=0}^{\infty} A_0^{2l} \cdot v_l^{(n)}(r, \theta), \dots \quad (4)$$

ただし

$$\frac{dA}{dt} = A(a_0 + A_0^2 a_1 + \dots) ; \quad A_0^2 = A\ddot{A} \quad (5)$$

とあらわせば、 $\overline{\hat{v} \hat{\xi}_\theta}$ ($\hat{\xi}_\theta$ は渦度の θ 方向変動成分) などの平均量はすべて A_0^{2l} ($l=0, 1, 2, \dots$) のべき級数に展開できる。

そこで平均量 $\overline{\nabla}$ ($\overline{v}, \overline{u}, \overline{w}$) についても

$$\overline{v} = \sum_{l=0}^{\infty} A_0^{2l} \overline{v}_l(r, \theta), \dots \quad (6)$$

とおく。このようにすれば、連続および渦度方程式に含まれ

る独立変数は r, θ となる。

つぎに、平均流を二次元流れ ($\bar{w}=0, \bar{w}_\theta=0$) と仮定し、

無次元量

$$\left. \begin{aligned} Re &= \frac{2RV_\infty}{\nu} = \frac{1}{\varepsilon^2}, & \frac{r}{R} &= 1 + \varepsilon\eta, \\ \kappa &= \varepsilon R k, & \alpha_\ell &= \frac{R}{2V_\infty} a_\ell \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を使用する。連続の式を満足させるため、流れ関数 ψ_ℓ を導入することとし、これを θ -展開して

$$\psi_\ell = 2\varepsilon V_\infty r \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \theta^{2m} \Phi_{\ell m}(\eta) \right\}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

とあらわす。平均速度の成分は

$$\left. \begin{aligned} v_\ell &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\ell}{\partial \theta} = -2\varepsilon V_\infty \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \theta^{2m+1} \Phi_{\ell m}(\eta) \right\} \\ u_\ell &= \frac{\partial \psi_\ell}{\partial r} = 2\varepsilon V_\infty \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \theta^{2m} \Psi_{\ell m} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\text{ただし} \quad \Psi_{\ell m} = \frac{(1+\varepsilon\eta)}{\varepsilon} \Phi'_{\ell m}(\eta) + \Phi_{\ell m}(\eta), \quad (\text{'は}\eta\text{に関する微分})$$

である。変動成分についても、(9)式からの類推で

$$\left. \begin{aligned} v_\ell^{(n)} &= -\varepsilon V_\infty \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \theta^{2m} v_{\ell m}^{(n)}(\eta) \right\} \\ u_\ell^{(n)} &= V_\infty (1+\varepsilon\eta) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \theta^{2m+1} u_{\ell m}^{(n)}(\eta) \right\} \\ w_\ell^{(n)} &= -i \frac{V_\infty \varepsilon}{\kappa} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \theta^{2m} w_{\ell m}^{(n)}(\eta) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

とおく。

よどみ点近くの流れでは、 $m=0$ の場合のみを取扱えばよく、連続の式および渦度方程式は、変動成分の振幅をあらわす量 $A^n A_0^{2l}$ ($n=0, 1, 2, \dots; l=0, 1, 2, \dots$) で整理すれば、つぎのようになる。なお境界条件は、壁面 ($\eta=0$) で速度成分がすべて 0, $\eta \rightarrow \infty$ で解が最も早く収束するように設定する。

連続の式 (変動) : $O(A^n A_0^{2l}), (n=1, 2, \dots, l=0, 1, \dots)$

$$v_{\eta 0}^{(n)'} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\eta} v_{\eta 0}^{(n)} - u_{\eta 0}^{(n)} - \eta w_{\eta 0}^{(n)} = 0 \quad (11)$$

渦度方程式

基本流 : $O(A_0^0)$

$$F_{00}(\Phi_{00}^{IV}, \Phi_{00}''', \Phi_{00}'', \Phi_{00}', \Phi_{00}; \varepsilon) = 0 \quad (12)$$

1次解 (変動) : $O(A)$

$$F_{00}^{(1)}(v_{00}^{(1)IV}, v_{00}^{(1)'''}, v_{00}^{(1)''}, v_{00}^{(1)'}, v_{00}^{(1)}; w_{00}^{(1)IV}, w_{00}^{(1)'''}, w_{00}^{(1)''}, w_{00}^{(1)'}; \Phi_{00}'', \Phi_{00}', \Phi_{00}; \varepsilon, \alpha_0, \kappa^2) = 0 \quad (13)$$

(13)式は $v_{00}^{(1)}, w_{00}^{(1)}$ に関する連立微分方程式である。

2次解 (平均) : $O(A_0^2)$

$$\begin{aligned}
& F_{10}(\Phi_{10}^{IV}, \Phi_{10}''', \Phi_{10}'', \Phi_{10}', \Phi_{10}; \Phi_{00}''', \Phi_{00}'', \Phi_{00}', \Phi_{00}; \varepsilon, \alpha_{0R}) \\
& = G_{10}(v_{00}^{(1)'''}, v_{00}^{(1)''}, v_{00}^{(1)'}, v_{00}^{(1)}; w_{00}^{(1)''}, w_{00}^{(1)'}, w_{00}^{(1)}; \quad (14)
\end{aligned}$$

2次解(変動): $O(A^2)$

$$\begin{aligned}
& F_{00}^{(2)}(v_{00}^{(2)'''}, v_{00}^{(2)''}, v_{00}^{(2)'}, v_{00}^{(2)}; w_{00}^{(2)'''}, w_{00}^{(2)''}, w_{00}^{(2)'}, w_{00}^{(2)}; \\
& \quad \Phi_{00}'', \Phi_{00}', \Phi_{00}; \varepsilon, \alpha_0, k^2) \\
& = G_{00}^{(2)}(v_{00}^{(1)''}, v_{00}^{(1)'}, v_{00}^{(1)}; w_{00}^{(1)'}, w_{00}^{(1)}, w_{00}^{(1)}; k^2) \quad (15)
\end{aligned}$$

(15)式も $v_{00}^{(2)}, w_{00}^{(2)}$ に関する連立微分方程式である。

3次解(変動): $O(A A_0^2)$

$$\begin{aligned}
& F_{10}^{(1)}(v_{10}^{(1)'''}, v_{10}^{(1)''}, v_{10}^{(1)'}, v_{10}^{(1)}; w_{10}^{(1)'''}, w_{10}^{(1)''}, w_{10}^{(1)'}, w_{10}^{(1)}; \\
& \quad \Phi_{00}'', \Phi_{00}', \Phi_{00}; \varepsilon, \alpha_0, \alpha_{0R}, k^2) \\
& = G_{10}^{(1)}(v_{00}^{(1)'}, v_{00}^{(1)}, v_{00}^{(1)}; w_{00}^{(1)'}, w_{00}^{(1)}, w_{00}^{(1)}; \Phi_{10}'', \Phi_{10}', \Phi_{10}; \\
& \quad v_{00}^{(2)'}, v_{00}^{(2)}, v_{00}^{(2)}; w_{00}^{(2)'}, w_{00}^{(2)}, w_{00}^{(2)}; \alpha_1, k^2) \quad (16)
\end{aligned}$$

(16)式も $v_{10}^{(1)}, w_{10}^{(1)}$ に関する連立微分方程式である。

(13)式は、 α_0 を指定するとき、 k を決定する固有値問題を構成し、(16)式も固有値 α_1 を決定する問題になっている。

(12) ~ (16)式から、順次前段階での解を用いることにより、高次の変動量が求められるが、式の詳細は省略してある。

2. 結果

前述の式について、 $Re = 2.5 \times 10^5$ ($\varepsilon = 0.002$) の場合を数値的に解いたので、その結果を要約すればつぎのようである。

1次解(変動)

α_0 が $-0.005 \leq \alpha_0 \leq 0.005$ の範囲であれば、これに対応する固有値は $k \simeq 0.35$ である。壁面から遠方 ($z > 20$) での変動成分は $|v_{00}^{(1)}| > |w_{00}^{(1)}| \gg |u_{00}^{(1)}|$ であって、 $w_{00}^{(1)}$ が急速に 0 に収束するのにくらべて、 $v_{00}^{(1)}$ の収束性はきわめて緩慢である。

2次解

(14) 式および (15) 式の解は、最も良好な収束性を示した。1次解の変動成分で作られるレイノルズ応力に起因する平均流のゆがみをあらわす (14) 式の解 π_{10} は、 $z \sim 5$ 以上で一定値になる。変動成分の大きさは1次解のそれにくらべて $1/10$ 以下である。

3次解(変動)

この場合の固有値 α_1 は、 10^{-5} 程度のきわめて小さな正の値になった。非線型安定論では α_1 の符号が重要な意味をもつ

ため、いくつかの方法で α_1 の符号を吟味したが、いずれも正の値を与える結果となった。この場合の変動成分の大きさは 1 次解の $1/100$ 以下である。

3. 変動量の時間的増幅

変動量を 3 次の項まで考慮するとき、その時間的増幅をあらわす方程式は、(5) 式とその共役部分から

$$\frac{d A_0^2}{d\tau} = 2 A_0^2 (\alpha_{0R} + \alpha_{1R} A_0^2) \quad , \quad \tau = \frac{2V_{00}}{R} t \quad (17)$$

である。ただし添字 R は実数部分をあらわす。

(17) 式は、 $\alpha_{1R} > 0$ が知られているので、 A_0^2 が発散しないためには $\alpha_{0R} < 0$ の場合を考慮すればよい。積分定数を $p = A_0^2(0)$ 、threshold value を $p_N = -\alpha_{0R}/\alpha_{1R}$ とおけば、

(17) 式の解は

$$A_0^2(\tau) = \frac{p_N}{\left(\frac{p_N}{p} - 1\right) e^{-2\alpha_{0R}\tau} + 1} \quad (18)$$

となる。(18) 式は、1 次解で安定 ($\alpha_{0R} < 0$) であっても、

$p > p_N$ であるような擾乱に対しては不安定となる、いわゆる subcritical threshold instability を構成する。

本研究は、谷一郎東京大学名誉教授の示唆により始めたものであり、かすかすのご指導を賜わった。また小橋安次郎北海道大学教授には有益なご助言、ご討議をいただいた。ここに心から感謝の意を表する。なお内容の詳細は、追って日本機械学会論文集に発表の予定である。

本研究の数値計算には北海道大学大型計算センター：FACOM 230-60を使用した。